

Description dynamique de l'amorçage de fissures dans les matériaux fragiles sous chargement quasi-statique.

A. Doitrand¹, R. Estevez², F. Bonnel³

¹ Univ Lyon, INSA Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS UMR5510, MATEIS, F-69621 Villeurbanne, France, aurelien.doitrand@insa-lyon.fr

² Univ. Grenoble Alpes, Grenoble INP, CNRS UMR5266, SIMAP, F-38000 Grenoble, France, rafaël.estevez@grenoble-inp.fr

³ Univ. Grenoble Alpes, Grenoble INP, CMTC, F-38000 Grenoble, France, francois.bonnel@grenoble-inp.fr

Résumé — Le profil de vitesse de fissuration lors de l'amorçage de fissures sous chargement quasi-statique est identifié via une implémentation dynamique du critère couplé. La méthode proposée repose sur l'ajout d'une condition de continuité de la longueur et de la vitesse de fissuration entre la fin du stade d'amorçage et le début de la propagation ultérieure de la fissure. Cela définit (i) une longueur et (ii) une vitesse de fissure minimale que la fissure doit atteindre à l'amorçage. L'approche proposée permet alors d'estimer la validité de l'application quasi-statique du critère couplé.

Mots clés — Critère couplé, amorçage de fissures, propagation dynamique.

1 Introduction

La propagation dynamique de fissures sous chargement quasi-statique peut être étudiée à l'aide de la mécanique linéaire élastique de la de rupture (MLER), à partir de l'équilibre entre le taux de restitution d'énergie (TRE) dynamique et du TRE critique du matériau. Cela étend l'approche de Griffith [1] pour prendre en compte la vitesse de propagation des fissures et les effets inertiels associés et donne les variations de la vitesse et de la longueur de la fissure en fonction du temps [2, 3]. La caractérisation expérimentale de la propagation dynamique de fissures sous un chargement quasi-statique peut être réalisée en chargeant d'abord un échantillon jusqu'à un niveau donné avant d'introduire une fissure dans l'échantillon préchargé [4, 5]. Ce type d'expériences permet d'identifier le TRE critique du matériau en se basant sur la connaissance du TRE et sur les mesures de la vitesse de propagation de la fissure [2, 3, 6]. Une telle configuration ne pourrait pas être obtenue avec le chargement monotone d'un échantillon pré-fissuré, de sorte que la fissure peut être considérée comme « surchargée ». La fissure se propage alors de manière dynamique afin de maintenir l'équilibre d'énergie, et transforme une partie de l'énergie disponible sous forme d'énergie cinétique.

La MLER est fondée sur l'hypothèse de l'existence d'une fissure, et n'est donc pas applicable à l'étude de l'amorçage de fissures. Dans un cadre strictement Griffithien, une fissure ne peut pas amorcer de manière infinitésimale, mais doit franchir une barrière d'énergie qui définit une longueur minimum de fissure susceptible de se former spontanément [7]. L'amorçage de fissures fragiles peut être étudiée à l'aide du critère couplé (CC) [8, 9], qui combine un critère en contrainte et un critère en énergie et permet d'étudier une grande variété de problèmes d'amorçage de fissures [10, 11]. Il n'existe cependant que quelques configurations pour lesquelles l'équilibre quasi-statique de l'énergie est strictement satisfait au moment de l'amorçage [12]. Cela peut se produire lorsque le TRE est une fonction non monotone de la longueur de la fissure [11, 12, 13] ou dans le cas spécifique de singularités fortes, pour lesquelles le TRE est une fonction décroissante de la longueur de la fissure [14, 15]. Dans les autres configurations, il est donc essentiel de prendre en compte une description dynamique qui tienne compte de la variation d'énergie cinétique due à l'amorçage de la fissure [16]. Un élément clé nécessaire pour établir une telle description est le profil de vitesse de la fissure lors de son amorçage, qui a une influence de premier ordre sur le chargement à l'amorçage [16, 17, 18].

La configuration de fissures à l'amorçage peut correspondre à un cas où la fissure est « surchargée », ce qui signifie qu'une propagation instable de la fissure se produit immédiatement après l'amorçage

[13, 19]. La phase de propagation qui se produit immédiatement après l'amorçage peut donc être étudiée à l'aide de la MLER. La fin de la phase d'amorçage coïncide avec le début de la propagation ultérieure de la fissure. Il en résulte une condition de continuité de la longueur et de la vitesse de la fissure entre ces deux phases. Ce travail vise donc à déterminer le profil de vitesse lors de l'amorçage de la fissure en combinant (i) l'étude de l'amorçage de la fissure basée sur le CC et (ii) la propagation ultérieure de la fissure basée sur la MLER. La méthodologie est présentée dans la Section 2 et illustrée par le cas d'étude de l'amorçage d'une fissure dans un milieu infini soumis à une traction uniforme (Section 3).

2 Continuité de la longueur de et la vitesse de fissure

L'exemple étudié est l'amorçage d'une fissure de longueur $2\ell_i$ dans un milieu homogène isotrope et élastique, soumis à une contrainte de traction σ_∞ (Fig. 1).

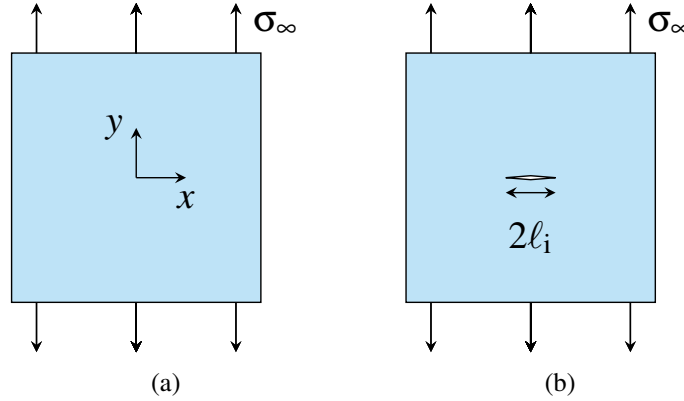


FIGURE 1 – Configurations d'étude : (a) Milieu infini soumis à une contrainte de traction (σ_∞) dans laquelle (b) une fissure de longueur $2\ell_i$ amorce.

L'objectif est de déterminer

- Le niveau de contrainte à l'amorçage σ_∞ ,
- La longueur d'amorçage ℓ_i ,
- Le profil de longueur $\ell(t)$ ou de vitesse de fissuration $v(t) = d\ell/dt$.

On suppose que l'amorçage de fissure intervient dans un intervalle de temps Δt_c à partir du temps $t = t_0$ selon un profil de vitesse caractérisé par l'exposant α et la vitesse en fin d'amorçage v_c

$$v(t) = v_c \left(\frac{t - t_0}{t_c - t_0} \right)^\alpha, \quad (1)$$

qui nous donne la relation

$$\Delta t_c = \frac{\alpha + 1}{v_c} \ell_i. \quad (2)$$

Les paramètres v_c et α décrivant le profil de vitesse de fissures dépendent a priori du matériau et de la géométrie étudiée. Sous chargement quasi-statique, le temps de début d'amorçage $t_0 = 0$ s peut être arbitrairement choisi pour simplifier les calculs. Le choix de ce profil de vitesse est arbitraire mais permet de couvrir une large gamme de variations monotones de vitesses durant l'amorçage. Il peut être déterminé expérimentalement à partir d'essais de fissuration instrumentés avec une caméra rapide. La méthode proposée consiste à combiner les conditions en contrainte et en énergie du CC (Section 2.1) avec une condition de propagation dynamique de fissure (Section 2.2) pour déterminer le profil de vitesse de fissure à l'amorçage (Section 2.3).

2.1 Amorçage de fissures - Le critère couplé

Le CC définit l'amorçage d'une fissure dès que les conditions de contrainte en en énergie sont remplies [8, 9]. La condition de contrainte compare la contrainte normale à la surface de fissure avant amorçage à la résistance en traction du matériau.

$$\sigma_{yy}(x, \sigma_\infty) \geq \sigma_c \quad \forall |x| < \ell_i. \quad (3)$$

La condition en énergie découle du principe de conservation de l'énergie entre les états avant et après l'amorçage de la fissure.

$$\Delta W_k + \Delta W_{el} + \mathcal{G}_c \ell = \Delta W_{ext}, \quad (4)$$

où $\mathcal{G}_c \ell$ est l'énergie de création de la surface de fissure, ℓ étant la longueur de la fissure et \mathcal{G}_c le TRE critique du matériau. ΔW_{ext} désigne la variation du travail des forces extérieures, ΔW_k la variation d'énergie cinétique, ΔW_{el} la variation d'énergie de déformation élastique. Ces quantités sont exprimées par unité d'épaisseur, car nous considérons un problème en 2D. La condition en énergie définit le TRE incrémental (TREI) comme

$$\mathcal{G}_{inc}^{DYN}(\sigma_\infty, \ell, v) = \frac{\Delta W_{ext}(\sigma_\infty, \ell, v) - \Delta W_{el}(\sigma_\infty, \ell, v) - \Delta W_k(\sigma_\infty, \ell, v)}{\ell} \geq \mathcal{G}_c. \quad (5)$$

Le TREI correspond donc à la variation d'énergie normalisée par l'incrément de surface de fissure. Il est obtenu à partir d'un bilan d'énergie pour un incrément fini de fissure, et est donc adapté à traiter des cas d'amorçage de fissures. C'est une version incrémentale du TRE (ce dernier étant obtenu pour un incrément infinitésimal de fissure). Le TREI s'exprime en fonction du TRE comme

$$\mathcal{G}_{inc}^{DYN}(\sigma_\infty, \ell, v) = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \mathcal{G}^{DYN}(\sigma_\infty, \ell, v) d\ell. \quad (6)$$

Dans la suite, nous supposons que \mathcal{G}_c est une constante, bien qu'un TRE critique dépendant de la vitesse de fissuration puisse également être envisagé [5]. Pour un profil de vitesse de fissuration donné $v(t)$, la résolution du CC consiste à déterminer la contrainte appliquée σ_∞ et la longueur de fissure ℓ_i pour lesquelles les conditions en contrainte et en énergie sont satisfaites.

2.2 Propagation dynamique de fissures

La propagation dynamique d'une fissure à une vitesse donnée dissipe une partie de l'énergie disponible en énergie cinétique, de sorte que plus la vitesse de la fissure est élevée, plus le TRE dynamique \mathcal{G}^{DYN} est faible. Par exemple, le TRE dynamique d'une fissure de longueur ℓ se propageant à une vitesse v dans un milieu infini soumis à une contrainte de traction σ_∞ peut être exprimé comme une fonction du TRE quasi-statique \mathcal{G}^{QS} et d'une fonction $g(v)$ comme suit [6, 20]

$$\mathcal{G}^{DYN}(\sigma_\infty, \ell, v) = g(v) \mathcal{G}^{QS}(\sigma_\infty, \ell) \approx (1 - v/v_{lim}) \mathcal{G}^{QS}(\sigma_\infty, \ell), \quad (7)$$

où v_{lim} est la vitesse maximale de fissuration qui peut être égale à la vitesse des ondes de Rayleigh c_R [6, 20, 3], inférieure à c_R [2] ou même la dépasser en présence de non-linéarités géométriques [21]. On peut noter que la relation entre \mathcal{G}^{DYN} et \mathcal{G}^{QS} n'est pas forcément une fonction linéaire de la vitesse de fissure normalisée selon la géométrie étudiée [22, 23, 24] et peut être identifiée à partir de simulations numérique de la propagation dynamique de la fissure [25, 16, 26, 5]. La condition de propagation dynamique

$$\mathcal{G}^{DYN}(\sigma_\infty, \ell, v) = \mathcal{G}_c \quad (8)$$

fournit une équation différentielle à résoudre pour déterminer le profil de vitesse de propagation d'une fissure. Par exemple, le TRE pour une fissure de longueur 2ℓ dans un milieu infini soumis à une traction est donné par $\mathcal{G}^{QS}(\sigma_\infty, 2\ell) = \pi \frac{1-v^2}{E} \sigma_\infty^2 \ell$, ce qui donne à partir des Eqs. (7) et (8)

$$\pi \frac{1-v^2}{E} \sigma_\infty^2 \ell(t) (1 - v(t)/v_{lim}) = \mathcal{G}_c. \quad (9)$$

Pour une contrainte appliquée σ_∞ , la vitesse de propagation de la fissure augmente de façon monotone jusqu'à la vitesse maximale v_{lim} à mesure que la longueur de la fissure augmente afin de maintenir la condition d'équilibre d'énergie donnée dans l'Eq. (9). La condition de propagation dynamique de la fissure établit donc une relation entre la contrainte appliquée, la longueur et la vitesse de la fissure.

2.3 Combinaison des trois conditions

L'aspect central de l'approche proposée consiste à garantir la continuité de la longueur et de la vitesse de la fissure entre la fin de l'amorçage et le début de la propagation ultérieure. Cette condition garantit l'équilibre d'énergie à tout instant. L'amorçage de la fissure nécessite que trois conditions soient remplies. En plus des conditions en contrainte (Eq. (3)) et en énergie (Eq. (5)) du CC, la troisième condition est liée à la propagation dynamique de la fissure après l'amorçage (Eq. (8)). Cette condition s'applique donc à la configuration de la fissure à la fin de l'amorçage : contrainte appliquée σ_∞ , longueur de fissure ℓ_i et vitesse de fissure v_c . La détermination du profil de vitesse de fissure d'amorçage est menée selon les étapes suivantes

- la condition de contrainte (Eq. (3)) fournit, pour une longueur de fissure d'amorçage ℓ_i , la contrainte minimale à appliquer σ_∞ ;
- ensuite, la condition de propagation (Eq. (8)) fournit, pour ℓ_i et σ_∞ donnés, la vitesse de fissuration à la fin de l'amorçage v_c ;
- enfin, la condition en énergie (Eq. (5)) appliquée pour ℓ_i , σ_∞ et v_c donnés, permet de déterminer l'existence d'un profil de vitesse de fissure d'amorçage admissible $v(t)$ et l'exposant correspondant α .

3 Amorçage de fissures dans un milieu infini en traction

L'approche proposée est illustrée dans le cas de l'amorçage d'une fissure dans un milieu infini (matériau isotrope, linéaire élastique, module de Young E , coefficient de Poisson ν) soumise à une contrainte de traction σ_∞ (Fig. 1). L'objectif est de déterminer la contrainte appliquée et la longueur de fissure à l'amorçage, ainsi que le profil de vitesse de fissuration pendant l'amorçage. Dans des conditions de propagation quasi-statiques, le TRE d'une fissure de longueur 2ℓ est donné par

$$\mathcal{G}^{\text{QS}}(\sigma_\infty, 2\ell) = \pi \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_\infty^2 \ell. \quad (10)$$

LE TRE dynamique s'exprime en fonction de \mathcal{G}^{QS} et de la vitesse de la fissure comme

$$\mathcal{G}^{\text{DYN}}(\sigma_\infty, 2\ell, v) \approx \left(1 - \frac{v(t)}{v_{\text{lim}}}\right) \mathcal{G}^{\text{QS}}(\sigma_\infty, 2\ell) = \pi \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_\infty^2 \ell \left(1 - \frac{v(t)}{v_{\text{lim}}}\right). \quad (11)$$

L'amorçage d'une fissure requiert que soient remplis (i) le critère de contrainte, (ii) le critère en énergie et (iii) la continuité de la longueur et de la vitesse de fissuration entre la fin de l'amorçage et le début de la propagation post-amorçage.

3.1 Critère en contrainte

Avant l'amorçage, la contrainte de traction dans le milieu est constante et égale à la contrainte appliquée σ_∞ . Quelle que soit la longueur de la fissure d'amorçage, la contrainte appliquée doit donc être moins égale à σ_c pour satisfaire au critère de contrainte

$$\sigma_\infty(\ell_i) \geq \sigma_c. \quad (12)$$

3.2 Condition de propagation

L'étape suivante consiste à déterminer la vitesse de fissuration v_c à la fin de l'amorçage (*i.e.*, $t = t_c$). A $t = t_c$, la propagation de la fissure s'effectue à partir d'une longueur $2\ell_i$, avec une vitesse de pointe de fissure $v_c = (\alpha + 1)\ell_i/\Delta t_c$. La condition de propagation d'une telle fissure est $\mathcal{G}^{\text{DYN}}(\sigma_\infty, 2\ell_i, v_c) = \mathcal{G}_c$, qui donne, en se basant sur l'Eq. (11)

$$\pi \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_\infty^2 \ell_i \left(1 - \frac{v_c}{v_{\text{lim}}}\right) = \mathcal{G}_c. \quad (13)$$

la vitesse minimale de fissuration à la fin de l'amorçage peut donc être exprimée en fonction de la longueur d'Irwin $\ell_{\text{mat}} = \frac{E G_c}{(1-\nu^2)\sigma_c^2}$ comme suit

$$\frac{v_c}{v_{\text{lim}}} \geq 1 - \frac{\ell_{\text{mat}}}{\pi \ell_i}. \quad (14)$$

Cette condition fournit une limite inférieure pour la longueur de fissure à l'amorçage, donnée par $\ell_i \geq \ell_{\text{mat}}/\pi$. Celle-ci correspond à une fissure amorçant de manière quasi-statique ($v_c = 0$), sans dissipation d'énergie due aux effets inertiels.

3.3 Critère en énergie

Le critère en énergie permet de déterminer les configurations pour lesquelles l'équilibre d'énergie correspondant à l'amorçage de la fissure est satisfait. La condition en énergie du CC s'écrit $\mathcal{G}_{\text{inc}}^{\text{DYN}}(\sigma_\infty, 2\ell_i, \Delta t_c) = \mathcal{G}_c$ où

$$\mathcal{G}_{\text{inc}}^{\text{DYN}}(\sigma_\infty, 2\ell_i, \Delta t_c) = \frac{1}{\ell_i} \int_0^{\ell_i} \mathcal{G}^{\text{DYN}}(\sigma_\infty, 2\ell, v) d\ell = \frac{1}{\ell_i} \int_0^{\ell_i} \pi \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_\infty^2 \ell \left(1 - \frac{v}{v_{\text{lim}}}\right) d\ell, \quad (15)$$

En substituant $v = d\ell/dt$ par l'expression donnée dans Eq. (1), et avec la condition de contrainte $\sigma_\infty = \sigma_c$, on obtient

$$\mathcal{G}_{\text{inc}}^{\text{DYN}}(\sigma_c, 2\ell_i, \Delta t_c) = \frac{\pi(1-\nu^2)\sigma_c^2 \Delta t_c v_c (v_{\text{lim}}(3\alpha+2) - 2v_c(\alpha+1))}{E 2v_{\text{lim}}(\alpha+1)(3\alpha+2)}. \quad (16)$$

Cela permet d'obtenir l'exposant du profil de vitesse α en fonction de la longueur de fissure initiale ℓ_i , en utilisant Eqs. (2) et (14).

$$\alpha = \frac{2(1 - v_c/v_{\text{lim}})}{4v_c/v_{\text{lim}} - 3} = \frac{2}{\pi \ell_i/\ell_{\text{mat}} - 4}. \quad (17)$$

Cette condition définit une limite inférieure pour la longueur de fissure d'amorçage $\ell_i \geq \frac{4}{\pi} \ell_{\text{mat}}$ qui est supérieure à la longueur de fissure initiale quasi-statique ($\frac{1}{\pi} \ell_{\text{mat}}$) déterminée par la condition de propagation donnée dans la Section 3.2. La variation de l'exposant α dans le profil de vitesse avec la longueur normalisée de la fissure d'amorçage est présentée dans la Fig. 2a. Elle diminue avec l'augmentation de la longueur de la fissure d'amorçage et tend vers l'infini lorsque la longueur de la fissure d'amorçage tend vers sa limite inférieure définie par Eq. (17). On peut en réalité montrer que l'exposant α a une influence relativement limitée sur les profils de longueurs de vitesse obtenus [27]. Sa détermination est en revanche cruciale car elle permet de définir la borne inférieure de longueurs de fissures admissibles (Fig. 2a), et ainsi la vitesse minimale que la fissure doit atteindre à la fin de l'amorçage (Fig. 2b).

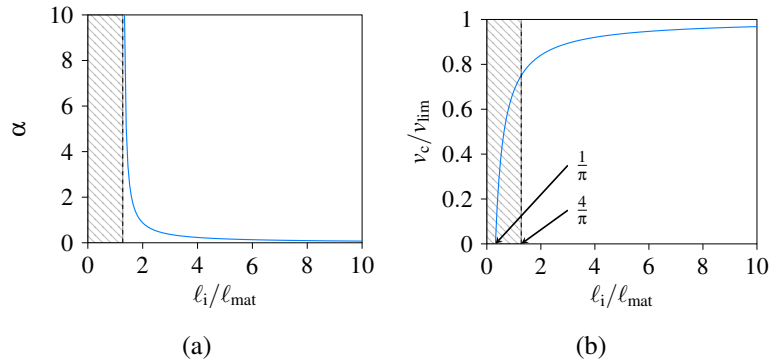


FIGURE 2 – (a) Exposant du profil de vitesse en fonction de la longueur normalisée de la fissure initiale et (b-c) Vitesse à la fin de l'amorçage de la fissure v_c en fonction (b) de la longueur normalisée de la fissure initiale. Les zones hachurées correspondent aux longueurs de fissure pour lesquelles l'amorçage de la fissure ne peut pas se produire car l'équilibre d'énergie n'est pas respecté.

La Fig. 2b montre la variation de la vitesse normalisée de la fissure à la fin de l'amorçage en fonction de la longueur normalisée de la fissure d'amorçage (voir Eq. (14)). La zone hachurée dans la Fig. 2b correspond à des longueurs inférieures à $\frac{4}{\pi} \ell_{\text{mat}}$ pour lesquelles le critère en énergie n'est pas rempli. Le respect de l'équilibre d'énergie lors de l'amorçage implique donc la définition d'une vitesse minimale $v_c \geq \frac{3}{4} v_{\text{lim}}$ que la fissure doit atteindre à la fin de l'amorçage.

3.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux

Des essais de traction monotone sont réalisés sur sept échantillons de papier laser TecnoPro de 80 g/m^2 à l'aide d'une machine d'essai Tilnius (vitesse de déplacement 1 mm/min , cellule de force de 500 N). Les dimensions des échantillons sont de $80 \pm 1 \text{ mm}$ (longueur) \times $30 \pm 1 \text{ mm}$ (largeur) \times $109 \pm 3 \mu\text{m}$ (épaisseur). Les propriétés du matériau dans la direction testée sont les suivantes : $E = 2000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$, $G_c = 4.8 \text{ kJ/m}^2$ et $\sigma_c = 42.5 \text{ MPa}$. L'amorçage et la propagation de fissures sont enregistrés par une caméra Phantom-T4040 avec une résolution de $512 \text{ pixels} \times 320 \text{ pixels}$ à $92538 \text{ images par seconde}$ (Fig. 3a). Le trajet de la fissure est plutôt sinueux que rectiligne, ce qui est

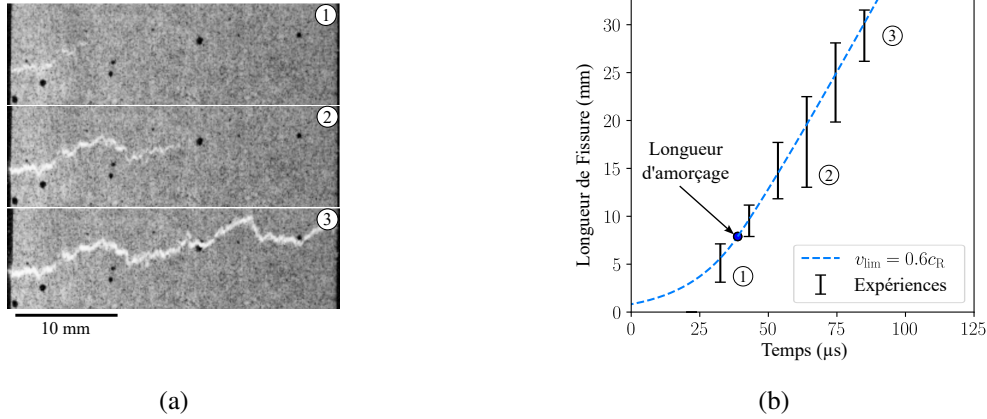


FIGURE 3 – (a) Observations de l'amorçage et de la propagation d'une fissure dans un échantillon de papier soumis à un chargement de traction et (b) variation de la longueur de la fissure en fonction du temps mesurée expérimentalement (les barres d'erreur correspondent aux longueurs minimales et maximales mesurées pour les sept échantillons testés) et obtenue avec l'approche proposée pour $v_{\text{lim}} = 0.6c_R$.

dû à l'hétérogénéité locale du matériau. Ces déviations locales de la fissure donne une longueur effective d'environ 1.6 fois la largeur de l'échantillon. La longueur de fissure considérée dans le modèle (sans tortuosité) varie entre 0 et la largeur de l'échantillon. Si la fissure tortueuse peut atteindre une vitesse maximale, par exemple c_R , la vitesse maximale d'une fissure droite équivalente est donc $c_R/1.6 \approx 0.6c_R$. La Fig. 3b montre la variation de la longueur de la fissure mesurée expérimentalement et obtenue avec l'approche proposée pour une vitesse limite $v_{\text{lim}} = 0.6c_R$. La courbe en pointillée suit le profil de vitesse donné en Eq. (1) jusqu'à la longueur d'amorçage. La longueur de fissure d'amorçage prévue atteint environ 8 mm en $39 \mu\text{s}$, ce qui est légèrement supérieur à la longueur de fissure mesurée sur l'image #1 dans Fig. 3a. A la fin de l'amorçage, la fissure atteint une vitesse de $0.75v_{\text{lim}}$ (voir Fig. 2b), soit $0.45c_R$, puis accélère pour atteindre sa vitesse limite durant la phase de propagation suivant l'amorçage (pour $t > 39 \mu\text{s}$). Le profil de vitesse de fissure prévu par le modèle semble compatible avec les observations expérimentales.

4 Conclusion

Le fait de garantir la continuité de la longueur et de la vitesse de la fissure entre la fin de l'amorçage et le début de la propagation ultérieure de la fissure définit

- Une longueur minimale admissible de la fissure d'amorçage qui correspond à celle obtenue dans des conditions quasi-statiques (c'est-à-dire pour une vitesse de fissure suffisamment faible).
- Une vitesse minimale que la fissure doit atteindre à la fin de l'amorçage. Cette vitesse minimale de fissure dépend de la géométrie. Elle est de $0.75c_R$ pour un milieu infini sans fissure initiale.

Au delà de la détermination du profil de vitesse de fissuration lors de l'amorçage, un intérêt de l'approche proposée est la possibilité d'estimer si les effets inertiels doivent être pris en compte ou non dans l'analyse de la phase d'amorçage de la fissure. En d'autres termes, elle permet d'évaluer la validité de l'application quasi-statique du CC.

Références

- [1] AA. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 221(582-593) :163–198, 1921.
- [2] J. Fineberg and M. Marder. Instability in dynamic fracture. *Physics Reports*, 313(1) :1–108, 1999.
- [3] T. Goldman, A. Livne, and J. Fineberg. Acquisition of inertia by a moving crack. *Physical review letters*, 104 :114301, 2010.
- [4] C. Fond and R. Schirrer. Fracture Surface Energy Measurement at High Crack Speed Using a Strip Specimen : Application to Rubber Toughened PMMA. *Journal de Physique IV Proceedings*, 07(C3) :C3–969–C3–974, 1997.
- [5] V. Fournier, JB. Kopp, and J. Girardot. Revisiting dynamic fracture in pmma : The interplay between local and global methods. *International Journal of Fracture*, 249 :47, 2025.
- [6] KB Broberg. The propagation of a brittle crack. *Arkiv för Fysik*, 18(2) :159–192, 1960.
- [7] JJ. Marigo. Initiation of cracks in Griffith’s theory : An argument of continuity in favor of global minimization. *Journal of Nonlinear Science*, 20(6) :831–868, 2010.
- [8] Dominique Leguillon. A criterion for crack nucleation at a notch in homogeneous materials. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, 329(2) :97–102, 2001.
- [9] D. Leguillon. Strength or toughness ? a criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21(1) :61–72, 2002.
- [10] P. Weißgraeber, D. Leguillon, and W. Becker. A review of finite fracture mechanics : crack initiation at singular and non-singular stress raisers. *Archive Appl. Mech.*, 86(1-2) :375–401, 2016.
- [11] A. Doitrand, T. Duminy, H. Girard, and X. Chen. A review of the coupled criterion. *Journal of Theoretical, Computational and Applied Mechanics*, 2024.
- [12] L. Dormieux, E. Lemarchand, L. Jeannin, and D. Kondo. Some remarks concerning the nucleation and initiation lengths of fractures in brittle materials in the light of Dominique Leguillon’s energy criterion. *Comptes Rendus. Mécanique*, 353(G1) :601–614, 2025.
- [13] P. Weißgraeber, S. Hell, and W. Becker. Crack nucleation in negative geometries. *Engineering Fracture Mechanics*, 168 :93–104, 2016. Modeling of fracture and damage in composite materials.
- [14] D. Leguillon, C. Lacroix, and E. Martin. Interface debonding ahead of a primary crack. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(10) :2137–2161, 2000.
- [15] M.T. Aranda and D. Leguillon. Prediction of failure of hybrid composites with ultra-thin carbon/epoxy layers using the coupled criterion. *Engineering Fracture Mechanics*, 281 :109053, 2023.
- [16] A. Doitrand, G. Molnár, D. Leguillon, E. Martin, and N. Carrère. Dynamic crack initiation assessment with the coupled criterion. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 93 :104483, 2022.
- [17] X. Chen, A. Doitrand, N. Godin, and C. Fusco. Crack initiation in PMMA plates with circular holes considering kinetic energy and nonlinear elastic material behavior. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 124 :103783, 2023.
- [18] X. Chen, A. Doitrand, N. Godin, and C. Fusco. On the importance of the cracking process description for dynamic crack initiation simulation. *Engineering Fracture Mechanics*, 310 :110473, 2024.
- [19] A. Doitrand, R. Estevez, and D. Leguillon. Experimental characterization and numerical modeling of crack initiation in rhombus hole PMMA specimens under compression. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 76 :290–299, 2019.
- [20] L.B. Freund. *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge Monographs on Mechanics. Cambridge university press, 1990.
- [21] I. Svetlizky, G. Albertini, G. Cohen, DS. Kammer, and J. Fineberg. Dynamic fields at the tip of sub-rayleigh and supershear frictional rupture fronts. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 137 :103826, 2020.
- [22] O. Obrezanova, AB. Movchan, and JR. Willis. Dynamic stability of a propagating crack. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(12) :2637–2668, 2002.
- [23] LI. Slepian. Dynamic crack growth under rayleigh wave. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58(5) :636–655, 2010.
- [24] JB. Kopp, J. Schmittbuhl, O. Noel, J. Lin, and C. Fond. Fluctuations of the dynamic fracture energy values related to the amount of created fracture surface. *Engineering Fracture Mechanics*, 126 :178–189, 2014.
- [25] B. Croquelois, J. B. Kopp, J. Girardot, P. Tchoreloff, and V. Mazel. Dynamic fracture analysis in Brazilian test : application to pharmaceutical tablets. *International Journal of Fracture*, 229(1) :113–124, 2021.

- [26] Q. Henry, JB. Kopp, L. Le Barbenchon, J. Girardot, B. Lukic, A. Cohen, A. Coscolluela, and P. Viot. In situ characterisation of dynamic fracture in Al_2O_3 using ultra-fast x-ray phase contrast radioscopy : effects of porosity and crack speed. *International Journal of Fracture*, 249 :11, 2025.
- [27] A. Doitrand, R. Estevez, and F. Bonnel. Brittle crack initiation seen as a dynamic crack propagation phenomenon. Preprint, available at SSRN, 2026.