

Modélisation 3D de la rupture ductile par la méthode des éléments finis étendus en dynamique explicite

L. Scheidt^{1,2}, J.-P. Crété², P. Longère¹

¹ ISAE-SUPAERO, Univ Toulouse, INSA, IMT Mines Albi, CNRS, Institut Clément Ader, Toulouse, France

² ISAE-SUPMECA, Laboratoire Euler, Saint Ouen Sur Seine, France

louis.scheidt@isae-supero.fr; jean-philippe.crete@isae-supmeca.fr; patrice.longere@isae-supero.fr

Résumé — Ce travail vise à développer une méthodologie numérique permettant de coupler la variante de la base décalée de la méthode des éléments finis étendus (XFEM) avec une intégration temporelle purement explicite. On s'intéresse plus particulièrement ici à reproduire l'endommagement et la rupture ductile de structures métalliques dans le contexte des grandes transformations. La méthodologie est appliquée à des structures typiques de laboratoire et montre de bons résultats. A terme, l'objectif est de pouvoir résoudre des problèmes industriels complexes de grandes dimensions (aéronefs, bâtiments de surface, ...) dans un contexte de dynamique transitoire (chocs, explosions, impacts, ...).

Mots clés — XFEM, grandes transformations, dynamique, intégration temporelle explicite, rupture ductile.

1 Introduction

Ce travail présente une extension à des problèmes de dynamique transitoire de la méthodologie unifiée tri-dimensionnelle développée dans [5, 6] et basée sur la méthode des éléments finis étendus (XFEM). La première étape, qui est celle présentée dans ce travail, est le développement de la méthodologie afin de permettre le couplage entre la variante de la base décalée de la XFEM (SBXFEM) et un schéma d'intégration temporelle purement explicite. On s'intéresse notamment à la méthode de diagonalisation de la matrice de masse enrichie (au sens de la SBXFEM), procédure qui n'est pas aussi triviale que dans le cas de la méthode des éléments finis standard. Une méthode originale de diagonalisation de la matrice de masse cohérente est donc proposée et étudiée.

Dans la Sec.2, le processus de rupture ductile retenu dans cette étude ainsi que les choix de modélisation réalisés sont présentés. Le traitement numérique de la discontinuité forte (macro-fissure) et la technique de diagonalisation de la matrice de masse associée pour traiter le problème avec un schéma de résolution temporelle explicite sont présentés dans la Sec.3. Finalement, dans la Sec.4, un cas d'application 1D de la technique de diagonalisation de la matrice de masse enrichie proposée est présenté, avant d'appliquer la méthodologie numérique complète à un essai sur une éprouvette de type CT.

2 Description du comportement du matériau

2.1 Scénario de l'endommagement et de la rupture ductile

Il est généralement admis que la rupture ductile, processus intervenant plus ou moins tardivement après le début de la plastification du matériau, est composée de 3 phases : (i) endommagement diffus par germination et croissance de cavités, (ii) localisation de l'endommagement dans une fine bande, (iii) coalescence des vides et apparition d'une fissure macroscopique. Dans le cadre de ce travail, nous considérons une transition instantanée entre l'endommagement diffus et l'apparition / propagation de la fissure [7].

2.2 Plasticité micro-poreuse diffuse

Le potentiel de plasticité micro-poreuse de GTN [6] est utilisé pour modéliser les conséquences de l'endommagement diffus par micro-cavitation :

$$\Phi_{\text{GTN}} = \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y} \right)^2 + 2q_1 f \cosh \left(-\frac{3}{2} q_2 \frac{p_m}{\sigma_y} \right) - (1 + (q_1 f)^2) = 0. \quad (1)$$

σ_{eq} représente la contrainte équivalente de Von Mises, p_m la pression, f la porosité et (q_1, q_2) des constantes adimensionnelles. La contrainte d'écoulement σ_y est modélisée par une loi de type Voce (écrouissage isotrope) :

$$\sigma_y = \sigma_0 + \sigma_\infty (1 - \exp(-b\kappa))^\beta, \quad (2)$$

avec σ_0 la taille initiale du domaine élastique, σ_∞ la contrainte d'écrouissage à saturation, κ la déformation plastique cumulée et (b, β) des coefficients adimensionnels.

2.3 Critère de transition et direction de propagation de la macro-fissure

Le critère de transition de l'endommagement diffus vers la macro-fissuration est basé sur une porosité critique f_c dans l'élément.

Concernant la direction de propagation de la fissure, le taux de triaxialité des contraintes $T = -p_m/\sigma_{eq}$ est utilisé afin de représenter la compétition entre rupture en mode I et rupture en mode II. Si T est au dessus d'une valeur critique notée T_{tran} , la rupture est en mode I et la normale à la bande de propagation est déterminée comme celle permettant de maximiser la contrainte normale

$$\sigma_n = \underline{n}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \quad (3)$$

Dans le cas contraire, la rupture est en mode II, et le plan maximisant $\tau_{\|\Delta \underline{n}_{sh}\|}$ est conservé

$$\tau_{\|\Delta \underline{n}_{sh}\|} = \tau \cdot \|\Delta \underline{n}_{sh}\| \quad (4)$$

où $\|\Delta \underline{n}_{sh}\|$ est équivalent à un saut virtuel du déplacement de la bande de propagation à l'amorçage de la fissuration. Plus de détails sont donnés dans [5].

3 Traitement numérique de la fissure

3.1 Description d'une discontinuité par la XFEM

La méthode des éléments finis étendus est utilisée dans le cadre de ce travail afin de représenter les conséquences cinématiques de la discontinuité induite par la présence d'une macro-fissure dans la structure [8]. Pour ce faire, les nœuds des éléments traversés par la fissure sont enrichis avec des degrés de liberté (ddl) additionnels. L'interpolation du champs de déplacement au sein d'un élément enrichi s'écrit ici

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_i^{n_{noeuds}} N_i(\underline{x}) \underline{\alpha}_i + \sum_j^{p_{noeuds}} N_j(\underline{x}) \underline{\beta}_j \psi(\underline{x}), \quad (5)$$

où \underline{u} est le champs de déplacement interpolé au point \underline{x} , n_{noeuds} est le nombre de nœuds de l'élément, p_{noeuds} est le nombre de nœuds enrichis de l'élément, \mathbf{N} est la matrice des fonctions d'interpolation, α et β sont les degrés de libertés standards et additionnels et $\psi(\underline{x})$ est la fonction d'enrichissement de l'élément.

Dans le cadre de ce travail, on considère la variante de la base décalée de la XFEM [3] (SBXFEM). La fonction d'enrichissement est donc définie telle que

$$\psi(\underline{x}) = H(\underline{x}) - H_j, \quad (6)$$

où H est la fonction de Heaviside qui vaut -0.5 en-dessous de la discontinuité et $+0.5$ au-dessus et H_j la valeur de cette fonction au nœud j .

3.2 Diagonalisation de la matrice de masse enrichie

3.2.1 Critères de diagonalisation

Il est courant lors du traitement de problèmes de dynamique transitoire avec un schéma d'intégration temporelle explicite d'utiliser une matrice de masse diagonalisée $\bar{\mathbf{M}}$ au lieu de la matrice de masse dite cohérente \mathbf{M} . En effet, via l'annulation des termes non-diagonaux et l'accumulation de la masse sur la diagonale de la matrice de masse, il est possible d'augmenter le pas de temps critique (et donc de réduire les temps de calcul), de simplifier l'inversion de la matrice en la traitant comme un vecteur, et de découpler les équations du mouvement, simplifiant donc la résolution du système [2]. La technique la plus couramment utilisée dans le cadre de la méthode des éléments finis standard est la technique de la sommation des colonnes. Celle-ci consiste simplement à sommer les composantes des colonnes de la matrice et d'appliquer le résultat sur le terme diagonal (cette procédure est réalisée colonne par colonne). Les termes non-diagonaux sont quant à eux fixés à 0. De ce fait, la conservation de la masse est respectée.

La diagonalisation de la matrice de masse enrichie dans le cadre de la variante de la base décalée de la XFEM (SBXFEM) est cependant plus complexe. En effet, comme expliqué dans [1], pour assurer la conservation de l'énergie cinétique et de la masse du système, il est nécessaire de s'assurer pour chaque direction que : (i) la somme des termes de la partie standard de $\bar{\mathbf{M}}$ soit égale à la masse de l'élément m et, (ii) que la somme des termes de la partie enrichie soit nulle, soient :

$$\begin{cases} \sum_i \bar{M}_{ii}^{(\alpha)} = m \\ \sum_j \bar{M}_{jj}^{(\beta)} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

où $\bar{M}^{(\alpha)}$ et $\bar{M}^{(\beta)}$ correspondent aux parties standard et enrichie de $\bar{\mathbf{M}}$.

Le second problème est lié à l'utilisation d'un schéma d'intégration purement explicite. Il est en effet nécessaire que tous les termes de la diagonale soient strictement positifs.

Il y a donc une incompatibilité entre le fait que tous les termes de la diagonale de la matrice de masse doivent être strictement positifs et que la somme des termes de la partie enrichie soit nulle.

3.2.2 Technique de diagonalisation

On propose ici une technique de diagonalisation de la matrice de masse enrichie compatible avec un schéma d'intégration purement explicite et permettant de minimiser l'erreur induite par la non-conservation de l'énergie cinétique [9]. La technique traite indépendamment les parties standard et additionnelle de la matrice de masse : (i) La masse de chaque sous-volume est distribuée sur les ddl standards liés à ses nœuds respectifs, en s'assurant de respecter la condition liée à $\bar{\mathbf{M}}^{(\alpha)}$ de l'Eq.7. (ii) La masse de tout l'élément multipliée par un facteur adimensionnel k est distribuée sur les ddl additionnels, indépendamment de la position des nœuds par rapport à la fissure. Le processus de diagonalisation de \mathbf{M} est donc

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ii}^{(\alpha)} &= \begin{cases} m \times s \times \frac{1}{n^-} & \text{ddl standard dans } V^- \\ m \times (1-s) \times \frac{1}{n^+} & \text{ddl standard dans } V^+ \end{cases} \\ \bar{M}_{jj}^{(\beta)} &= m \times k \times \frac{1}{n} \quad \text{ddl additionnel dans } V^- \text{ et } V^+ \\ \bar{M}_{ij}^{(\alpha)} &= \bar{M}_{ij}^{(\beta)} = 0 \quad \text{pour } i \neq j \end{aligned} \quad (8)$$

V^- et V^+ correspondent respectivement aux sous-volumes de l'élément enrichi en dessous et au dessus de la discontinuité (voir la Fig.1), n^- et n^+ aux nombres de nœuds se trouvant dans chaque sous-volume, s est défini tel que $s = \frac{V^-}{V}$ et k est donc un coefficient adimensionnel, strictement positif et calibré numériquement. Ainsi, la technique de diagonalisation de la matrice de masse enrichie introduit un co-

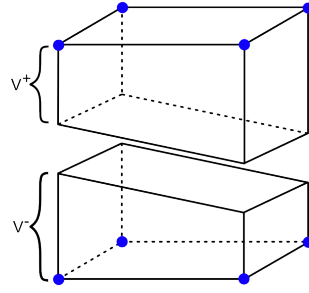


FIGURE 1 – Élément fini XFEM avec une discontinuité.

efficient k , adimensionnel et strictement positif, dont le rôle est : (i) de s’assurer que tous les termes de la matrice soient positifs, et (ii) que l’erreur introduite via le non-respect du critère donné par l’Eq.7 soit négligeable.

4 Application numérique

4.1 Cas 1D élastique-linéaire

Afin de quantifier l’impact de la technique de diagonalisation de la matrice de masse enrichie proposée, un cas 1D en élasticité-linéaire en appliquant l’hypothèse des petites perturbations est considéré : une barre 1D est discrétisée par 3 éléments finis de longueur L , et une discontinuité forte est introduite dans l’élément central à une position s dans le repère de l’élément, avec $0 < s < 1$. La barre est soumise à une vitesse initiale V_L sur son nœud extérieur gauche, voir Fig.2. De ce fait, il est possible de représenter le cas équivalent par la méthode des éléments finis standard. L’objectif est de faire varier la valeur donnée au coefficient k de l’Eq.8 et de comparer les résultats obtenus entre le cas enrichi (appelé XFE et utilisant la SBXFEM avec la technique de diagonalisation de \mathbf{M} proposée) et le cas standard (appelé FE, utilisant la FEM et servant de référence). On considérera de plus différentes positions s de la discontinuité dans l’élément central. Le Tab.1 référence les différentes configurations testées pour chaque valeur de s .

On considère un matériau défini par son module d’élasticité $E = 210\,000$ MPa, son coefficient de Pois-

Configuration	valeur de k
FE	-
XFE-k1	1
XFE-k2	10^{-1}
XFE-k3	10^{-4}

TABLE 1 – Différentes configurations testées pour le cas 1D et les valeurs du coefficient k associées.

son 0.33 et sa masse volumique $\rho = 7800$ $kg.m^{-3}$. La vitesse initiale appliquée est $V_L = -10$ $m.s^{-1}$. Implémentée dans un code Python, un schéma d’intégration explicite est considéré pour l’intégration temporelle des équations du mouvement. Dans le cas standard utilisant la FEM, une matrice de masse diagonalisée suivant l’Eq.8 telle que $\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{M}}^{(\alpha)}$ est utilisée.

La Fig.3 présente, pour les différentes positions s considérées de la discontinuité, les déplacements des

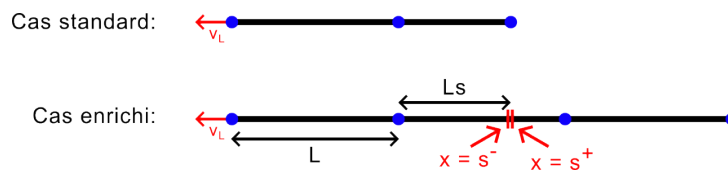


FIGURE 2 – Représentation schématique du problème modélisé (gauche).

lèvres de la fissure de l’élément enrichi, ainsi que du nœud équivalent du cas standard FEM pour différentes valeurs de k . Pour les différentes positions considérées de la fissure, le déplacement de la lèvres de

gauche de la fissure du cas enrichi (utilisant la SBXFEM) converge vers celui du nœud équivalent du cas standard FEM quand la valeur de k diminue. La même observation est faite vis-à-vis du déplacement de la lèvres de droite de la fissure qui reste bien nul quand k est suffisamment faible. Ainsi, à l'échelle de l'élément (où quand la fraction d'éléments enrichis est grande), il est nécessaire, comme établi dans [9], de faire tendre le coefficient k vers 0 pour assurer la validité de la solution.

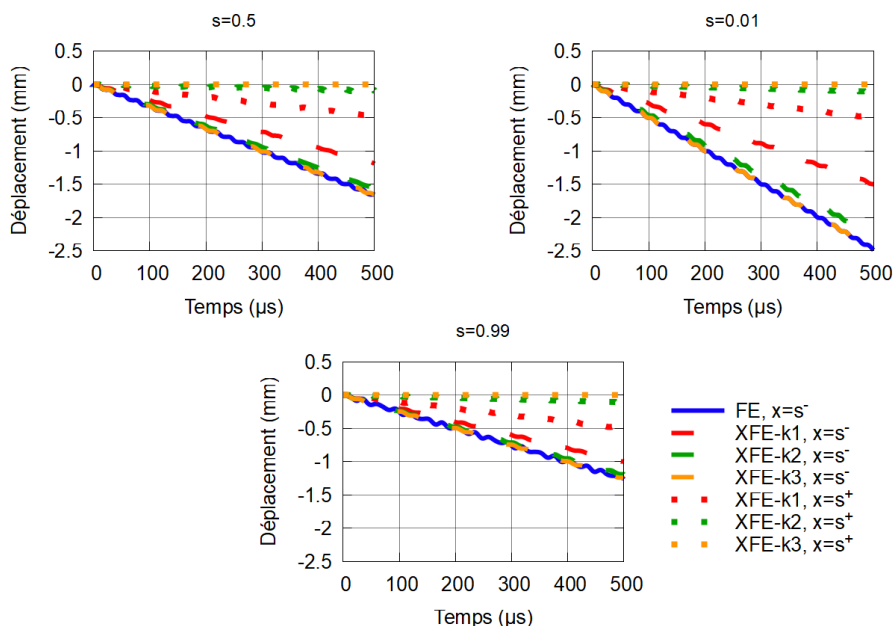


FIGURE 3 – Déplacements des lèvres de la fissure du cas enrichi et du nœud équivalent du cas standard (droite) pour différentes valeur de k et s .

4.2 Cas 3D élasto-plastique endommageable

La méthodologie numérique tri-dimensionnelle présentée précédemment a été implémentée dans le logiciel de calculs par éléments finis Abaqus via un élément utilisateur (VUEL). Afin de vérifier la validité du modèle, la méthodologie a également été implémentée dans une UEL qui utilise un schéma de résolution temporelle implicite, avec dans ce cas, $k = 0$ (voir Eq.8). Des simulations d'essais de traction dynamiques sur des éprouvettes de type CT (voir Fig.4) sont réalisées. L'objectif est de vérifier la validité de la méthode de diagonalisation de la matrice de masse utilisée avec un schéma de résolution temporelle explicite et de quantifier l'impact du coefficient k intervenant dans la partie enrichie de la matrice de masse.

Les propriétés matériau considérées ainsi que les critères d'amorçage et de propagation de la fissure utilisés sont présentés dans le Tab.2.

E [MPa]	ν	ρ [kg/m^3]	$q_1 = q_2$	σ_0 [MPa]	σ_∞ [MPa]	b	β	f_c [%]	T_{tran}
210 000	0.33	7 800	1	360	500	2.5	0.7	3	0.57

TABLE 2 – Propriétés matériau et paramètres de propagation de la fissure

Dans le cas de l'utilisation d'un schéma d'intégration temporelle implicite, il est possible d'utiliser la matrice de masse diagonalisée de l'Eq.8 avec $k = 0$. De ce fait, cette dernière est bien conditionnée et les résultats obtenus avec le schéma implicite seront considérés ici comme références. Comme expliqué dans [9], lors de l'utilisation d'un schéma explicite avec la technique de diagonalisation de la matrice de masse enrichie proposée, tant que le nombre d'éléments enrichis reste faible devant le nombre d'élément total du maillage, il est possible d'utiliser $k \approx 1$ (qui est considérée comme une haute valeur du coefficient). Dans cette étude, on considère $k = 1$ et $k = 0.1$.

L'éprouvette de la Fig.4 possédant une symétrie suivant l'axe z , uniquement la moitié a été modélisée. Concernant le maillage de l'éprouvette, une taille de maillage globale de 0.92 mm est utilisée, et un raffinement dans la zone d'intérêt est appliqué (voir Fig.5) :

1. Maillage M1 : 0.92 mm de taille de maille dans la zone raffinée (3 éléments dans l'épaisseur de l'éprouvette).
2. Maillage M2 : 0.46 mm de taille de maille dans la zone raffinée (6 éléments dans l'épaisseur de l'éprouvette).
3. Maillage M3 : 0.32 mm de taille de maille dans la zone raffinée (9 éléments dans l'épaisseur de l'éprouvette).

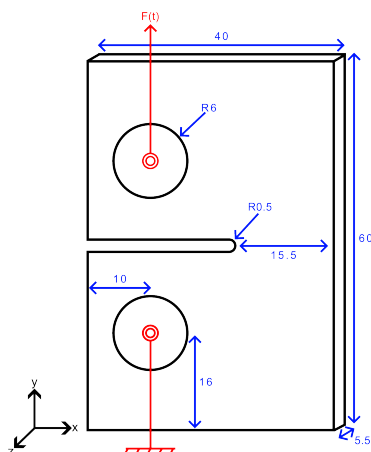


FIGURE 4 – Représentation schématique de l'éprouvette de type CT considéré pour les essais de traction. Les dimensions sont données en millimètres.

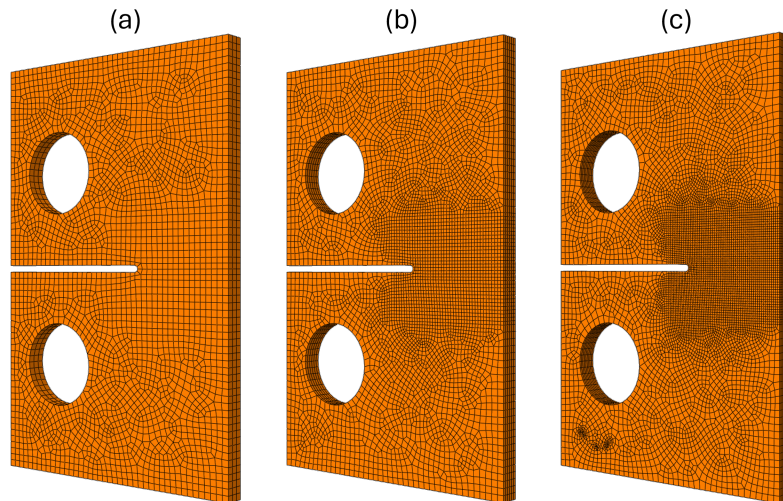


FIGURE 5 – Maillages utilisés pour l'étude. (a) M1, (b) M2, (c) M3.

Les efforts de réaction obtenus en implicite ($k = 0$) et en explicite pour $k = 1$ et $k = 0.1$ sont présentés sur la Fig.6 pour les trois maillages considérés. Afin de visualiser plus aisément la tendance des courbes, un lissage est effectué. Le Tab.3 référence les instants d'amorçage de la fissure pour les différents maillages considérés. On notera que l'instant d'amorçage est indépendant de la valeur du coefficient k car il se base uniquement sur la valeur de la porosité f avant l'enrichissement du premier élément du maillage. Même si la convergence de la solution au maillage n'est pas effectuée ici, pour un maillage donné les trois valeurs du paramètre k testées, $k = 0$ (implicite), $k = 1$ et $k = 0.1$ (explicite), permettent d'obtenir des résultats similaires en termes (i) de tendances, et (ii) d'ordres de grandeur.

Considérant seulement le maillage le plus fin (maillage M3), on peut voir sur la Fig.7, les champs de porosité au niveau du front de fissure pour les trois cas d'étude. On peut remarquer que la distribution

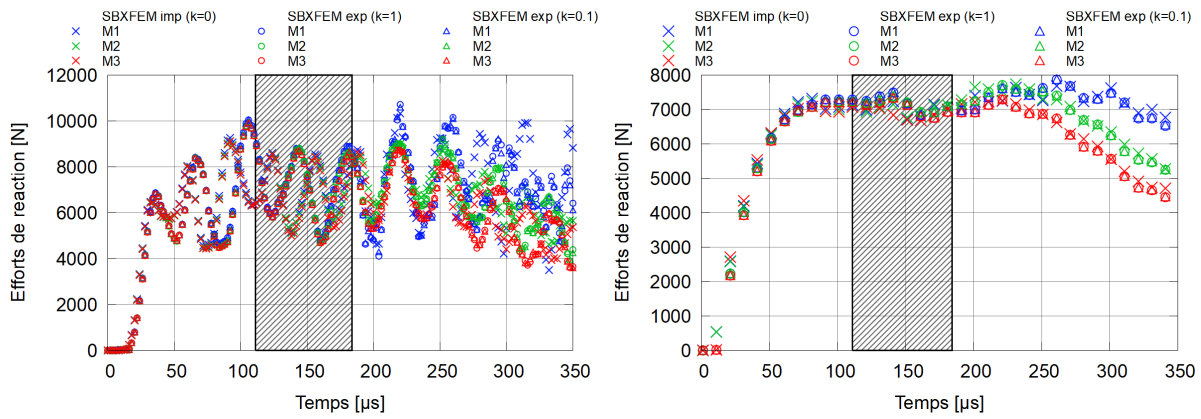


FIGURE 6 – Efforts de réaction (gauche) et efforts de réaction lissés (droite) au cours du temps pour $k = 0$ (implicite), $k = 1$ et $k = 0.1$ (explicite). Le rectangle hachuré noir représente la plage temporelle d’amorçage de la fissuration pour les différents maillages.

Maillage	$t_{\text{amorçage}} [\mu\text{s}]$
M1	175
M2	125
M3	115

TABLE 3 – Instants d’amorçage de la fissure pour les différents maillages considérés.

de la porosité ainsi que le chemin de propagation de la fissure est le même pour les trois solutions. On notera que que la longueur de fissure présenté ici est d’environ 4.5 mm, soit $\approx 1/4$ de la taille du ligament. Finalement, les temps de calcul normalisés pour chaque maillage sont présentés sur la Fig.8.

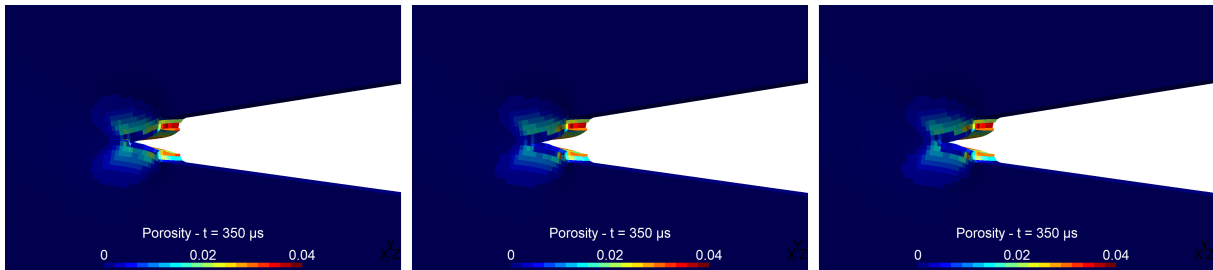


FIGURE 7 – Champs de porosité dans l’éprouvette à la fin du calcul ($t = 350 \mu\text{s}$). $k = 0$ (implicite) (gauche), $k = 1$ (milieu), $k = 0.1$ (droite).

Pour chaque maillage, les temps sont normalisés par rapport au calcul explicite avec $k = 1$ qui était le plus rapide dans toutes les configurations. la Fig.8 met bien en avant l’intérêt de l’utilisation d’un schéma purement explicite par rapport à un schéma implicite pour le type de problème considéré ici, de même que l’utilisation d’une haute valeur de k (le facteur k ayant un impact direct sur le pas de temps critique, voir [9]).

5 Conclusion

Ce travail porte sur le couplage de la variante de la base décalée de la méthode des éléments finis étendus (SBXFEM) avec un schéma d’intégration temporelle explicite afin de pouvoir résoudre, de manière efficace d’un point de vu numérique, des problèmes de forte complexité (grandes déformations et rotations, non-linéarités matérielles, traitement de la fissuration, ...) en dynamique transitoire. Une méthode originale pour la diagonalisation de la matrice de masse enrichie a été proposée. Celle-ci se base sur un coefficient adimensionnel k introduit dans la partie enrichie afin de chercher à minimiser l’erreur liée à l’introduction de masse non-physique, tout en permettant l’utilisation d’un schéma temporelle ex-

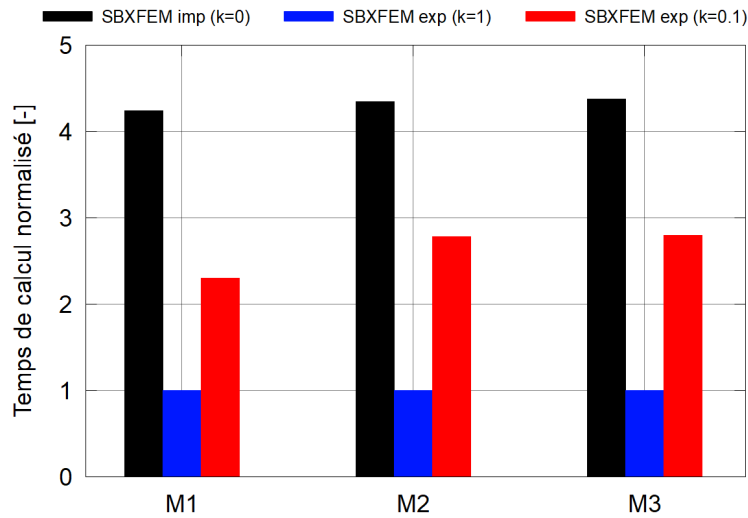


FIGURE 8 – Temps de calcul normalisés par celui de $k = 1$ pour les différents maillages considérés.

plicité pour l'intégration des équations du mouvement.

La technique a été implémenté via un élément utilisateur dans le code de calculs par éléments finis Abaqus, en implicite et en explicite, et des essais de traction dynamique sur des éprouvettes ont été réalisés. Ces essais ont montré que la technique permet, avec l'utilisation d'un schéma explicite, de correctement reproduire les résultats de la solution de référence (ici la solution obtenue avec le schéma implicite pour lequel $\bar{\mathbf{M}}$ est correctement conditionnée). De plus, dans le cas considéré, on constate qu'une valeur élevée de k n'influence pas négativement la solution.

Les développements futurs porteront sur l'ajout des phénomènes d'auto-échauffement du matériau dus à la dissipation plastique, ainsi que sur la prise en compte des effets micro-inertiels [4] dans la loi constitutive du matériau.

Références

- [1] I. Asareh, J. Song, Y. Qian. *A general mass lumping scheme for the variants of the extended finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 2262-2284, 2019.
- [2] T. Belytschko, W. Kam Liu, B. Moran, K. Elkhordy. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures, 2nd edition*, Titre de l'ouvrage, Wiley, 2013.
- [3] Z. Goangseup, T. Belytschko. *New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 2221-2240, 2003.
- [4] N. Jacques, S. Mercier, A. Molinari. *A constitutive model for porous solids taking into account microscale inertia and progressive void nucleation*, Mechanics of Materials, Elsevier, 311-323, 2015.
- [5] A. Kaniadakis, JP. Crété, P. Longère. *Three-dimensional finite strain volumetric cohesive XFEM-based model for ductile fracture*, Engineering Fracture Mechanics, Elsevier, 110275, 2024.
- [6] A. Kaniadakis, JP. Crété, P. Longère. *Description of void coalescence by internal necking/shearing within XFEM via a micromechanical 3D volumetric cohesive zone model (μ -VCZM)*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier, 106176, 2025.
- [7] F. A. McClintock. *A criterion for ductile fracture by the growth of holes*, Journal of Applied Mechanics, The American Society of Mechanical Engineering, 363-371, 1968.
- [8] N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko. *A finite element method for crack growth without remeshing*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 131-150, 1999.
- [9] L. Scheidt, J-P. Crété, P. Longère. *Mass-lumping technique for fully explicit time integration of the shifted-basis variant of the 3D extended finite element method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 118636, 2026.
- [10] V. Tvergaard, A. Needleman. *Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar*, Acta Metallurgica, Elsevier, 157-169, 1984.