

## Développement des Perfectly Matched Layer dans le code éléments finis Zset

V. Kehr-Candille<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ONERA, Département matériaux et structures, Châtillon, France, veronique.kehr-candille@onera.fr

**Résumé** — Dans le cadre de la simulation des propagations d'onde, en utilisant un code de calcul par éléments finis, on est amené à modéliser une structure *infinie* : la méthode des Perfectly Matched Layers (PML) s'avère un outil efficace pour ce type de modélisation. On présente la théorie des PML, ainsi que leur déploiement dans un code éléments finis existant, avec l'objectif d'être peu intrusif dans le code, sans développement supplémentaire. Une application à un cas académique montre la simplicité de la mise en œuvre et l'efficacité de la méthode.

**Mots clefs** — propagation d'ondes, absorption d'ondes, Perfectly Matched Layer.

### 1. Introduction

Les structures aéronautiques sont soumises tout au long de leur cycle de vie à diverses sollicitations (mécaniques, thermiques), qui peuvent les détériorer. Les endommagements induits (fissure, délaminage, ...) ne sont pas toujours visibles. Afin de les détecter, une solution est d'équiper les structures par des réseaux de capteurs. Le dimensionnement de ces capteurs et l'optimisation de leur positionnement requièrent d'étudier la propagation des ondes dans la pièce. Il est donc essentiel de disposer d'un outil numérique adéquat.

Pour simuler la propagation des ondes dans les structures, il est très courant d'utiliser un code éléments finis. Cependant, de nombreuses méthodes utilisées pour détecter des défauts sont basées sur la propagation des ondes dans un milieu *infini* (cf. par exemple [10]). Il est donc indispensable de pouvoir simuler des conditions de radiation à l'*infini*, dans une modélisation de structure *bornée*.

Cette question intéresse depuis longtemps la communauté scientifique, dans le domaine de la propagation des ondes élastiques dans les structures, mais également pour l'acoustique et l'électromagnétisme. Parmi les méthodes existantes, on peut citer l'opérateur « Dirichlet to Neumann » [1][10]. On peut également mentionner la méthode des couches absorbantes, des éléments infinis, des éléments de frontière, et la méthode plus récente des couches absorbantes parfaitement adaptées, plus connues sous le vocable anglais *Perfectly Matched Layer* (PML).

Dans cette étude, on s'intéresse à cette dernière famille de méthode (PML). Le but est de déployer la méthode dans un code de calcul de structures par éléments finis existant : le code Zset. Ce code est co-développé par l'Onera et l'école des Mines de Paris. L'objectif est d'être aussi peu intrusif que possible dans la structure de code existante, en utilisant notamment l'interface Python.

Dans ce document, on présente tout d'abord la théorie des PML, puis la méthodologie de déploiement utilisée. On présente ensuite les résultats obtenus, ainsi que les perspectives.

## 2. Présentation des Perfectly Matched Layer

### 2.1. Théorie

#### 2.1.1 Approche naïve

L'idée initiale pour simuler des conditions de propagation à l'infini serait de placer un matériau très absorbant aux frontières du domaine pour atténuer les ondes : on n'aurait alors pas de réflexion sur les bords, et on pourrait ainsi simuler des conditions analogues à l'infini. On illustre cette approche Figure 1 : en utilisant un matériau **B** très absorbant, on espère que l'onde se propageant dans le matériau **A** soit absorbée dans le matériau **B**. On éviterait ainsi les réflexions parasites sur les bords.

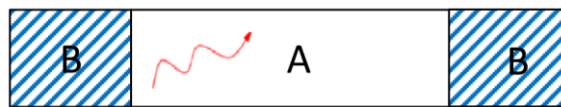


Figure 1 – Configuration étudiée

Or, cette idée séduisante a priori se heurte au phénomène de *rupture d'impédance* :

- si le matériau **B** est très absorbant, l'onde venant du matériau **A** ne se propage pas dans **B** (phénomène de rupture d'impédance, bien détaillé dans [6]),
- si le matériau **B** est peu absorbant, l'onde venant de **A** se propage bien dans **B**, mais elle est très peu atténuée, et on observe alors des réflexions sur les bords.

Pour éviter ce phénomène de rupture d'impédance, la méthode des PML (Perfectly Matched Layer) se base sur la notion d'*adaptation d'impédance*, qui est détaillée dans le paragraphe suivant.

#### 2.1.2 Adaptation d'impédance et dérivation « complexe »

On peut introduire la méthode sur le problème très simple de la propagation d'une onde acoustique dans un milieu unidimensionnel. La généralisation à une onde élastique et à une propagation dans un milieu bidimensionnel ou tridimensionnel se fera facilement dans le paragraphe suivant.

On note  $c$  la vitesse de propagation des ondes et  $\rho$  la masse volumique du matériau L'impédance notée  $Z$  est alors  $Z = \rho c$ . En notant  $\mu$  le module de compressibilité, on obtient alors les relations  $c = \sqrt{\mu/\rho}$  et  $Z = \sqrt{\rho\mu}$ .

L'équation de propagation des ondes dans le milieu **A** est alors :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \quad (1)$$

Dans le milieu **B**, correspondant au PML, la masse volumique est  $\tilde{\rho} = \rho \lambda$  et le module de compressibilité est  $\tilde{\mu} = \mu/\lambda$ . On a alors  $\tilde{\rho} \tilde{\mu} = \rho \mu \Rightarrow \tilde{Z} = Z$  : l'impédance entre les milieux **A** et **B** est identique (adaptation d'impédance).

L'équation de propagation des ondes dans **B** peut alors s'écrire :

$$\tilde{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \tilde{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \quad (2)$$

soit, en divisant par  $\lambda$  :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \quad (3)$$

En comparant (1) et (3), on note que dans le milieu **B**, l'opérateur de dérivation par rapport à la variable d'espace  $\frac{\partial}{\partial x}$  a été remplacé par l'opérateur  $\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x}$ .

Le coefficient  $\lambda$  est un coefficient complexe ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ). Sa valeur dépend de la variable d'espace  $x$  et de la pulsation  $\omega$  :

$$\lambda = \lambda(x, \omega) = \alpha(x) + \frac{\beta(x)}{i\omega} \quad (4)$$

Dans l'expression (4), les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont réels. L'absorption des ondes est liée au coefficient  $\beta$  et donc, pour avoir un milieu **B** absorbant, on doit avoir  $\beta \geq 0$ . De plus, pour des raisons de continuité, l'expression de  $\alpha(x)$  et de  $\beta(x)$  doit satisfaire  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$  à l'interface **A-B**.

Le choix de la relation (4) conduit à une fonction  $d_x(\omega) = 1/\lambda(x, \omega)$  qui s'exprime sous forme d'une fraction rationnelle par rapport à la pulsation  $\omega$ . Ceci nous permettra par la suite de reformuler aisément le problème dans le domaine temporel.

On a ainsi introduit la notion de dérivation « complexe » (car  $\lambda \in \mathbb{C}$ ), libre traduction du vocable anglais plus couramment utilisé *complex stretching*.

### 2.1.3 Cas de l'onde élastique

On s'intéresse maintenant au cas de la propagation d'une onde élastique dans un cas bidimensionnel.



Figure 2 – Cas élastique bidimensionnel

La configuration qui nous intéresse pour nos applications est celle d'un plaque infinie (cas d'ondes guidées par exemple), et on souhaite absorber les ondes uniquement dans la direction longitudinale  $x$ . Dans la direction normale  $y$ , on a des conditions de bords libres.

On utilise dans le milieu absorbant **B** la notion de « dérivation complexe » présentée dans le paragraphe précédent : l'opérateur de dérivation  $\frac{\partial}{\partial x}$  est remplacé par l'opérateur  $\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x}$ . Les équations du problème deviennent :

- équations d'équilibre : 
$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} = -\rho\omega^2 u_x \\ \frac{1}{\lambda} \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} = -\rho\omega^2 u_y \end{cases}$$
- calcul des déformations : 
$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{\lambda} u_{x,x} \\ \varepsilon_{yy} = u_{y,y} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (u_{x,y} + \frac{1}{\lambda} u_{y,x}) \end{cases}$$
- loi de comportement (inchangée) :  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$

Dans ces équations, on note classiquement  $(u_x \ u_y)^T$  le vecteur des déplacements,  $[\sigma_{ij}]$  le tenseur des contraintes,  $[\varepsilon_{ij}]$  le tenseur des déformations et  $[C_{ijkl}]$  les coefficients de la loi de comportement (élastique).

## 2.2. Implémentation en éléments finis

Il s'agit maintenant d'implémenter les équations constitutives présentées au paragraphe 2.1.3. dans un code de calcul par éléments finis existant, avec l'objectif d'être aussi peu intrusif que possible dans la structure du code. On souhaite notamment éviter de développer complément un nouveau type d'élément fini.

Par ailleurs, pour nos applications, on souhaite utiliser les PML dans des calculs de réponses dynamiques dans le domaine *temporel* (et pas dans le domaine fréquentiel). Ce point est important, et va guider notre stratégie de développement.

Parmi les publications relatives à l'utilisation des PML en éléments finis, de nombreux travaux introduisent un nouveau type d'éléments finis, avec soit des fonctions d'interpolation modifiées [4][7], soit une relation déformations-déplacements adaptée [4], pour prendre en compte la dérivation complexe. D'autres encore utilisent une formulation mixte déplacements – contraintes [11][12]. L'approche la plus compatible avec notre souhait d'être peu intrusif dans le code éléments finis est décrite dans [8].

Dans un premier temps, on étudie l'adaptation de cette méthode à notre configuration dans laquelle on souhaite absorber les ondes dans la direction tangentielle  $x$  uniquement (dans la direction normale  $y$ , la structure est bien finie) : par rapport à un élément classique, on remplace uniquement l'opérateur de dérivation  $\frac{\partial}{\partial x}$  par  $\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x}$ , l'opérateur de dérivation  $\frac{\partial}{\partial y}$  reste inchangé.

On introduit alors un nouveau tenseur des contraintes  $[\sigma']$  non-symétrique ( $\sigma'_{yx} \neq \sigma'_{xy}$ ) :

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx} &= \sigma_{xx} & \sigma'_{xy} &= \sigma_{xy} \\ \sigma'_{yx} &= \lambda \sigma_{yx} & \sigma'_{yy} &= \lambda \sigma_{yy} \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre s'écrivent alors 
$$\begin{cases} \sigma'_{xx,x} + \sigma'_{xy,y} = -\rho\omega^2 \lambda u_x \\ \sigma'_{yx,x} + \sigma'_{yy,y} = -\rho\omega^2 \lambda u_y \end{cases}$$

La loi de comportement est modifiée :  $\sigma'_{ij} = C'_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ . Ce nouveau tenseur  $\mathbf{C}'$  conserve les symétries du tenseur initial  $\mathbf{C}$ , à condition de considérer un tenseur des contraintes avec 4 composantes indépendantes  $[\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}]$ , et non plus 3 comme dans une approche classique ( $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ ). Ceci nécessiterait des nouveaux développements au sein du code éléments finis, ce que nous souhaitons éviter.

On modifie alors la méthode en introduisant les opérateurs de dérivation  $\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x}$  et également  $\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial y}$ . On obtient alors :

- un tenseur des contraintes symétrique avec 3 composantes indépendantes ( $\sigma'_{ij} = \lambda \sigma_{ij} \ \forall i \ \forall j$ )
- une loi de comportement inchangée ( $\sigma'_{ij} = C_{ijkl} \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k})$ )
- les équations d'équilibre  $\sigma'_{ij,j} = -\rho\omega^2 \lambda^2 u_i$

Avec l'expression (4) du coefficient  $\lambda = \lambda(x, \omega) = \alpha(x) + \frac{\beta(x)}{i\omega}$ , en revenant dans le domaine temporel, on obtient alors pour le milieu  $\mathbf{B}$  correspondant au PML, le système final :

$$(K_0 + M_{\beta^2})U + 2M_{\alpha\beta} \dot{U} + M_{\alpha^2} \ddot{U} = F_{ext}(t) \quad (5)$$

avec  $K_0$  la matrice de raideur usuelle.

Les matrices  $M_A$  correspondent à la discrétisation des intégrales  $\int_{\Omega} \rho A(x) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}$ , avec la fonction  $A(x) = \alpha^2(x)$  (resp.  $A(x) = \beta^2(x)$ ,  $A(x) = \alpha(x)\beta(x)$ ) pour la matrice  $M_{\alpha^2}$  (resp.  $M_{\beta^2}$ ,  $M_{\alpha\beta}$ ).

On est alors dans une configuration tout à fait compatible avec un code éléments finis, sans développement supplémentaire. Les matrices  $M_A$  se calculent avec l'opérateur de calcul de masse usuel si on prend une fonction  $A(x)$  constante sur un élément.

### 3. Déploiement des PML dans Zset

#### 3.1. Méthodologie

Il s'agit de former et de résoudre le système temporel classique linéaire du second ordre :

$$K_t U + D \dot{U} + M_t \ddot{U} = F_{ext}(t) \quad (6)$$

Dans le milieu **A**, on a  $K_t = K_0$  et  $M_t = M_0$  avec  $K_0$  (resp.  $M_0$ ) la matrice usuelle de raideur (resp. de masse). La matrice  $D$  prend un compte un amortissement éventuel.

Dans le milieu **B**, le système (6) est équivalent au système (5). Les matrices  $M_{\alpha^2}$ ,  $M_{\beta^2}$  et  $M_{\alpha\beta}$  se calculent avec l'opérateur de masse usuel, en prenant des coefficients  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  constants sur un élément donné. Le raffinement des maillages utilisés dans les calculs de propagation d'onde est largement suffisant pour prendre en compte l'évolution des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ . On précise que seule une dépendance avec la coordonnée  $x$  est à considérer, on n'a pas d'évolution avec la coordonnée  $y$ .

Dans l'opérateur de calcul de la matrice de masse, le code Zset permet de prendre un compte des masses volumiques qui dépendent d'un paramètre (ici la variable  $x$ ), ce qui simplifie grandement la mise en données : l'utilisateur indique seulement la fonction les fonctions choisies pour  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$ .

Le code Zset dispose d'une interface en langage python *zset4python*, qui permet d'intervenir à différents niveaux du calcul éléments finis pour implémenter aisément des développements particuliers. Dans un premier temps, on utilise cette interface dans un calcul Zset pour calculer et exporter les matrices  $M_{\alpha^2}$ ,  $M_{\beta^2}$  et  $M_{\alpha\beta}$ . Dans une deuxième phase, toujours avec l'interface *zset4python*, on récupère ces matrices pour le milieu **B**, et on forme et on résout le système (6) par un algorithme classique de Newmark.

Dans cette mise en œuvre de la méthode exposée dans la partie précédente, aucun développement supplémentaire interne au code Zset n'a été nécessaire. On utilise les opérateurs existants de calcul des matrices de raideur et de masse, et on utilise également les solveurs du code. La mise en données est facilitée par la paramétrisation de la masse volumique. L'utilisateur n'a besoin que d'indiquer le choix des fonctions  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  en langage python.

#### 3.2. Résultats

La méthode précédente a été appliquée sur un cas simple présenté ci-dessous Figure 3 (gauche). Il s'agit d'un cas bidimensionnel dans le plan  $(x, y)$  et on a fixé le déplacement vertical  $u_y = 0$ , ce qui revient en pratique à considérer un cas unidimensionnel.

Les caractéristiques du matériau isotrope élastique sont  $E = 357.5 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$  et  $\rho = 2200 \text{ kg/m}^3$ .

Le maillage comporte 440 éléments dans la direction  $x$  et un seul élément dans la direction  $y$ . Le raffinement du maillage est identique dans le matériau élastique et dans le PML.

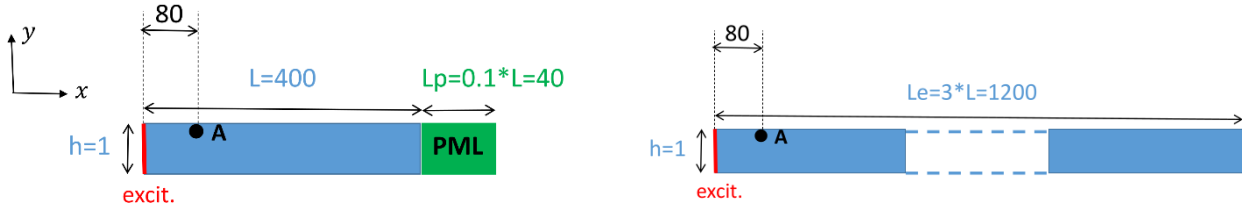


Figure 3 – Cas test : configuration testée (gauche), configuration de référence (droite)

La force excitatrice (impulsion d'ondelettes de Ricker [8]) est appliquée à l'extrémité gauche :

$$f_{ext}(t) = A \left( (0.25\tau^2 - 0.5)e^{0.25\tau^2} - a \right) \text{ pour } t \leq T, \text{ et } f_{ext}(t) = 0 \text{ pour } t > T$$

avec  $\tau = 2\pi f_0 t - 3\sqrt{6}$ ,  $f_0 = 10 \text{ Hz}$ ,  $T = \frac{3\sqrt{6}}{\pi f_0}$ ,  $a = 13e^{-13.5}$  et  $A = \frac{4 \cdot 10^4}{0.5 + 13e^{-13.5}}$

Le calcul temporel est effectué jusqu'à  $t_f = 2.5 \text{ s}$  avec un pas de temps  $dt = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ .

Pour les coefficients du PML, on a utilisé les fonctions  $\alpha(x) = \text{constante} = 1$  et  $\beta(x) = \beta_0 x^3$  avec  $\beta_0 = 11.5$ . Dans ces formules, on a  $x = 0$  à l'interface matériau élastique – PML.

Les résultats sont analysés au point A (cf. Figure 3). La configuration avec PML est comparée à une configuration de référence Figure 3 (droite), suffisamment étendue dans la direction  $x$  pour simuler des conditions à l'infini. Les résultats sont présentés Figure 4.

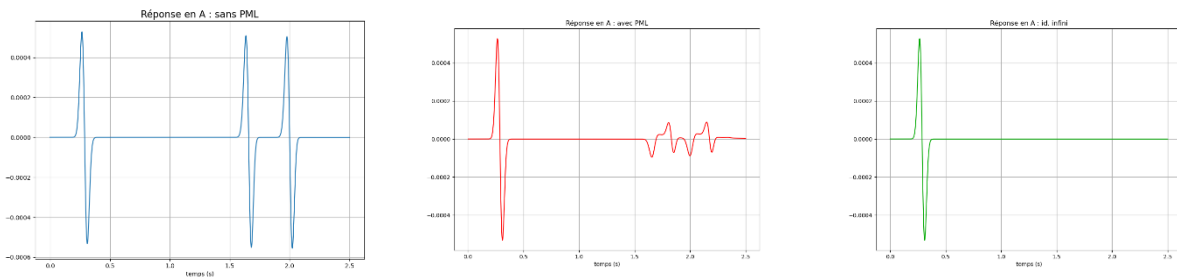


Figure 4 - Résultat de la simulation : sans PML (gauche), avec PML (centre), cas de référence (droite)

Avec une configuration sans PML (à gauche), on constate la présence d'une onde réfléchie à partir du temps  $t = 1.5 \text{ s}$ . Cette onde réfléchie, logiquement absente de la configuration de référence (à droite), est très fortement atténuée par la présence du PML (au centre). On peut donc constater sur cet exemple l'efficacité des PML pour absorber l'onde, éviter les réflexions parasites sur les bords et ainsi simuler les conditions de radiation à l'infini.

### 3.3. Choix des coefficients du PML

Le choix des fonctions  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  est un point clé de l'efficacité de la méthode. Ce choix est également lié au raffinement du maillage dans la couche PML, car on a des réflexions partielles en chaque point de discrétisation [5][10]. Plusieurs auteurs ont présenté divers choix de fonctions (cf. notamment [9] pour un inventaire des diverses approches).

Pour notre cas test académique, on a suivi la préconisation de nombreux auteurs en prenant un profil cubique. L'absorption est pilotée par le coefficient  $\beta$  : le choix final correspond au meilleur résultat obtenu après plusieurs essais, avec un pas de discrétisation fixé. Pour le coefficient  $\alpha$ , nous n'avons pas constaté sur notre cas-test d'influence notable, nous avons donc pris  $\alpha(x) = \text{constante} = 1$ .

Afin de faciliter l'utilisation des PML déployés dans Zset, il serait intéressant d'effectuer une étude bibliographique, centrée sur les configurations étudiées, afin de fournir à l'utilisateur des préconisations ciblées.

### 3.4. Extension au cas tridimensionnel

Le déploiement des PML a été présenté dans un cas bidimensionnel. Le déploiement dans un cas tridimensionnel est immédiat. On s'intéresse alors à une plaque infinie dans son plan (cf. Figure 5). Les coefficients du PML dépendent alors des variables  $x$  et  $z$  :  $\alpha(x, z)$  et  $\beta(x, z)$ . En utilisant la paramétrisation du coefficient relatif à la masse volumique, la mise en données est aussi aisée que dans le cas bidimensionnel. Ce cas n'a cependant pas encore été testé.

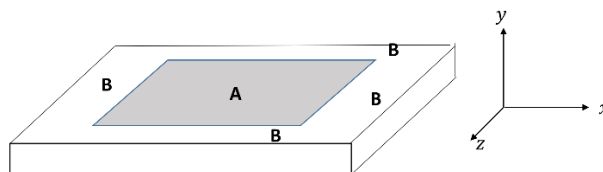


Figure 5- Cas tridimensionnel

## 4. Conclusion et perspectives

On a présenté la théorie et une mise en œuvre des PML adaptée à nos configurations d'intérêt (simulations des conditions de radiation à l'infini pour des propagations d'ondes dans des applications liées au SHM). La mise en œuvre est compatible avec une utilisation du code par éléments finis Zset sans avoir besoin d'effectuer des développements supplémentaires. L'efficacité de la méthode a été constatée sur un cas simple mais cependant représentatif des applications visées.

Les perspectives à court terme sont d'une part de fournir à l'utilisateur une aide ciblée pour le choix des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , qui est un point clé de l'utilisation des PML, et d'autre part de tester l'extension au cas tridimensionnel.

Par ailleurs, le code Aset, successeur du code Zset, est en cours de développement. L'objectif est de déployer les PML dans Aset avec la même méthodologie que pour le déploiement dans Zset, en utilisant l'interface python. Le déploiement devrait être facilité car dans Aset, on a fait le choix de considérer des tenseurs de contrainte et de déformation non-symétriques a priori, ce qui ouvre la possibilité d'utiliser dans la dérivation complexe des coefficients  $\lambda$  différents suivant les directions considérées (cf. paragraphe 2.2).

L'objectif est d'utiliser les PML pour étudier les propagations d'onde dans des matériaux composites multicouches, qui sont des matériaux qui ont un comportement anisotrope : il conviendra alors d'être attentif aux risques d'instabilités des PML, comme signalé dans [3].

## Références

- [1] V. Baronian, A.S. Bonnet-Ben Dhia, E. Lunéville, Transparent boundary conditions for the harmonic diffraction problem in an elastic waveguide, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **234**, 1945-1952, 2010

- [2] E. Bécache, S. Fauqueux, P. Joly, Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves, *Journal of Computational Physics* **188**, 399-433, 2003
- [3] S. Fauqueux, *Éléments finis spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation des ondes élastiques en régime transitoire*, thèse université Paris IX-Dauphine, 2003
- [4] I.K. Fontara, W. Schepers, S. Savidis, F. Rackwitz, Finite element implementation of efficient absorbing layers for time harmonic elastodynamics unbounded domain, *Solid Dynamics and Earthquake Engineering* **114**, 625-638, 2018
- [5] I. Harari, U. Albocher, Studies of FE/PML for exterior problems of time-harmonic waves, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **195**, 3854-3879, 2005
- [6] P. Joly, An elementary introduction to the construction and the analysis of perfectly matched layers for time domain wave propagation, *SEMA journal* **57**, 5-48, 2012
- [7] E. Kausel, J.M. Oliveira, PMLs : A direct approach, *Int. J. Numer. Meth. Engrg* **90**, 343–352, 2012
- [8] M. Khased Poul, A. Zerva, Time domain PML formulation for modeling viscoelastic waves with Rayleigh-type damping in an unbounded domain. Theory and application in ABAQUS, *Finite Elements in Analysis and Design* **152**, 1-16, 2018
- [9] S. Kucukcoban, L.F. Kallivokas, Mixed perfectly-matched-layers for direct transient analysis in 2D elastic heterogeneous media, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **200**, 57-76, 2011
- [10] A. Recoquillay, *Méthodes d'échantillonnage appliquée à l'imagerie de défauts dans un guide d'ondes élastiques*, thèse université Paris-Saclay, 1998
- [11] Y. Ren, G. Zhang, J. Zhang, M. Zhao, X. Du, An open-source ABAQUS UEL implementation of SBPML for wave problems, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* **190** (109211) 2025
- [12] W. Zhang, E. Taciroglu, A novel Rayleigh-type viscoelastic Perfectly-Matched-Mayer for wave propagation analysis : formulation, implementation and application, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **383** (113913), 2021
- [13] Y. Zheng, X. Huang, *Anisotropic Perfectly Matched Layer for Elastic Waves in Cartesian and Curvilinear Coordinates* MIT report, 2002
- [14] F.X. Zhou, L.Y. Wang, An Efficient Unsplit Perfectly Matched Layer for Finite-Element Time-Domain Modeling of Elastodynamics in Cylindrical Coordinates, *Pure Appl. Geophys.* **177**, 4345-4363, 2020