

# Méthode probabiliste de localisation de fissures dans des rotors par inférence Bayésienne

D. Rossat<sup>1</sup> A. Damane<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Électricité de France (EDF R&D / ERMES), Palaiseau, France, donatien.rossat@edf.fr

<sup>2</sup> École Centrale de Lyon, Écully, France

---

**Résumé** — Le présent travail propose une méthode d'identification de fissures dans des rotors basée sur le cadre probabiliste de l'inférence Bayésienne. En se basant sur un modèle d'élément fini fissuré, cette méthode vise à déterminer la localisation et la profondeur probables d'une fissure, à partir de mesures de la réponse vibratoire du rotor, possiblement bruitées et en quantité limitée. La méthode proposée est notamment appliquée au cas réaliste d'un banc d'essais d'EDF R&D.

**Mots clés** — Problèmes inverses Bayésiens, Rotors fissurés, Dynamique non linéaire, Méthode HBM

---

## 1 Introduction

La présence de fissures dans les arbres de rotors constitue un défaut majeur pour les machines tournantes, en particulier pour les turbines à vapeur des centrales nucléaires de production d'électricité. Bien que rare, un tel défaut peut causer d'importants dommages à la ligne d'arbres, de longues périodes d'arrêt et *a fortiori* de lourdes répercussions économiques pour l'exploitant. Afin d'assurer la fiabilité de la machine, les rotors fissurés doivent être remplacés au cours d'opérations de maintenance, avant que la résistance de la ligne d'arbres ne soit complètement compromise. L'utilisation de la simulation numérique pourrait alors permettre d'améliorer la fiabilité des systèmes de surveillance, en rendant possible la détection et la localisation de fissures en conditions d'exploitation normales.

Au cours des dernières décennies, de nombreux travaux de nature expérimentale et numérique dédiés à la compréhension et à la modélisation du comportement dynamique de rotors fissurés ont pu être proposés dans la littérature. En particulier, Andrieux et Varé [1] ont proposé un modèle de rotor fissuré permettant de représenter la perte de rigidité induite par la présence d'une fissure par une raideur non linéaire, liant deux noeuds d'éléments finis de type poutre. Cette raideur non linéaire est identifiée à partir de calculs éléments finis 3D avec contact unilatéral au droit des lèvres de la fissure. Elle permet notamment de tenir compte de l'ouverture/re-fermeture partielle de la fissure, ainsi que le traitement de géométries génériques de sections fissurées. De ce fait, ce modèle se distingue d'une grande partie des modèles disponibles dans la littérature, s'appuyant sur des descriptions simplifiées. Enfin, El Arem et Maitournam [2] ont proposé un modèle d'élément fini fissuré, en s'inspirant du modèle introduit dans [1]. En comparaison à la représentation nodale de la section fissurée proposée dans [1], ce modèle d'élément fissuré offre un gain considérable en termes de coût de calcul et de robustesse sur le plan numérique, le passage d'un état sain à un état fissuré se faisant de manière continue.

En dépit de leur fidélité croissante, les modèles précités demeurent des représentations simplifiées de la réalité, ce qui implique l'existence d'incertitudes de sources variées. Par ailleurs, le développement de méthodes d'identification de fissures tenant compte de telles incertitudes n'a suscité qu'une très faible attention dans la littérature existante. Dans ce contexte, l'inférence Bayésienne offre un cadre général pour la résolution de problèmes inverses, tout en permettant une description des incertitudes relatives aux paramètres d'entrée basée sur la théorie des probabilités. Dès lors, le présent travail vise à proposer une méthode d'identification de fissure, permettant de déterminer la localisation et la profondeur probables d'une fissure à partir de mesures de la réponse vibratoire d'un rotor. En se basant sur le modèle d'élément fissuré introduit dans [2] et sur la méthode d'équilibrage harmonique (*Harmonic Balance Method* - HBM) [6], la localisation et la profondeur de la fissure sont représentées par des lois de probabilité, pouvant être mises à jour à partir de données de mesures bruitées et possiblement en nombre limité. La méthodologie proposée est notamment appliquée au cas réaliste d'un banc d'essais d'EDF R&D [3].

## 2 Modélisation du comportement dynamique de rotors fissurés

### 2.1 Modèle d'élément fini fissuré

#### 2.1.1 Identification d'une fonction de souplesse

Cette section vise à présenter succinctement la formulation du modèle d'élément fini fissuré utilisé dans le cadre du présent travail, à savoir le modèle introduit par El Arem et Maitournam dans [2]. On considère tout d'abord un solide  $\mathcal{V} = \mathcal{S} \times [0, 2L] \subset \mathbb{R}^3$  de longueur  $2L$  et de section (constante)  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ , supposée circulaire de diamètre  $D$  dans un souci de simplicité. L'extrémité gauche du solide  $\mathcal{V}$  (en  $z = 0$ ) est supposée encastree, tandis que l'extrémité droite (en  $z = 2L$ ) est soumise à une force  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^3$  et à un moment  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^3$ . Le solide  $\mathcal{V}$  est également supposé présenter une section fissurée en son milieu (*i.e.*, en  $z = L$ ). On considère ensuite un élément de type poutre (de Timoshenko) à deux noeuds de longueur  $2L_e$  de section circulaire de diamètre  $D$ , soumis aux mêmes conditions aux limites et au même chargement que le solide  $\mathcal{V}$ . Une schématisation des deux modèles ainsi décrits est donnée dans la Figure 1.

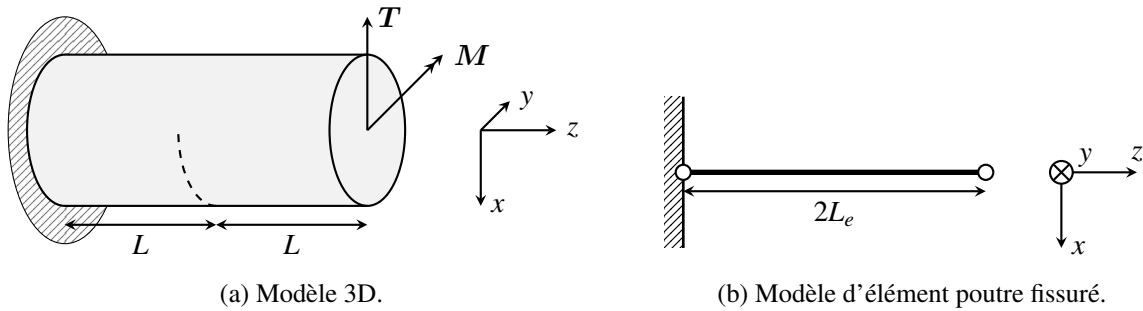


FIGURE 1 – Schématisation du modèle 3D et du modèle d'élément poutre fissuré associé.

Dès lors, la première étape de la formulation proposée dans [2] consiste à identifier l'énergie élastique du solide  $\mathcal{V}$  à celle de l'élément poutre précité. On considère alors les hypothèses suivantes :

- le matériau est linéaire élastique, de module d'Young  $E$ ,
- l'hypothèse des petits déplacements et des petites déformations est vérifiée,
- le contact au droit des lèvres de la fissure est unilatéral, sans frottement,
- le chargement imposé correspond à de la flexion pure, *i.e.*  $\mathbf{T} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{M} = (M_x, M_y, 0)$  avec  $M_x, M_y \in \mathbb{R}$ .

Sous ces hypothèses, l'énergie élastique complémentaire  $\mathcal{W}^*(\mathbf{M})$  du solide  $\mathcal{V}$  peut s'écrire comme suit [2] :

$$\mathcal{W}^*(\mathbf{M}) = \frac{L}{EI} \|\mathbf{M}\|^2 (1 + s(\phi)), \quad (1)$$

où  $I = \pi D^4/64$  désigne le moment quadratique de la section  $\mathcal{S}$ ,  $\phi = \arctan(M_y/M_x)$  l'angle du chargement, et  $s : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction nommée *fonction de souplesse*. Cette dernière fonction correspond à la contribution de la section fissurée à l'énergie complémentaire élastique totale du solide  $\mathcal{V}$  [1].

En particulier, on a  $s = 0$  pour un solide non fissuré, ainsi que pour un solide fissuré lorsque la fissure est complètement fermée. Il est important de souligner que la souplesse  $s$  ne dépend que de la direction du chargement  $\mathbf{M}$ . Ceci est dû au fait que l'énergie complémentaire  $\mathcal{W}^*$  est une fonction homogène de degré 2, comme démontré dans [1]. Par conséquent, il est possible de caractériser cette énergie en se restreignant à des combinaisons de moments  $(M_x, M_y)$  dans le cercle unité, *i.e.*, en posant  $\mathbf{M} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$  avec  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

Par ailleurs, [1] ont également démontré que l'énergie élastique complémentaire du solide  $\mathcal{V}$  peut être calculée via la formule de Clapeyron suivante :

$$\mathcal{W}^*(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\theta}^{(2L)} = \frac{1}{2} \left( M_x \theta_x^{(2L)} + M_y \theta_y^{(2L)} \right), \quad (2)$$

où  $\boldsymbol{\theta}^{(2L)} = (\theta_x^{(2L)}, \theta_y^{(2L)}, 0) \in \mathbb{R}^3$  désigne les rotations de la section en  $z = 2L$ .

Ainsi, pour un chargement  $\mathbf{M} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$  donné, l'énergie élastique complémentaire du solide  $\mathcal{V}$  est calculée en appliquant la formule de Clapeyron (2), en ayant préalablement calculé les rotations

$\theta^{(2L)}$  via un calcul aux éléments finis. En pratique, ce calcul est réalisé à l'aide du solveur aux éléments finis `code_aster` [7], en imposant des conditions de contact unilatéral au droit des lèvres de la fissure.

Une illustration de l'allure de la fonction de souplesse est donnée dans la Figure 2, dans le cas d'un cylindre de diamètre  $D = 0.2$  m et de longueur  $2L = 4D$ , disposant d'une fissure localisée en  $z = L$  et doté d'un fond droit de profondeur  $a = D/2$ . Cette fonction est calculée via la réalisation de calculs éléments finis non linéaires avec le solveur `code_aster` [7]. En particulier, on donne un aperçu du champ de déplacement du cylindre fissuré pour les cas  $\phi = \pi/2$  et  $\phi = 3\pi/2$ , correspondant respectivement à une fissure fermée et à une ouverture de fissure maximale.

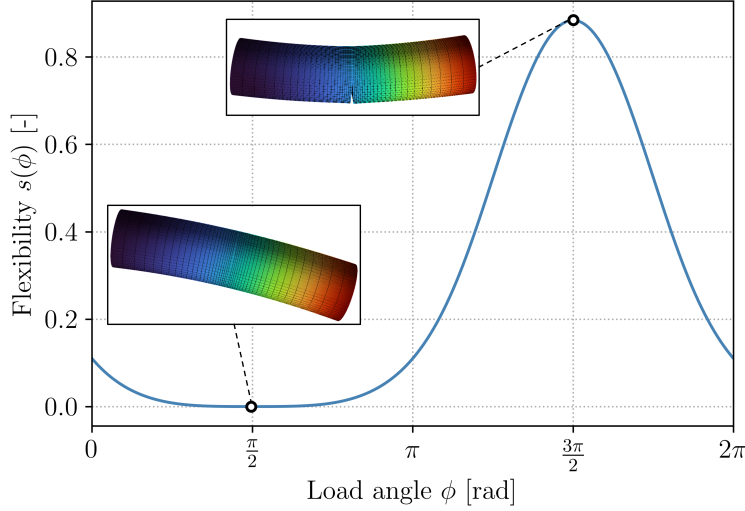


FIGURE 2 – Évolution de la fonction de souplesse en fonction de l'angle du chargement, dans le cas d'un élément présentant une fissure à fond droit de profondeur  $a = D/2$ .

### 2.1.2 Construction d'une matrice de rigidité élémentaire

La seconde étape de la formulation proposée dans [2] consiste en la construction d'un élément de type poutre tenant compte de la perte de rigidité associée à la section fissurée. Dans cette optique, on considère l'élément de type poutre à deux noeuds illustré dans la Figure 1, chaque noeud  $j \in \{1, 2\}$  disposant de degrés de liberté  $(u_x^{(j)}, u_y^{(j)}, \theta_x^{(j)}, \theta_y^{(j)})$  correspondant respectivement aux déplacements et aux rotations (de flexion) selon les directions  $x$  et  $y$ . On suppose également que cet élément dispose d'une section circulaire de diamètre  $D$ , et présente une fissure en son milieu (*i.e.* en  $z = L_e$  dans son repère local). On note  $\mathbf{u}_e = (u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, \theta_x^{(1)}, \theta_y^{(1)}, u_x^{(2)}, u_y^{(2)}, \theta_x^{(2)}, \theta_y^{(2)})^\top \in \mathbb{R}^8$  les degrés de liberté aux noeuds de l'élément, et  $\mathbf{F}_e \in \mathbb{R}^8$  les efforts internes correspondants. La matrice de rigidité de l'élément précité, notée  $\mathbf{K}_e(\mathbf{u}_e) \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ , vérifie alors la relation suivante :

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e(\mathbf{u}_e)\mathbf{u}_e. \quad (3)$$

Dès lors, en identifiant l'énergie élastique de l'élément poutre à l'énergie du cylindre de longueur  $2L$  et de diamètre  $D$  donnée dans l'équation (1), il est possible de montrer que la matrice de rigidité de l'élément précité s'écrit comme suit [2] :

$$\mathbf{K}_e(\mathbf{u}_e) = \mathbf{K}_e^{(0)} - \mathbf{K}_e^{(c)}(\alpha(\mathbf{u}_e)), \quad (4)$$

où  $\mathbf{K}_e^{(0)} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$  désigne la matrice de rigidité d'un élément de poutre de Timoshenko classique, et  $\mathbf{K}_e^{(c)}(\alpha(\mathbf{u}_e)) \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$  une matrice décrivant la perte de rigidité associée à la fissure, dont les coefficients sont détaillés dans [2]. Ces coefficients dépendent de manière non linéaire de l'angle de l'élément, défini par  $\alpha(\mathbf{u}_e) = \arctan\left(\frac{(\theta_y^{(2)} - \theta_y^{(1)})}{(\theta_x^{(2)} - \theta_x^{(1)})}\right)$ , et leur expression est déterminée à partir de la fonction de souplesse  $s$ , de la demi-longueur  $L$  du cylindre fissuré 3D et de la demi-longueur  $L_e$  de l'élément poutre fissuré.

## 2.2 Réponse dynamique d'un rotor fissuré en régime établi

On considère maintenant un modèle aux éléments finis d'un rotor, constitué d'éléments de type poutre, et comportant un élément poutre fissuré tel que décrit dans la Section 2.1. En se basant sur l'équation (4), il est possible de voir la contribution de la fissure comme un terme d'effort au second membre dépendant non-linéairement des déplacements du rotor. En effet, en supposant que le rotor est doté d'une vitesse de rotation constante  $\omega \geq 0$ , les équations du mouvement du rotor peuvent s'écrire comme suit, pour un instant  $t \geq 0$  donné :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{C} + \omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t, \omega) + \mathbf{f}^{(c)}(t, \omega, \mathbf{u}(t)), \quad (5)$$

où  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{G}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  désignent les matrices assemblées de masse, d'amortissement, de gyroscopie et de rigidité (du rotor sain),  $N \geq 1$  le nombre de degrés de liberté du problème,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^N$  les déplacements à l'instant  $t$ ,  $\mathbf{f}(t, \omega) \in \mathbb{R}^N$  les efforts externes et  $\mathbf{f}^{(c)}(t, \omega, \mathbf{u}(t)) \in \mathbb{R}^N$  un terme correspondant à la contribution de la fissure. Enfin, la notation  $\dot{\cdot}$  désigne l'opérateur de dérivation temporelle.

La contribution de la fissure peut être explicitée en considérant les 8 degrés de liberté  $I_e \subset \{1, \dots, N\}$  associés à l'élément fissuré. En effet, la restriction aux degrés de liberté  $I_e$  du terme  $\mathbf{f}^{(c)}$  au second membre de l'équation (5) peut s'écrire comme suit :

$$\left[ \mathbf{f}^{(c)}(t, \omega, \mathbf{u}(t)) \right]_{I_e} = \mathbf{K}_e^{(c)} (\alpha(\mathbf{u}_e(t)) - \omega t) \mathbf{u}_e(t), \quad (6)$$

tandis que  $\left[ \mathbf{f}^{(c)}(t, \omega, \mathbf{u}(t)) \right]_i = 0$  pour tout  $i \notin I_e$ , où  $\mathbf{u}_e(t) = [\mathbf{u}(t)]_{I_e} \in \mathbb{R}^8$  désigne les degrés de liberté associés aux noeuds de l'élément fissuré,  $\alpha(\mathbf{u}_e(t))$  l'angle de l'élément fissuré défini dans la Section 2.1.2, et  $\mathbf{K}_e^{(c)}$  la matrice élémentaire introduite dans l'équation (4).

Dans l'optique de déterminer directement la réponse en régime établi sans avoir à recourir à des méthodes d'intégration temporelle, on se propose d'utiliser la méthode d'équilibrage harmonique (ou HBM - *Harmonic Balance Method*), consistant en une transformation des équations du mouvement (5) dans le domaine fréquentiel. Cette méthode consiste à décomposer les déplacements en  $M \geq 1$  modes de Fourier comme suit :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^M (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)), \quad (7)$$

où  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_M, \mathbf{b}_M \in \mathbb{R}^N$ . En appliquant une transformation de Fourier (discrète) à l'équation (5) et en exploitant l'orthogonalité des fonctions de la base de Fourier, les équations du mouvement du rotor dans le domaine fréquentiel peuvent s'écrire sous la forme d'un système non linéaire :

$$\mathbf{Z}(\omega)\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{u}}, \omega), \quad (8)$$

où  $\mathbf{Z}(\omega) \in \mathbb{R}^{(2M+1)N \times (2M+1)N}$  désigne la *matrice de rigidité multi-harmonique*, et  $\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{a}_0^\top, \mathbf{a}_1^\top, \mathbf{b}_1^\top, \dots, \mathbf{a}_M^\top, \mathbf{b}_M^\top)^\top \in \mathbb{R}^{(2M+1)N}$  et  $\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{u}}, \omega) \in \mathbb{R}^{(2M+1)N}$  les déplacements et le second membre, exprimés dans la base de Fourier.

Ainsi, la méthode HBM permet le passage du système d'équations différentielles donné dans l'équation (5) à un système algébrique donné par l'équation (8). Elle donne par ailleurs directement accès aux composantes harmoniques des vibrations du rotor (*i.e.*,  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)_{1 \leq i \leq M}$ ), une fois la solution  $\hat{\mathbf{u}}$  déterminée pour une vitesse  $\omega$  donnée. Dans le cadre du présent travail, le système (8) est résolu numériquement sur une plage de vitesses  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ , via l'utilisation d'un schéma itératif de Newton couplé à une méthode de continuation par longueur d'arc.

## 3 Méthodologie probabiliste d'identification de fissure

### 3.1 Modélisation probabiliste et loi *a priori*

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité, où  $\mathcal{A}$  désigne une tribu sur  $\Omega$  et  $\mathbb{P}$  une mesure de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ . La méthodologie proposée dans le présent travail consiste à identifier la localisation et la géométrie d'une fissure à partir de mesures de la réponse vibratoire d'un rotor. Dans ce cadre, ces paramètres sont modélisés par des variables aléatoires, de manière à décrire les incertitudes associées par les biais de lois de probabilité.

On considère un modèle aux éléments finis d'un rotor comportant  $N_E \geq 1$  éléments de type poutre. La localisation possible de la fissure au sein de ce modèle est alors représentée par une variable aléatoire discrète  $E : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ , où  $\mathcal{E} \subset \{1, \dots, N_E\}$  désigne l'ensemble des indices des éléments finis pouvant être possiblement fissurés. Par ailleurs, dans un souci de simplicité, on ne considérera que des fissures à fond droit de manière à pouvoir paramétrer la géométrie de la section fissurée par un simple paramètre, à savoir la profondeur relative de la fissure, *i.e.*, le rapport de la profondeur du fond de fissure sur le diamètre de l'élément fissuré. Cette dernière est représentée par une variable aléatoire continue  $\Delta : \Omega \rightarrow [0, 1]$ .

De ce fait, la localisation et la profondeur d'une fissure sont données par le couple de variable aléatoires  $(\Delta, E)$ . Dans le cadre de l'inférence Bayésienne, la loi jointe de  $(\Delta, E)$ , connue sous le nom de *loi a priori*, représente le niveau de connaissance relatif à  $(\Delta, E)$  antérieur à toute observation de la réponse du rotor.

Dans ce contexte, la profondeur relative  $\Delta$  est supposée suivre une loi uniforme (continue) sur  $\mathcal{D} = [0, \delta_{\max}]$  (*i.e.*,  $\Delta \sim \mathcal{U}(\mathcal{D})$ ) avec  $\delta_{\max} \in ]0, 1[$ , tandis que la position  $E$  est supposée suivre une loi uniforme discrète sur  $\mathcal{E}$  (*i.e.*,  $E \sim \mathcal{U}(\mathcal{E})$ ). Sous cette dernière hypothèse, la loi de probabilité *a priori* de  $E$  est simplement donnée par  $\mathbb{P}(E = e) = 1/|\mathcal{E}|$  si  $e \in \mathcal{E}$  et 0 sinon,  $|\mathcal{E}|$  désignant le nombre d'éléments de  $\mathcal{E}$ . Par abus de langage et de notation, de manière à pouvoir manipuler conjointement des variables continues et discrètes, on confondra délibérément les notions de loi de probabilité et de *fonction de masse* dans le cas d'une variable discrète, et ce de manière analogue en ce qui concerne la *densité de probabilité* d'une variable continue. Dans cette optique, on notera  $\pi_E(e) = \mathbb{P}(E = e)$  la loi *a priori* de  $E$ . De même, la loi *a priori* de  $\Delta$  est définie via la densité  $\pi_\Delta(\delta) = \mathbf{1}_{\mathcal{D}}(\delta)$ , pour tout  $\delta \in [0, 1]$ ,  $\mathbf{1}_{\mathcal{D}}$  désignant la fonction indicatrice de  $\mathcal{D}$ .

En supposant de plus que les variables  $\Delta$  et  $E$  sont mutuellement indépendantes, la loi jointe *a priori* de  $(\Delta, E)$  est entièrement caractérisée par le produit suivant, pour tout couple  $(\delta, e) \in \mathcal{D} \times \mathcal{E}$  :

$$\pi_{(\Delta, E)}(\delta, e) = \pi_\Delta(\delta)\pi_E(e). \quad (9)$$

### 3.2 Inférence Bayésienne et loi *a posteriori*

Soit  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une variable aléatoire (continue) représentant des quantités d'intérêt observables relatives à la réponse vibratoire du rotor. Ces dernières correspondent typiquement à des observations des  $m \geq 1$  premières composantes harmoniques des déplacements horizontaux et verticaux du rotor, au droit de plusieurs capteurs et pour plusieurs vitesses de rotation.

En se basant sur la modélisation décrite dans la Section 2, le modèle aux éléments finis du rotor peut être vu comme une fonction (déterministe)  $\mathcal{M} : \mathcal{D} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  des variables aléatoires  $(\Delta, E)$ , qui à une réalisation  $(\delta, e) \in \mathcal{D} \times \mathcal{E}$  associe le vecteur  $\mathcal{M}(\delta, e) \in \mathbb{R}^n$ , correspondant à la réponse vibratoire simulée du rotor, via la résolution numérique des équations du mouvement du rotor via la méthode HBM, en considérant une fissure à fond droit de profondeur relative  $\delta$  introduite dans l'élément fini  $e$  du modèle.

Ensuite, on se propose d'établir une relation entre les observables  $\mathbf{Y}$  et les paramètres  $(\Delta, E)$  associés à la fissure, via l'adoption d'hypothèses relatives à l'écart existant entre les observations et la réponse du modèle. Pour ce faire, étant donné une réalisation  $(\delta, e) \in \mathcal{D} \times \mathcal{E}$  de  $(\Delta, E)$ , on adopte un modèle de bruit d'observation additif Gaussien, consistant à définir la loi conditionnelle de  $\mathbf{Y}$  sachant  $(\Delta, E) = (\delta, e)$  comme suit :

$$\mathbf{Y} | (\Delta, E) = (\delta, e) \sim \mathcal{N}(\mathcal{M}(\delta, e), \Sigma), \quad (10)$$

où  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  désigne la matrice de covariance du bruit d'observation, et où la notation  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  désigne la loi Gaussienne de moyenne  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$  et de covariance  $\Sigma$ . Autrement dit, l'équation (10) revient à supposer que l'écart entre les observations et la réponse du modèle est une variable Gaussienne centrée sur la réponse du modèle. Étant donné des observations  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  fixées, la densité conditionnelle de  $\mathbf{Y}$  sachant  $(\Delta, E) = (\delta, e)$  peut alors être vue comme une fonction de  $(\delta, e)$ , connue sous le nom de *fonction de vraisemblance* dans le cadre de l'inférence Bayésienne :

$$\mathcal{L}(\delta, e) = \mathcal{N}(\mathbf{y} | \mathcal{M}(\delta, e), \Sigma) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathcal{M}(\delta, e))^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{y} - \mathcal{M}(\delta, e))\right), \quad (11)$$

où  $\mathcal{N}(\cdot | \boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  désigne la densité associée à la loi Gaussienne  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ . Il est à noter qu'ici, la matrice de covariance  $\Sigma$  est supposée connue, mais il est tout à fait possible d'adopter des modèles d'écarts tenant

compte d'une covariance inconnue. En pratique, on supposera cette matrice diagonale, en posant  $\Sigma = \gamma^2 \text{diag}(|y_1|^2, \dots, |y_n|^2)$ , où  $\gamma > 0$  désigne le coefficient de variation du bruit d'observation, et  $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$  les composantes des données observées  $\mathbf{y}$ .

Dès lors, étant donné des observations  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  de la réponse du rotor, le théorème de Bayes permet de déterminer la loi conditionnelle des paramètres  $(\Delta, E)$  sachant la réalisation  $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$  :

$$\pi_{(\Delta, E)|\mathbf{Y}}(\delta, e|\mathbf{y}) = \frac{\pi_{(\Delta, E)}(\delta, e)\mathcal{L}(\delta, e)}{C}, \quad (12)$$

où  $C > 0$  désigne une constante de normalisation, usuellement connue sous le nom d'*évidence* :

$$C = \sum_{e \in \mathcal{E}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\delta, e) \pi_{(\Delta, E)}(\delta, e) d\delta. \quad (13)$$

L'équation (12) caractérise la loi *a posteriori* des paramètres  $(\Delta, E)$ , correspondant au niveau d'information disponible une fois que des mesures de la réponse du rotor ont été collectées. En particulier, il est possible de déduire la loi de probabilité *a posteriori* de la localisation de l'élément fissuré, via une opération de marginalisation :

$$\pi_{E|\mathbf{Y}}(e|\mathbf{y}) = \int_{\mathcal{D}} \pi_{(\Delta, E)|\mathbf{Y}}(\delta, e|\mathbf{y}) d\delta. \quad (14)$$

L'équation (14) correspond à la position probable de la fissure après avoir observé la réponse du rotor. Elle constitue un indicateur aidant à la détection et à la localisation d'une fissure dans le rotor.

### 3.3 Échantillonnage de la loi *a posteriori* et méta-modélisation

En pratique, la loi *a posteriori* associée à l'équation (12) n'est pas connue analytiquement, notamment du fait de la présence de la constante de normalisation donnée dans l'équation (13). De ce fait, il est possible d'avoir recours à des algorithmes de simulation de type *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC), permettant de générer des échantillons distribués selon la loi *a posteriori*. Dans cette optique, on utilise l'algorithme *Subset Simulation* introduit dans [5] afin de réaliser cette tâche.

Toutefois, cet algorithme requiert un nombre important d'appels au modèle éléments finis ( $O(10^{4-5})$ ), ce qui empêche son application directe du fait du coût numérique associé. Dès lors, on se propose de remplacer le modèle aux éléments finis par un *méta-modèle*, c'est-à-dire une par approximation rapide à évaluer basée sur une formulation mathématique.

À cet égard, le présent travail utilise des *chaos polynomiaux* [4], à savoir des développements en série tronqués de polynômes orthogonaux par rapport aux lois de probabilité des paramètres d'entrée. Du fait du caractère discret de la position  $E$  de la fissure, il est possible de procéder à une séparation des variables de position et de profondeur : pour tout  $e \in \mathcal{E}$ , la fonction  $\mathcal{M}_e : \delta \mapsto \mathcal{M}(\delta, e)$  est approximée par un chaos polynomial  $\hat{\mathcal{M}}_e$  univarié. La famille de polynômes ainsi utilisée correspond aux polynômes de Legendre, la loi *a priori* de la profondeur  $\Delta$  étant une loi uniforme (continue). Pour chaque  $e \in \mathcal{E}$ , le chaos polynomial  $\hat{\mathcal{M}}_e$  est construit en utilisant la procédure adaptative proposée dans [4], basée sur la méthode de régression creuse *Least Angle Regression* (LARS). Enfin, on construit une approximation  $\hat{\mathcal{M}} : \mathcal{D} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  du modèle  $\mathcal{M}$ , en posant  $\hat{\mathcal{M}}(\delta, e) = \hat{\mathcal{M}}_e(\delta)$  pour tout  $(\delta, e) \in \mathcal{D} \times \mathcal{E}$ .

## 4 Applications

La méthodologie présentée dans la Section 3 est appliquée au cas réaliste du banc EUROPE, banc d'essais d'EDF R&D ayant fait l'objet de campagnes expérimentales dédiées à l'étude du comportement dynamique de rotors fissurés [3], et dont un aperçu est donné dans la Figure 3.

L'enjeu de cette application consiste à retrouver la position et la profondeur d'une fissure introduite dans le rotor du banc EUROPE, en se basant sur des données issues d'un essai de ralentissement lent. La fissure introduite présente un fond elliptique d'une profondeur de 41.2% de l'arbre. Dans ce cadre, un nombre restreint de capteurs est utilisé, à savoir quatre capteurs localisés au voisinage des deux paliers du banc. Les données de mesures utilisées correspondent aux composantes harmoniques 1 et

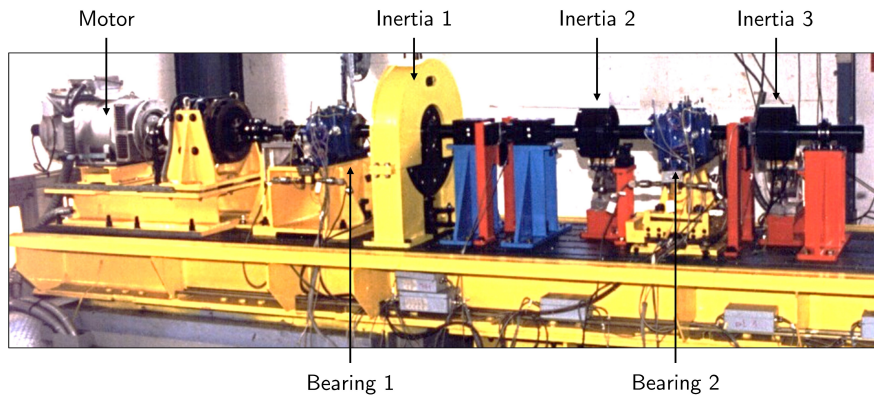


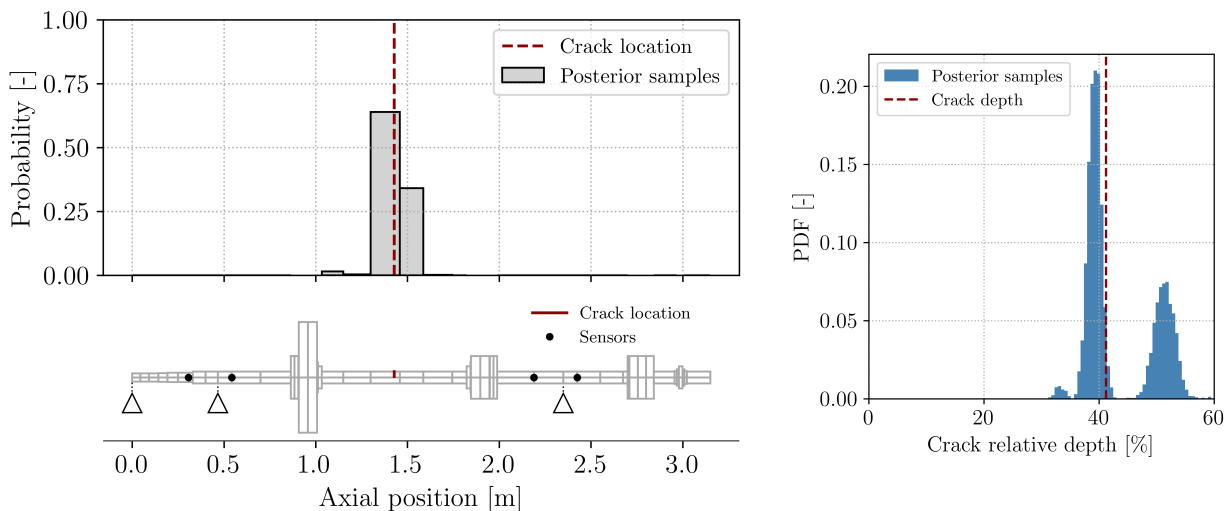
FIGURE 3 – Photographie du banc EUROPE, dans sa configuration fissurée (© EDF R&D).

2 des déplacements horizontaux et verticaux du rotor, au voisinage de la première vitesse critique du banc ( $\approx 1115 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ ) et de la moitié de cette dernière.

Par ailleurs, le modèle aux éléments finis utilisé a été recalé de manière à pouvoir estimer correctement les deux premières vitesses critiques et les 4 premiers modes de flexion du rotor sain uniquement. Ce choix est fait de manière à évaluer l'applicabilité de la méthode proposée à des modèles n'ayant pas fait l'objet de recalage spécifique à la présence de fissures.

Les résultats d'identification obtenus, incluant les lois marginales *a posteriori* de la position et de la profondeur de la fissure, sont présentés dans la Figure 4. La méthode permet d'identifier la localisation de la fissure de manière satisfaisante, la position la plus probable de la fissure correspondant aux deux éléments finis du modèle les plus proches de la section fissurée du banc.

De plus, la loi *a posteriori* de la profondeur de fissure présente deux modes, possiblement imputables au bruit de mesure ainsi qu'à l'existence de biais de modélisation, possiblement dus à certaines hypothèses simplificatrices, dont la forme de la fissure modélisée (la méthode supposant un fond droit). Le mode le plus probable correspond à une profondeur d'environ 39.5%, donc légèrement inférieure à la profondeur réelle de la fissure (41.2%). Ceci est cohérent avec le fait qu'une fissure à fond droit induit une perte de rigidité plus importante qu'une fissure à fond elliptique de même profondeur.



(a) Loi *a posteriori* de la localisation.

(b) Loi *a posteriori* de la profondeur.

FIGURE 4 – Résultats d'identification dans le cas du banc EUROPE.

Enfin, les prédictions *a posteriori* de la composante harmonique d'ordre 2 des déplacements du rotor au droit des capteurs utilisés sont présentées dans la Figure 5. Les prédictions du modèle permettent bien de couvrir les déplacements mesurés, du fait des incertitudes associées à la localisation et à la profondeur de la fissure identifiée.

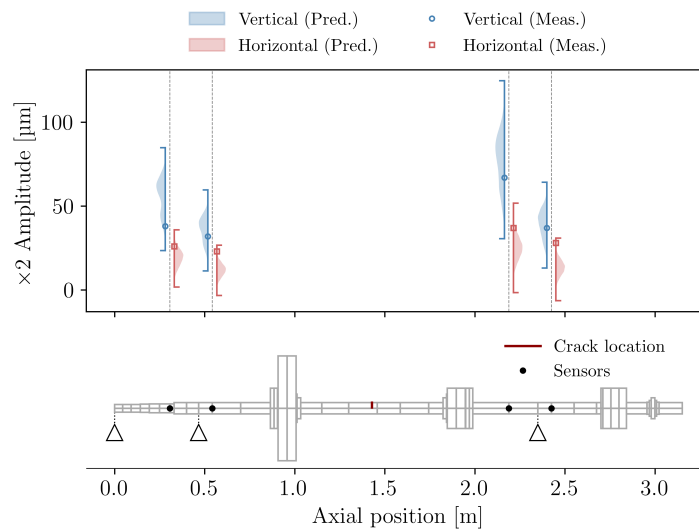


FIGURE 5 – Prédications *a posteriori* de la composante harmonique 2 des déplacements du rotor au droit des capteurs du banc EUROPE, pour une vitesse de rotation de  $557.5 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ .

## 5 Conclusion et perspectives

Le présent travail a présenté une méthode numérique probabiliste d'identification de fissures dans des rotors, basée sur le cadre de l'inférence Bayésienne. Elle repose sur un modèle d'élément fini fissuré permettant de tenir compte du mécanisme d'ouverture/re-fermeture de fissure, ainsi que sur une description probabiliste des incertitudes relatives à la localisation et à la profondeur de la fissure. Ces incertitudes sont mises à jour à partir de mesures de la réponse vibratoire du rotor, possiblement bruitées et disponibles en nombre limité. La méthode proposée a pu être validée via son application au cas réaliste d'un banc d'essais d'EDF R&D ayant fait l'objet de campagnes expérimentales dédiées à l'étude du comportement dynamique de rotors fissurés.

Une première perspective soulevée par le présent travail consiste en l'extension de la méthode proposée à des problèmes transitoires : en effet, les réponses simulées par le modèle numérique correspondent à des solutions en régime établi, déterminées via l'utilisation de la méthode d'équilibrage harmonique (HBM). De même, des méthodes d'inférence Bayésienne séquentielle pourraient être utilisées dans ce contexte, afin de disposer d'une méthode de détection de fissure "en temps réel", en mettant à jour les incertitudes relatives à la position et à la profondeur d'une fissure au cours du temps. Ensuite, il serait également possible d'étendre la méthodologie au cas de plusieurs fissures. Enfin, la méthode d'identification pourrait être étendue via le paramétrage de géométries de fissures plus générales, ces dernières pouvant être représentées par le modèle d'élément fini fissuré utilisé [2].

## Références

- [1] Andrieux, S., Varé, C. *A 3D cracked beam model with unilateral contact. Application to rotors*. European Journal of Mechanics - A/Solids. Vol. 21. 793-810. 2002.
- [2] El Arem, S., Maitournam, H. *A cracked beam finite element for rotating shaft dynamics and stability analysis.*. Journal of Mechanics of Materials and Structures. Vol. 3. 893-910. 2008.
- [3] Stoisser, C. M., Audebert, S. *A comprehensive theoretical, numerical and experimental approach for crack detection in power plant rotating machinery*. Mechanical Systems and Signal Processing. Vol. 22. 818-844. 2008.
- [4] Blatman, G., Sudret, B. *Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression*. Journal Of Computational Physics. Vol. 230. 2345-2367. 2011.
- [5] Betz, W., Papaioannou, I., Beck, J. L., Straub D. *Bayesian inference with Subset Simulation : Strategies and improvements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 331. 72-93. 2018.
- [6] Sinou, J.-J., Denimal, E. *Reliable crack detection in a rotor system with uncertainties via advanced simulation models based on kriging and Polynomial Chaos Expansion*. European Journal of Mechanics - A/Solids. Vol. 92. 104451. 2022.
- [7] Électricité de France. *code\_aster - Analysis of Structures and Thermomechanics for Studies and Research*. 1989–2025.