

Modélisation numérique du désaccordage non-linéaire des structures tournantes en viscoélasticité à mémoire

E. Le Courric¹, E. Capiez-Lernout¹, C. Desceliers¹

¹ MSME, Université Gustave Eiffel, {erwan.le-courric, evangeline.capiez-lerout, christophe.desceliers}@univ-eiffel.fr

Résumé — Une méthodologie d'analyse du désaccordage d'une roue aubagée viscoélastique à mémoire en grands déplacements est proposée. Cette approche repose sur l'utilisation d'un modèle probabiliste d'incertitudes qui permet de conserver les propriétés causales du matériau. Les développements liés à l'implémentation de la loi viscoélastique à mémoire en présence de non-linéarités géométriques nécessitent la construction d'opérateurs implicites dépendant de l'histoire du matériau. Les algorithmes de résolution permettent d'exploiter des propriétés de récurrences.

Mots clés — désaccordage, viscoélasticité, dynamique non-linéaire, roue aubagée, incertitudes.

1 Méthodologie pour l'étude de la réponse forcée d'une roue aubagée accordée en déplacements finis en viscoélasticité à mémoire

1.1 Contexte de recherche

Ce travail de recherche porte sur l'étude du désaccordage des structures tournantes (de types soufflante) en grands déplacements pour lequel un modèle d'amortissement causal est considéré en utilisant une loi de comportement viscoélastique à mémoire. En particulier, la résolution du problème de réponse forcée est formulée dans le domaine temporel, en raison des non-linéarités géométriques et de la prise en compte de l'effet mémoire viscoélastique. La recherche se veut méthodologique et propose une stratégie de résolution des équations en tenant compte de l'ensemble des difficultés de modélisation. Elle nécessite la construction de nouveaux opérateurs et l'utilisation d'un modèle probabiliste qui préserve la causalité des équations.

1.2 Description de la loi de comportement

La loi de comportement viscoélastique à mémoire considérée est celle proposée par Coleman et Noll [1]. Elle permet de modéliser un amortissement causal dépendant de l'histoire des déformations. Elle établit une relation entre le second tenseur de Piola–Kirchhoff $\mathbb{S}(\mathbf{x}, t)$ et le tenseur des déformations de Green–Lagrange $\mathbb{E}(\mathbf{x}, t)$ telle que :

$$\mathbb{S}_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \mathbb{G}_{ijkl}(\mathbf{x}, 0) \mathbb{E}_{kl}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \int_0^{+\infty} \hat{\mathbb{G}}_{ijkl}(\mathbf{x}, s) \mathbb{E}_{kl}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t - s)) ds \quad , \quad (1)$$

où la fonction $t \mapsto \mathbb{G}(\mathbf{x}, t)$ est un tenseur d'ordre 4, représentant la fonction de relaxation viscoélastique.

L'Eq. (1) se décompose en une partie instantanée purement élastique et une partie mémoire donnant lieu à un terme de rigidité et un terme d'amortissement.

Le matériau est supposé isotrope homogène et on se place dans le cadre d'un modèle de Maxwell généralisé à une branche et à coefficient de Poisson constant, paramétré par $\mathbf{w} = (E_{\text{stat}}, E_1, \tau_1, \nu)$. Le tenseur des fonctions de relaxation viscoélastique s'écrit :

$$\mathbb{G}(t, \mathbf{w}) = (1 + \gamma_1 e^{-t/\tau_1}) \mathbb{G}(E_{\text{stat}}, \nu) \quad , \quad (2)$$

où $\mathbb{G}(E_{\text{stat}}, \nu)$ définit le tenseur d'élasticité isotrope homogène en fonction du module de Young E_{stat} et du coefficient de Poisson ν , où le coefficient adimensionné $\gamma_1 = E_1/E_{\text{stat}}$ quantifie la rigidité de la première branche et τ_1 le temps de relaxation associé.

1.3 Équation de la dynamique en viscoélasticité à mémoire en grands déplacements

On considère une roue aubagée à symétrie cyclique, constituée d'un disque et de N_p aubes. La structure tourne à la vitesse angulaire constante Ω autour de son axe de symétrie et est soumise à des efforts extérieurs. On s'intéresse au problème de réponse forcée et l'analyse vibratoire est effectuée dans le repère tournant autour de la configuration stationnaire associée [2]. Le problème de réponse forcée correspond au régime permanent de la roue aubagée, et ne dépend pas des conditions initiales. Dans ce cas, ce problème est décrit dans le domaine temporel par l'équation différentielle non-linéaire couplée : trouver $\mathbf{u}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}^n$ tel que,

$$[M]\ddot{\mathbf{u}}(t) + [C_g(\Omega)]\dot{\mathbf{u}}(t) + [K_{cge}(\Omega)]\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}_{\text{elas}}^{\text{nl}}(\mathbf{u}(t)) + \mathbf{F}_{\text{visco}}^{\text{lin-nlin}}(t, \mathbf{u}) = \mathbf{F}_{\text{ext}}(t) \quad , \quad (3)$$

$$[B]^T \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad , \quad (4)$$

où $[B]$ est une matrice rectangulaire décrivant les conditions de Dirichlet, où $[M]$ est la *matrice de masse*, $[C_g(\Omega)]$ est la *matrice de couplage gyroscopique* pour une vitesse de rotation constante, et $[K_{cge}(\Omega)]$ la matrice de rigidité linéaire telle que,

$$[K_{cge}(\Omega)] = [K_e] + [K_c(\Omega)] + [K_g(\Omega)] \quad . \quad (5)$$

Dans l'Eq. (5), $[K_g(\Omega)]$ correspond à la *matrice des pré-contraintes géométriques*, $[K_c(\Omega)]$ à la *matrice de rigidité centrifuge* et $[K_e]$ à la *matrice de rigidité élastique* ($E_{\text{stat}} + E_1$).

Dans l'Eq. (3), $\mathbf{F}_{\text{elas}}^{\text{nl}}(\mathbf{u}(t))$ est le vecteur des *forces élastiques non linéaires internes* dépendant du vecteur de déplacement instantané $\mathbf{u}(t)$ et $\mathbf{F}_{\text{visco}}^{\text{lin-nlin}}(\mathbf{u})$ est le vecteur des forces viscoélastiques linéaires et non linéaires internes (effet mémoire), qui dépend de l'historique complet des déplacements. Le vecteur $\mathbf{F}_{\text{visco}}^{\text{lin-nlin}}(\mathbf{u})$ est décomposé en deux parties. Le premier terme explicite est indépendant du déplacement instantané, ne dépend que des déplacements passés et est regroupé dans le second membre de l'équation. Il dépend linéairement et quadratiquement des déplacements antérieurs. Le deuxième terme implicite dépend linéairement du déplacement instantané et nécessite la construction d'un nouvel opérateur de rigidité. Il est à noter que cet opérateur dépend linéairement et quadratiquement des déplacements antérieurs.

La résolution numérique de l'équation est effectuée à l'aide de l'algorithme implicite de Newmark. À chaque pas de temps, il est nécessaire de résoudre une équation non-linéaire en utilisant le schéma itératif de Newton–Raphson. Cette équation se réécrit sous la forme suivante :

$$[K_{\text{eff}}^{n+1}] \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{F}_{\text{elas}}^{\text{nl}, n+1}(\mathbf{u}^{n+1}) = \mathbb{F}_{\text{eff}}^{n+1} \quad , \quad (6)$$

où \mathbf{u}^{n+1} décrit le déplacement au temps t_{n+1} . Dans l'Eq. (6), la matrice de rigidité effective $[K_{\text{eff}}^{n+1}]$ inclut les termes mémoire issue de la viscoélasticité en grands déplacements et nécessite d'être réévaluée à chaque pas de temps. Le vecteur des efforts effectifs $\mathbb{F}_{\text{eff}}^{n+1}$ contient l'ensemble des termes viscoélastiques ne dépendant que des instants antérieurs. Le choix du noyau issu de la modélisation de Maxwell généralisée, décrit dans l'Eq. (2), permet d'exploiter des relations de récurrence sur les termes mémoire lors de la mise à jour des efforts internes viscoélastiques, et contribue ainsi à l'optimisation des coûts de calcul.

2 Modélisation du désaccordage involontaire

Le phénomène de désaccordage, décrit dans [3, 4] constitue une problématique très largement étudiée. Le désaccordage est décrit par une brisure de la symétrie cyclique causée par des tolérances géométriques, matérielles, ... Il a pour conséquence d'amplifier fortement les vibrations de certaines aubes de manière incontrôlée et localisée. Ce phénomène, de nature aléatoire nécessite une modélisation probabiliste. Dans le cas présent, le modèle probabiliste est directement implémenté sur une base de projection, ce qui permet d'assurer la causalité des équations stochastiques non-linéaires. Ce dernier utilise l'approche probabiliste non paramétrique pour les bases de projection dont les fondements sont détaillés dans [5].

2.1 Réduction de modèle

Dans un contexte industriel, il est indispensable d'utiliser des techniques de réduction de modèle pour réduire la dimension des équations. Soit $[V]$ la matrice réelle de taille (n, N) définissant une base de projection d'ordre N . Cette dernière est obtenue par analyse modale et vérifie les propriétés d'orthogonalité $[V]^T [M] [V] = [I_N]$. La modélisation du désaccordage est effectuée en remplaçant la matrice de projection $[V]$ par une matrice aléatoire $[\mathbf{W}]$. Il est à noter qu'une analyse de convergence vis-à-vis de l'ordre du modèle réduit a été systématiquement réalisée pour calculer la réponse dynamique viscoélastique.

2.2 Modèle probabiliste du désaccordage

Ce choix de modélisation est adapté au cadre des grands déplacements pour lesquels les effets non-linéaires géométriques peuvent être conséquents. Par ailleurs, il ne remet pas en cause la causalité de la loi de comportement viscoélastique à mémoire, ce qui permet d'obtenir un modèle réduit stochastique non-linéaire cohérent avec la physique du problème. La base aléatoire représentée par $[\mathbf{W}]$ présente les caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} E\{[\mathbf{W}]\} &= [V] \\ [\mathbf{W}]^T [M] [\mathbf{W}] &= [I_N] \\ [B]^T [\mathbf{W}] &= [\mathbf{0}] \end{aligned} \quad (7)$$

Elle est paramétrée par le vecteur d'hyperparamètres :

$$\boldsymbol{\mu} = (s, \beta, \{[\sigma]_{kk'}\}, 1 \leq k \leq k' \leq N) \quad . \quad (8)$$

où s contrôle le taux de désaccordage, β décrit la corrélation entre les degrés de liberté au sein d'un vecteur de base, et $[\sigma]$ caractérise la corrélation entre les vecteurs de la base aléatoire. Tous les détails de construction du modèle probabiliste et du générateur de matrices aléatoires associé peuvent être trouvés dans [5].

2.3 Modèle réduit non-linéaire stochastique

Le modèle réduit non-linéaire stochastique **SNLR** modélise la dynamique de la roue aubagée désaccordée en grands déplacements et en viscoélasticité à mémoire s'écrit :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{R}}(t) + [\mathbf{C}_g(\Omega)]\dot{\mathbf{R}}(t) + [\mathbf{K}_{\text{ge}}(\Omega)]\mathbf{R}(t) + \mathcal{F}_{\text{elas}}^{\text{nl}}(\mathbf{R}(t), [\mathbf{W}]) + \mathcal{F}_{\text{visco}}^{\text{nl}-\text{lin}}(t, \mathbf{R}, [\mathbf{W}]) &= \mathcal{F}_{\text{ext}}(t), \quad (9) \\ \mathbf{U}(t) &= [\mathbf{W}]\mathbf{R}(t). \quad (10) \end{aligned}$$

où $\mathbf{R}(t)$ décrit le vecteur aléatoire des coordonnées généralisées à valeurs dans \mathbb{R}^N . La simulation de Monte Carlo est utilisée pour résoudre le problème de réponse forcée incertain décrit par l'Eq. (9). Les déplacements temporels sont reconstitués à partir de l'Eq. (10). On note $\mathbf{u}_{\text{obs}}^j(t)$ et $\mathbf{U}_{\text{obs}}^j(t)$ l'observation en déplacement associée au degré de liberté transverse situé à l'extrémité de l'aube j , respectivement pour le cas accordé et pour le cas désaccordé. Les observations sont ensuite analysées dans le domaine fréquentiel, et l'on note $\hat{\mathbf{u}}_{\text{obs}}^j(2\pi\nu)$ et $\hat{\mathbf{U}}_{\text{obs}}^j(2\pi\nu)$ les transformées de Fourier correspondantes.

Le facteur d'amplification de l'aube j est décrit à chaque fréquence par la variable aléatoire \mathbf{B}^j :

$$\mathbf{B}^j(2\pi\nu) = \frac{|\hat{\mathbf{U}}_{\text{obs}}^j(2\pi\nu)|}{\max_{v \in \mathbb{B}_{\text{exc}}} (|\hat{\mathbf{u}}_{\text{obs}}(2\pi\nu)|)} \quad , \quad (11)$$

où $|\hat{\mathbf{u}}_{\text{obs}}(2\pi\nu)| = |\hat{\mathbf{u}}_{\text{obs}}^j(2\pi\nu)|, \forall j$ (structure accordée).

Soit $\mathbf{B}(2\pi\nu)$ le vecteur global obtenu par concaténation des observations $\mathbf{B}^j(2\pi\nu)$ associées aux N_p aubes. Cette observation aléatoire permet de caractériser l'état vibratoire global de la roue aubagée désaccordée. Des post-traitements statistiques permettent de visualiser l'étendue des amplifications par construction des intervalles de confiance associés.

Afin d'identifier les effets les plus critiques induits par le désaccordage, le facteur d'amplification dynamique de la roue est défini par la variable aléatoire $B_{\infty,\beta}$ tel que

$$B_{\infty,\beta} = \frac{\max_{v \in \mathbb{B}_\beta} \max_{j=1, \dots, N_p} |\hat{\mathbf{U}}_{\text{obs}}^j(2\pi v)|}{\max_{v \in \mathbb{B}_\beta} (|\hat{\mathbf{u}}_{\text{obs}}(2\pi v)|)} \quad , \quad (12)$$

où $\mathbb{B}_\beta \subset \mathbb{B}_a$ est une bande fréquentielle qui permet de caractériser localement le facteur d'amplification de la roue aubagée. L'estimation des quantiles associés permet d'évaluer la sévérité des amplifications induites par le désaccordage.

3 Exemple numérique d'un modèle de soufflante

3.1 Modèle éléments finis

La roue aubagée décrite par un modèle de soufflante avec des aubes suffisamment élancées est compatible avec la prise en compte des non-linéarités géométriques induites par les grands déplacements. Le modèle éléments finis du secteur de référence est constitué d'éléments finis isoparamétriques tridimensionnels. Le maillage de la roue aubagée se compose de 15 072 éléments hexaédriques à 8 nœuds (HEX8), de 24 912 nœuds, et 73 440 degrés de liberté. Il possède une symétrie cyclique d'ordre $N_p = 24$. La roue aubagée est encastée sur son diamètre intérieur. Les maillages du secteur et de la roue complète sont décrits par la figure 1.

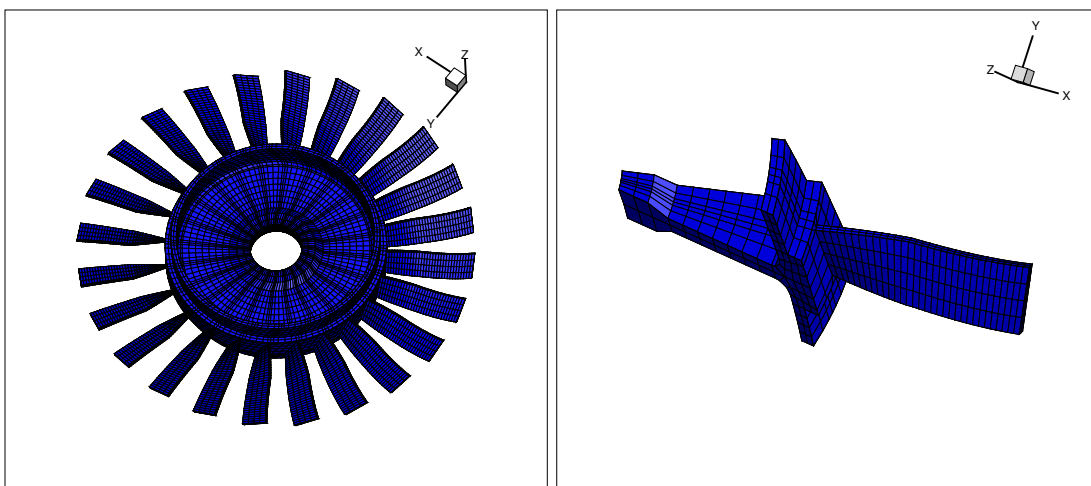


FIGURE 1 – Maillage éléments finis de la roue aubagée et de son secteur de référence

$f_{p,h=0}$ (Hz)	$f_{p,h=1}$ (Hz)	$f_{p,h=2}$ (Hz)
130.51	129.17	129.99
459.25	320.20	460.00
551.35	550.67	660.10
832.98	833.75	839.16
1146.44	1525.73	1666.73

TABLE 1 – Fréquences naturelles pour les nombres d'onde circonférentiels $h = \{0, 1, 2\}$

La table 1 répertorie les fréquences propres du système élastique ($E_{\text{stat}} + E_1$) en fonction du nombre d'onde circonférentiel h pour $h = \{0, 1, 2\}$. On observe des familles modales $h = 0$ et $h = 2$ avec des fréquences propres proches, laissant supposer l'existence de veering (ce qui est vérifié). En particulier, pour $h = 0$ (correspondant à un diamètre nodal de 0), on a les fréquences propres $f_{2,p} = 459.25$ Hz et $f_{3,p} = 551.35$ Hz. Pour $h = 2$ (diamètre nodal de 2), on a les fréquences propres $f_{3,p} = 660.10$ Hz et $f_{4,p} = 839.16$ Hz.

L'analyse modale est effectuée à partir d'un secteur générateur sous l'hypothèse d'élasticité linéaire et de symétrie cyclique. Cette analyse est réalisée avant d'introduire les effets mémoire viscoélastique, les non-linéarités géométriques et le désaccordage. Elle est essentielle pour identifier la distribution des fréquences naturelles et pour définir les bandes d'excitation et d'analyse fréquentielles. Le vecteur des forces d'excitation $\mathbf{F}_{\text{ext}}(t)$ est défini de manière à obtenir une excitation uniforme sur la bande d'excitation fréquentielle pour un nombre d'onde circonférentiel h donné [6]. Le problème de réponse forcée est résolu dans le domaine temporel et une analyse fréquentielle est effectuée à posteriori par la transformée de Fourier discrète de la réponse temporelle.

3.2 Analyse de sensibilité de l'effet mémoire du modèle viscoélastique linéarisé (LROM) sur la réponse forcée

La loi de comportement viscoélastique à mémoire est définie à l'aide d'un modèle de Maxwell à une seule branche, dont les propriétés sont résumées dans la table 2. Le paramètre adimensionnel b permet de caractériser différents temps de relaxation τ_1 . Afin d'analyser la sensibilité de l'effet mémoire du matériau sur le comportement dynamique, trois cas sont considérés : une mémoire courte ($b = 0.4$), une mémoire moyenne ($b = 1$) et une mémoire longue ($b = 10$). Dans ce paragraphe, l'étude est restreinte au cadre déterministe de la viscoélasticité à mémoire linéarisée. Il est à noter qu'un tel calcul pourrait être directement effectué dans le domaine fréquentiel sans algorithme particulier.

ρ (en kg/m^3)	7860
ν	0,25
E_{stat} (en Pa)	$1,6065 \times 10^{11}$
E_1 (en Pa)	$2,8350 \times 10^{10}$
τ_1 (en s)	$2,52 \times 10^{-3} b$

TABLE 2 – Paramètres du modèle généralisé de Maxwell pour une seule branche

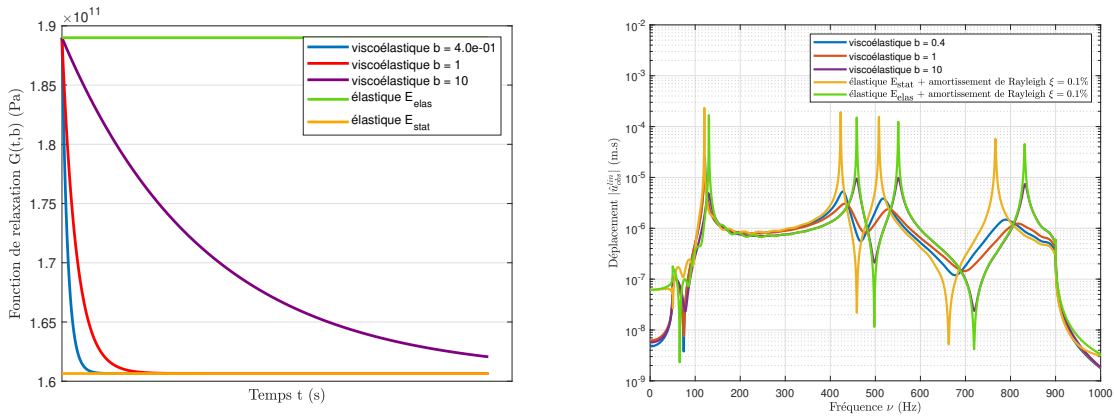


FIGURE 2 – Graphique des fonctions de relaxation en fonction de la mémoire du matériau $t \mapsto G(t, b)$ - graphique de la réponse forcée $\nu \mapsto |\hat{u}_{\text{obs}}^{\text{lin}}(2\pi\nu)|$

La bande d'excitation fréquentielle est définie par $\mathbb{B}_{\text{exc}} = [f_{\text{min}}, f_{\text{max}}] = [50, 900]$ Hz. Une analyse de sensibilité est effectuée en fonction du paramètre b . Il est à noter que la fonction de relaxation $t \mapsto G(t, b)$ représentée dans la figure 2 pour les 3 cas d'analyse se situe entre deux cas limites : le cas élastique ($E = E_{\text{stat}}$) et le cas élastique ($E = E_{\text{stat}} + E_1 = E_{\text{elas}}$). On observe la décroissance plus ou moins rapide de $G(t, b)$ en fonction du temps. Pour les deux cas limites élastiques un amortissement de Rayleigh (non causal) a été rajouté artificiellement. Il est à noter que pour les calculs élastiques, l'amortissement de Rayleigh a été artificiellement introduit pour obtenir une réponse dynamique finie et situer les deux cas limites élastiques. Les cas d'intérêt correspondent aux cas viscoélastiques qui respectent le principe de causalité. Soit $|\hat{u}_{\text{obs}}^{\text{lin}}(2\pi\nu)|$ l'observation correspondant au module de la transformée de Fourier du déplacement temporel en bout d'aube (les pales vibrent à la même amplitude en symétrie cyclique),

La figure 2 montre les graphes $\nu \mapsto |\hat{u}_{\text{obs}}^{\text{lin}}(2\pi\nu)|$ pour différentes valeurs de b . En basses fréquences, l'effet d'amortissement est proportionnel au paramètre b . L'amplitude des pics dans $\mathbb{B}_1 = [0, 250]$ Hz diminue lorsque b augmente. Dans $\mathbb{B}_2 = [400, 850]$ Hz, l'amplitude des pics ne varie plus monotonement. L'amortissement des pics augmente d'abord avec l'effet mémoire jusqu'à un certain seuil. Quand l'effet mémoire augmente davantage, l'amplitude des pics réaugmente à nouveau.

3.3 Comparaison entre la réponse forcée linéarisée et non linéaire (LROM / NLROM)

L'intensité de charge s_0 choisie est telle que $s_0 = 0.3$ N, et permet ainsi d'activer l'effet des non-linéarités géométriques. Le problème de réponse forcée est projeté sur une base de $n_{\text{modes}} = 150$ modes élastiques après une étude de convergence. Chaque graphique correspond à un temps de relaxation différent : en bleu, $b = 0.4$ (court terme) ; en vert, $b = 1$ (moyen terme) ; et en rouge, $b = 10$ (long terme). Les réponses en déplacement obtenues avec le calcul non-linéaire (ligne continue) et le calcul linéarisé (ligne pointillée) sont représentées dans le domaine fréquentiel dans la figure 3.

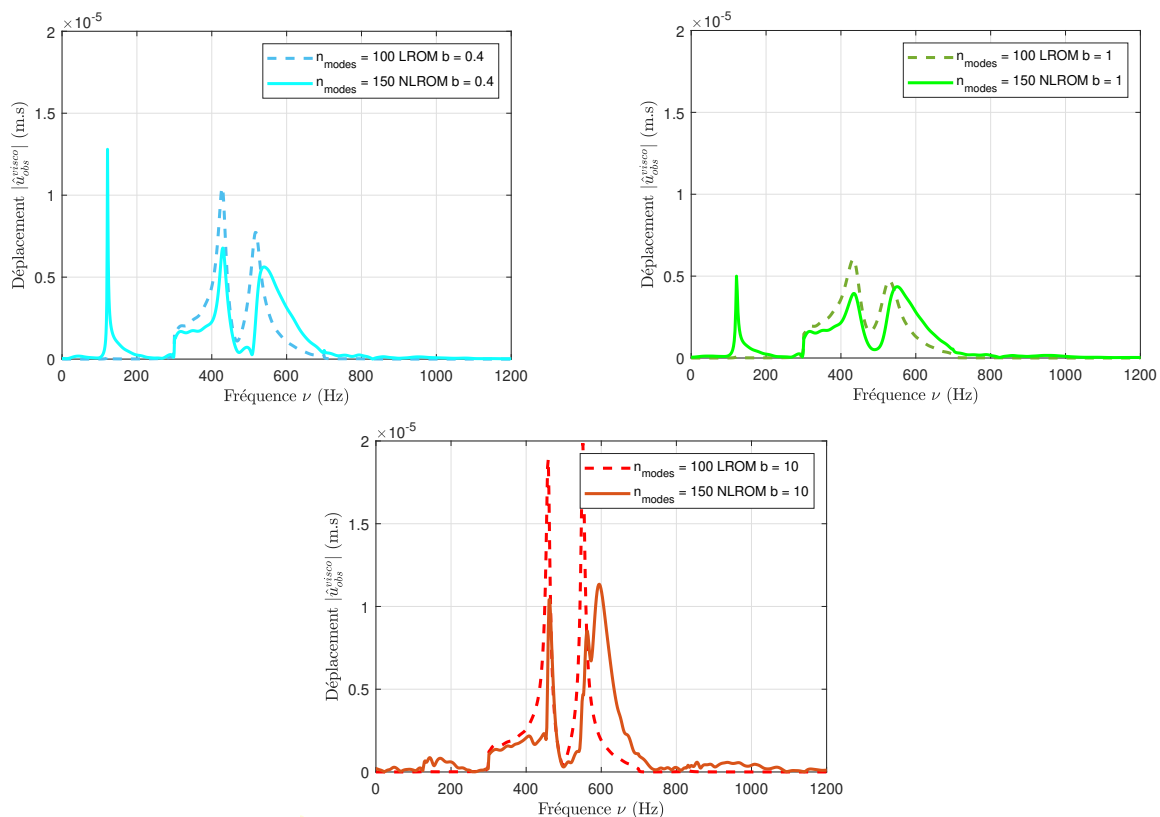


FIGURE 3 – Graphique de la réponse forcée $\nu \mapsto |\hat{u}_{\text{obs}}^{\text{visco}}(2\pi\nu)|$ pour $b = \{0, 4; 1; 10\}$ cas linéarisé - cas non-linéaire

Dans le cadre déterministe de ce paragraphe, on compare l'effet des non-linéarités géométriques sur la réponse viscoélastique à mémoire de la roue aubagée. La bande d'excitation est restreinte, par rapport au cas précédent, à $\mathbb{B}_{\text{exc}} = [300, 700]$ Hz, tandis que la bande d'analyse considérée est $\mathbb{B}_a = [0, 1200]$ Hz. Les calculs numériques sont réalisés selon la stratégie présentée dans la section 1. Comme attendu, la réponse dynamique du problème de viscoélasticité à mémoire linéarisée est observée uniquement dans la bande d'excitation fréquentielle \mathbb{B}_{exc} . En revanche, les non-linéarités géométriques induisent une réponse fortement non linéaire sur l'ensemble de la bande d'analyse $\mathbb{B}_a = [0, 1200]$ Hz. Les transferts d'énergie mettent en évidence que ces non-linéarités géométriques excitent indirectement les composantes basses fréquences situées hors de la bande d'excitation. Par ailleurs, les non-linéarités géométriques montrent un effet de raidissement qui entraîne un léger décalage des pics de résonance vers la droite.

3.4 Analyse de la réponse forcée désaccordée

Dans ce paragraphe, on compare les réponses désaccordées de la roue aubagée en viscoélasticité à mémoire, dans le cas linéarisé et dans le cas non-linéaire géométrique normalisé. Les incertitudes de désaccordage sont introduites au niveau de la matrice de projection modale, et les équations stochastiques données en (9) et (10) sont résolues numériquement. La figure 4 illustre les intervalles de confiance à 99 % de l'observation $v \mapsto \mathbf{B}(2\pi v)$ observée dans la bande d'analyse fréquentielle \mathbb{B}_a pour les deux cas (linéarisé et non-linéaire géométrique).

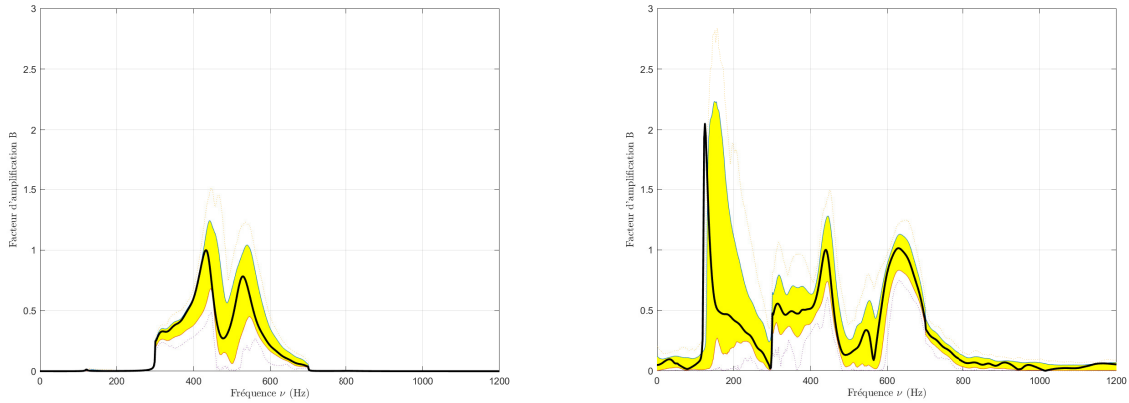


FIGURE 4 – Analyse dynamique du désaccordage en viscoélasticité à mémoire $v \mapsto \mathbf{B}^{\text{visco,lin}}(2\pi v)$ (figure gauche), $v \mapsto \mathbf{B}^{\text{visco,nlin}}(2\pi v)$ (figure droite) : réponse du modèle nominal (ligne noire), valeurs extrêmes de l'échantillon (lignes pointillées), intervalle de confiance (zone jaune)

Il est à noter que la normalisation est effectuée par rapport au pic localisé autour de 450 Hz issu du modèle moyen, aussi bien pour le modèle linéarisé que pour le modèle non-linéaire. Dans le cas du désaccordage linéarisé, deux résonances sont identifiées dans la bande d'excitation $\mathbb{B}_e \subset \mathbb{B}_a$. Dans le cas du désaccordage non-linéaire en grands déplacements, la structure vibre hors de la bande d'excitation. Quatre résonances sont identifiées dans \mathbb{B}_a . On définit ainsi quatre sous-bandes d'analyse : $\mathbb{B}_1 = [100, 300]$ Hz, $\mathbb{B}_2 = [400, 480]$ Hz, $\mathbb{B}_3 = [500, 600]$ Hz et $\mathbb{B}_4 = [600, 700]$ Hz, qui permettent de construire les quantiles associés aux variables aléatoires $B_{\infty,1}$, $B_{\infty,2}$, $B_{\infty,3}$ et $B_{\infty,4}$.

Quantiles	LRM	LRM	LRM	NLRM	NLRM	NLRM
	50%	75%	95%	50%	75%	95%
$B_{\infty,1}$	X	X	X	1.0505	1.1427	1.2579
$B_{\infty,2}$	1.1962	1.2466	1.3275	1.2188	1.2776	1.3394
$B_{\infty,3}$	1.2854	1.3423	1.4394	1.4607	1.6437	1.8785
$B_{\infty,4}$	X	X	X	1.0607	1.0891	1.1433

TABLE 3 – Quantiles des facteurs d'amplification dynamique de la roue aubagée désaccordée

Les facteurs d'amplification locaux sont quantifiés et récapitulés dans la table 3. Il apparaît que le désaccordage non-linéaire induit une amplification hors de la bande d'excitation, qui demeure non négligeable. De manière générale, les niveaux d'amplification associés aux effets de désaccordage restent modérés.

4 Conclusion

Ce travail méthodologique propose une étude du désaccordage d'une roue aubagée en grands déplacements en intégrant une loi de comportement viscoélastique à mémoire. L'approche développée repose sur une formulation probabiliste directement intégrée dans la base de réduction, garantissant à la fois la causalité du modèle et la faisabilité numérique par réduction de modèle. Les simulations numériques,

menées sur un modèle élément fini représentant un fan (aubes entrant dans un domaine non-linéaire de vibration), permettent d'analyser les effets du désaccordage involontaire sur la réponse. Les facteurs d'amplification obtenus montrent un niveau de désaccordage modéré sur la réponse linéarisée et sur la réponse non-linéaire.

Références

- [1] B. D. Coleman and W. Noll. Foundations of linear viscoelasticity. *Rev. Mod. Phys.*, 33(2) :239–249, 1961.
- [2] C. Desceliers and C. Soize. Non-linear viscoelastodynamic equations of three-dimensional rotating structures in finite displacement and finite element discretization. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39(3) :343–368, 2004. <https://hal.science/hal-00686206>.
- [3] D.S. Whitehead. Effect of mistuning on the vibration of turbo-machine blades induced by wakes. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 8(1) :15–21, 1966.
- [4] D. J. Ewins. The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks. *Journal of Sound and Vibration*, 9(1) :65–79, 1969.
- [5] C. Soize and C. Farhat. A nonparametric probabilistic approach for quantifying uncertainties in low-dimensional and high-dimensional nonlinear models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109(6) :837–888, 2017.
- [6] E. Capiiez-Lernout and C. Soize. Nonlinear stochastic dynamics of detuned bladed-disks with uncertain mistuning and detuning optimization using a probabilistic machine learning tool. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 143 :104023, 2022.