

Une implémentation massivement parallèle de la méthode de champ de phase pour simuler la fissuration des structures hétérogènes sur des supercalculateurs

Z. Chafia¹, J. Yvonnet¹, J. Bleyer², S. Vincent¹, S. El Ouafa¹

¹ MSME, Université Gustave Eiffel, {zakaria.chafia, julien.yvonnet}@univ-eiffel.fr

² NAVIER, Ecole des Ponts ParisTech, jeremy.bleyer@enpc.fr

Résumé — Une implémentation massivement parallèle et efficace de la méthode de champ de phase permettant la simulation de l'initiation et de la propagation de fissures dans des structures quasi-fragiles fortement hétérogènes est proposée. Cette implémentation est capable de modéliser des structures avec plusieurs milliards de degrés de liberté, dans le cadre de la méthode des éléments finis utilisant des maillages structurés tridimensionnels, sur des supercalculateurs. Elle est adaptée pour les machines à mémoire distribuée et utilise l'interface MPI pour la répartition de la charge de travail et la communication de données entre les processus. Ce contexte est illustré par la simulation de la fissuration dans un modèle géométrique réaliste d'un béton léger obtenu par la microtomographie (XR- μ CT).

Mots clés — Calcul haute performance, Endommagement et fissuration, Champs de phase, Matériaux composites.

1 Introduction

Simuler l'amorçage et la propagation des fissures dans des matériaux fortement hétérogènes et des structures de grande dimension constitue un défi majeur en ingénierie. Les composites et les matériaux architecturés présentent des microstructures complexes qui influencent fortement leur réponse mécanique à l'échelle macroscopique. Dans ce contexte, la méthode de champ de phase [1] s'est imposée comme une approche de calcul puissante, offrant un cadre variationnel robuste pour modéliser l'endommagement et la fissuration des structures. Elle permet de traiter l'initiation, la propagation et le branchement des fissures dans des géométries complexes. Néanmoins, dans le cadre de la méthode des éléments finis, l'application de cette approche à des problèmes de grande taille demeure limitée, car des simulations précises requièrent généralement des maillages très fins et de petits incréments de chargement.

Plusieurs stratégies ont été développées pour améliorer l'efficacité des simulations de la fissuration dans les structures hétérogènes. Parmi ces stratégies figure le raffinement de maillage adaptatif [2,3,4]. En raffinant localement le maillage au voisinage des fissures en évolution, ces techniques peuvent réduire considérablement le temps de calcul et l'utilisation de la mémoire. Les méthodes basées sur l'homogénéisation numérique constituent une alternative pour simuler efficacement la fissuration à l'échelle de la structure en tenant compte de la microstructure et de l'évolution des microfissures, voir par exemple [5,6,7,8,9]. Les approches multi-échelles, basées sur le pontage des échelles, peuvent être utilisées pour modéliser l'endommagement des structures. Dans ce contexte, la réduction des coûts de calcul repose sur l'utilisation de maillages grossiers pour modéliser l'endommagement à l'échelle macroscopique et de maillages fins dans les zones d'intérêt afin de capturer avec précision la nucléation des fissures, voir notamment [10,11]. Une autre façon de relever ce défi consiste à effectuer des simulations numériques directes (DNS) en utilisant le calcul haute performance (HPC), ce qui constitue l'objet de cette contribution. Une implémentation massivement parallèle de la méthode de champs de phase est proposée pour simuler, avec une efficacité accrue, l'initiation et la propagation de fissures dans des structures fortement hétérogènes [12]. Dans ce cadre, des supercalculateurs peuvent être exploités, de manière efficace, pour modéliser l'endommagement et la fissuration dans des structures hétérogènes avec plusieurs milliards de degrés de liberté.

2 La méthode de champs de phase pour la fissuration des matériaux

Dans ce travail, la simulation de l'initiation et de la propagation de fissures est réalisée par la méthode de champs de phase [1,13,14]. Cette approche, basée sur la minimisation de l'énergie totale, est largement utilisée pour décrire divers phénomènes de fissuration et a démontré son efficacité pour modéliser l'endommagement des matériaux sous différents régimes de chargement, offrant ainsi une meilleure compréhension du comportement endommageable des matériaux et des structures. L'énergie totale est définie, sur un domaine ouvert Ω , par :

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, d) = \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}(\varepsilon(\mathbf{u}), d) d\Omega + \int_{\Omega} \psi_f(d) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega_F} \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{u} dS, \quad (1)$$

où \mathbf{u} est le champs de déplacement, $\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla(\mathbf{u}) + \nabla(\mathbf{u})^T)$ est le champs de déformation et d est la variable d'endommagement. $\psi_{\varepsilon}(\mathbf{u}, d)$ représente la densité de l'énergie élastique et $\psi_f(d)$ est la densité de l'énergie de fissuration. \mathbf{f} et \mathbf{F}^* sont les forces de volume et les forces de surface appliquées sur le bord $\partial\Omega_F$, respectivement.

Dans ce travail, l'algorithme de la minimisation alternée de l'énergie totale (1) est adopté [13]. Minimiser (1) par rapport au champ d'endommagement d mène aux équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$\begin{cases} (1-d)\mathcal{H} - \psi_c(d - \ell_0^2 \Delta d) = 0 & \text{in } \Omega, \\ d = 1 & \text{on } \Gamma, \\ \nabla d \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}, \quad (2)$$

où $\Delta(\cdot)$ est l'opérateur Laplacien, Γ est la surface de fissure, \mathbf{n} est le vecteur normal à la frontière $\partial\Omega$, ψ_c est l'énergie de fissuration critique et \mathcal{H} représente l'histoire d'énergie assurant la condition d'irréversibilité définie par [13] :

$$\mathcal{H} = \max_{\tau \in [0, t]} [\langle \psi^+(\varepsilon; \tau) - \psi_c \rangle_+], \quad (3)$$

où ψ^+ représente la partie positive de l'énergie élastique définie dans [13].

La forme faible du problème d'endommagement associée aux (2) est :

$$\int_{\Omega} (\mathcal{H} + \psi_c) d \delta d + \psi_c \ell_0^2 \nabla d \cdot \nabla(\delta d) d\Omega = \int_{\Omega} \mathcal{H} \delta d d\Omega, \quad (4)$$

où $\nabla(\cdot)$ est l'opérateur gradient. La discrétisation de (4), dans le cadre de la méthode des éléments finis, conduit au système d'équations suivant :

$$\mathbf{K}_d d = F_d, \quad (5)$$

avec

$$\mathbf{K}_d = \int_{\Omega} (\mathcal{H} + \psi_c) N_d^T N_d + \psi_c \ell_0^2 B_d^T B_d d\Omega, \quad F_d = \int_{\Omega} N_d^T \mathcal{H} d\Omega, \quad (6)$$

où N_d et B_d représentent les fonctions de forme et leurs dérivées associées aux problème d'endommagement.

Minimiser (1) par rapport au champ de déplacement \mathbf{u} mène aux équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^* & \text{on } \partial\Omega_u, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{F}^* & \text{on } \partial\Omega_F. \end{cases} \quad (7)$$

La forme faible du problème mécanique associée aux (7) est :

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}) : \mathcal{C}(d) : \varepsilon(\delta \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \mathbf{F}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS. \quad (8)$$

où $\mathcal{C}(d)$ est la matrice de rigidité endommagée. La construction de $\mathcal{C}(d)$ et l'algorithme de résolution sont détaillés dans [15]. La discrétisation de (8) conduit au système d'équations suivant :

$$\mathbf{K}_u \mathbf{u} = F_u, \quad (9)$$

avec

$$\mathbf{K}_u = \int_{\Omega} B_u^T \mathcal{C}(d) B_u d\Omega, \quad F_u = \int_{\Omega} N_u^T \mathbf{f}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} N_u^T \mathbf{F}^* dS. \quad (10)$$

où N_u et B_u représentent les fonctions de forme et leurs dérivées associées aux problème de déplacement.

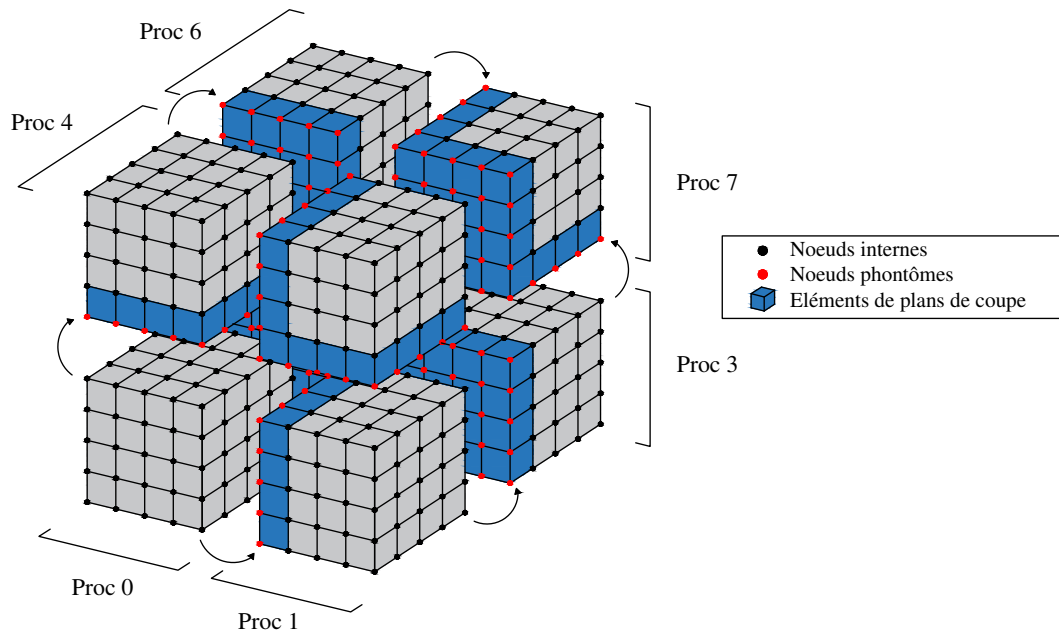


FIGURE 1 – Décomposition de domaine tridimensionnelle.

3 Une implémentation parallèle de la méthode de champs de phase

Malgré sa puissance, la méthode de champ de phase présente un inconvénient majeur lorsqu'elle est mise en œuvre avec la méthode des éléments finis. L'emploi de maillages plus fins et de pas de chargement plus petits, nécessaire pour obtenir des résultats précis, conduit à des simulations très coûteuses en ressources de calcul, en particulier lorsqu'il s'agit de grandes structures tridimensionnelles. Pour lever cette limitation, la parallélisation massive des calculs, basée sur la décomposition de domaine, exploitant des supercalculateurs est adoptée.

3.1 Architecture HPC et interface MPI

Dans ce travail, des architectures à mémoire distribuée sont considérées en utilisant l'interface MPI [16]. Cette bibliothèque assure à la fois les communications point à point et collectives entre processus distribués. Ce cadre correspond à un calcul parallèle où plusieurs processus opèrent indépendamment et disposent de leur propre mémoire. Chaque processus n'accède qu'à sa mémoire locale et la communication entre processus s'effectue généralement par échange de messages. Les données étant explicitement envoyées depuis la mémoire d'un processus et reçues par un autre.

3.2 Décomposition de domaine

La décomposition de domaine est une étape clé dans l'exécution d'algorithmes parallèles sur un supercalculateur. Cette tâche est nécessaire pour décomposer les opérations en plusieurs sous-opérations traitées simultanément. L'idée principale de cette décomposition est de diviser le domaine spatial en plusieurs sous-domaines plus petits et d'attribuer à chaque processus une tâche indépendante sur un sous-domaine spécifique, garantissant ainsi une charge de travail bien équilibrée pour des calculs plus efficaces. Dans ce travail, dans le cadre de la méthode des éléments finis, des maillages structurés tridimensionnels avec des éléments finis à 8 nœuds sont considérés. Dans ce contexte, la décomposition en blocs tridimensionnels est employée (voir Fig. 1). Le maillage structuré et la décomposition spatiale sont créés à l'aide de l'outil Data Management of Distributed Array (DMDA) de la bibliothèque PETSc [17].

3.3 Solveurs et préconditionneurs parallèles

La simulation de la fissuration à l'aide de la méthode de champs de phase, dans le cadre de la méthode des éléments finis, conduit à la résolution de grands systèmes linéaires creux avec un très petit nombre de valeurs non nulles par rapport à leur taille. La majeure partie du temps de calcul est consacrée à la résolution de ces systèmes linéaires de matrices et de vecteurs assemblés. Les opérations effectuées dans la résolution des systèmes d'équations (5) et (9) peuvent consommer jusqu'à 80% du temps de calcul total, ce qui en fait la partie essentielle des simulations numériques. Dans ce contexte, les solveurs itératifs sont considérés. Ces solveurs construisent des approximations de plus en plus précises de la solution à travers une séquence d'itérations jusqu'à atteindre un critère de convergence. Ils effectuent des opérations telles que des produits matrice-vecteur, des produits scalaires et des combinaisons linéaires. Ils sont capables de résoudre efficacement des systèmes linéaires creux, symétriques définis positifs et asymétriques, nécessitent moins d'allocation de mémoire et sont hautement parallélisables. Dans ce contexte, la bibliothèque PETSc [17] est utilisée pour résoudre les systèmes linéaires obtenus. La bibliothèque fournit un large éventail de solveurs parallèles, y compris les méthodes de sous-espace de Krylov. Dans ce travail, une version améliorée de la méthode BiCGStab (IBiCGStab) [18] est utilisée. Cette méthode est capable de résoudre des systèmes linéaires volumineux et bien adaptée à des machines à mémoire distribuée, le type d'architecture de supercalculateur utilisé dans ce travail.

Les solveurs itératifs constituent des outils puissants pour résoudre des systèmes linéaires à grande échelle en parallèle, mais ils sont très sensibles au conditionnement. Afin d'accélérer la convergence et d'améliorer l'efficacité des solveurs itératifs, la bibliothèque PETSc [17] propose un grand nombre de préconditionneurs. Dans la mise en œuvre proposée, le préconditionneur multi-grille algébrique (AMG) [19] est considéré.

4 Analyse de performance

La performance de l'implémentation parallèle proposée est évaluée via l'étude de sa scalabilité, qui caractérise la capacité à accroître la vitesse de calcul avec le nombre de processus, en utilisant le supercalculateur Jean Zay de l'IDRIS. Deux indicateurs sont utilisés à cette fin : l'accélération (speed-up) et l'efficacité. Cette analyse porte sur l'étude des scalabilités faible et forte au moyen d'un ensemble de simulations réalisées sur une structure cubique (voir [12] pour plus de détails). Les tableaux 1 et 2 présentent, respectivement, les configurations utilisées et les temps de calcul pour l'analyse des scalabilités faible et forte. $N^\circ \text{El}/\text{dir}$ désigne le nombre d'éléments par direction, et $N^\circ \text{DOFs}/d$ et $N^\circ \text{DOFs}/u$ représentent les nombres de degrés de liberté des vecteurs d'endommagement d et de déplacement u dans (5) et (9), respectivement.

TABLE 1 – Configurations utilisées pour l'analyse de la scalabilité faible.

$N^\circ \text{El}/\text{dir}$	$N^\circ \text{DOFs}/d$	$N^\circ \text{DOFs}/u$	$N^\circ \text{Procs}$	Workload (w^3)	Time (s)
239	13 824 000	41 472 000	40	69.88	297.15
302	27 818 127	83 454 381	80	70.09	302.69
380	55 306 341	165 919 023	160	70.00	301.38
479	110 592 000	331 776 000	320	70.03	300.72
603	220 348 864	661 046 592	640	69.97	304.11
760	440 711 081	1 322 133 243	1280	70.00	302.97
957	879 217 912	2 637 653 736	2560	69.96	302.54
1206	1 758 416 743	5 275 250 229	5120	69.97	307.16
1520	3 518 743 761	10 556 231 283	10240	70.00	337.01

TABLE 2 – Configurations utilisées pour l'analyse de la scalabilité forte.

$N^\circ \text{El}/\text{dir}$	$N^\circ \text{DOFs}/d$	$N^\circ \text{DOFs}/u$	$N^\circ \text{Procs}$	Workload (w^3)	Time (s)
603	220 348 864	661 046 592	640	69.97	304.11
			1280	55.54	153.64
			2560	44.08	77.58
			3840	38.51	52.29
			5120	34.99	40.25
			6400	32.48	32.66
			10240	27.77	23.06

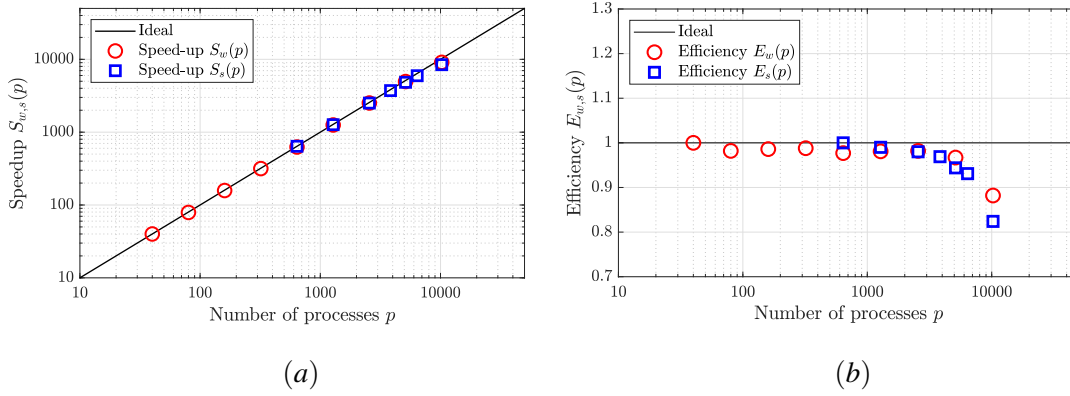


FIGURE 2 – (a) Speed-up ; (b) Efficacité (bleu : scalabilité forte ; rouge : scalabilité faible).

Les Figs. 2a et 2b illustrent les résultats des scalabilités faible et forte, qui mettent en évidence l'efficacité de l'implémentation parallèle de la méthode de champ de phase proposée. Concernant la scalabilité forte, cette implémentation présente de très bonnes performances : l'évolution du speed-up obtenue est très proche de l'évolution idéale. L'efficacité atteint 97% pour un calcul sur 6400 processus avec 33^3 éléments par processus, et demeure supérieure à 80% pour un calcul sur 10240 processus avec 23^3 éléments par processus. Ces résultats s'expliquent par une répartition bien équilibrée de la charge de travail et des échanges de données optimisés entre les processus. L'analyse de la scalabilité faible montre que le cadre proposé maintient un niveau de performance constant lorsque la taille du problème augmente.

5 Application numérique

Dans cette application, la fissuration dans un modèle géométrique réaliste de microstructure obtenu par la microtomographie à rayons X (XR- μ CT) d'un béton léger est simulée (voir Fig. 3). Pour plus de détails sur le modèle numérique, voir [20]. Un pore centré de rayon $R = 0.15$ mm est ajouté afin de forcer l'amorçage de la fissure. Les propriétés mécaniques des phases sont choisies comme suit : pour la matrice, $\lambda_m = 30$ kN/mm², $\mu_m = 20$ kN/mm² et $G_c^m = 8 \times 10^{-8}$ kN/mm, et pour les granulats, $\lambda_i = 300$ kN/mm², $\mu_i = 200$ kN/mm² et $G_c^i = 8 \times 10^{-6}$ kN/mm. La structure est composée de 500^3 éléments (125×10^6), de dimensions $L \times H \times l = 1 \times 1 \times 1$ mm³. La taille des éléments est $h = 0.0002$ mm et la longueur caractéristique est $\ell_0 = 2h$. Pour le problème de déplacement, la face inférieure de la structure est encastree (bloquée dans toutes les directions), toutes les faces de la structure sont bloquées selon les directions x et y et un déplacement selon la direction z est imposé sur la face supérieure en considérant des pas de temps constants $\Delta u = 4 \times 10^{-7}$ mm. La simulation est réalisée sur le supercalculateur Jean-Zay avec 6000 processus.

Les Figs. 4a, 4b et 4c illustrent les états d'endommagement de la structure aux pas de temps $\bar{U} = 157 \times 10^{-6}$ mm, $\bar{U} = 178 \times 10^{-6}$ mm et $\bar{U} = 200 \times 10^{-6}$ mm, respectivement. La Fig. 4d présente une coupe de la Fig. 4c. La courbe force-déplacement est présentée dans la Fig. 5. Cet exemple montre la capacité de l'implémentation proposée à modéliser l'initiation et la propagation de fissures dans des structures fortement hétérogènes, en particulier des structures réelles obtenues par des techniques d'imagerie expérimentale. Le cadre développé peut gérer la nucléation de plusieurs fissures en différents emplacements et leur coalescence. Le temps cumulé de résolution des problèmes d'endommagement et de déplacement sont respectivement de 102 s (1.7 min) et 3220 s (53.7 min). Le temps d'exécution de l'ensemble des incréments de chargement est de 4150 s (69.1 min), contre environ 10 mois en exécution séquentielle.

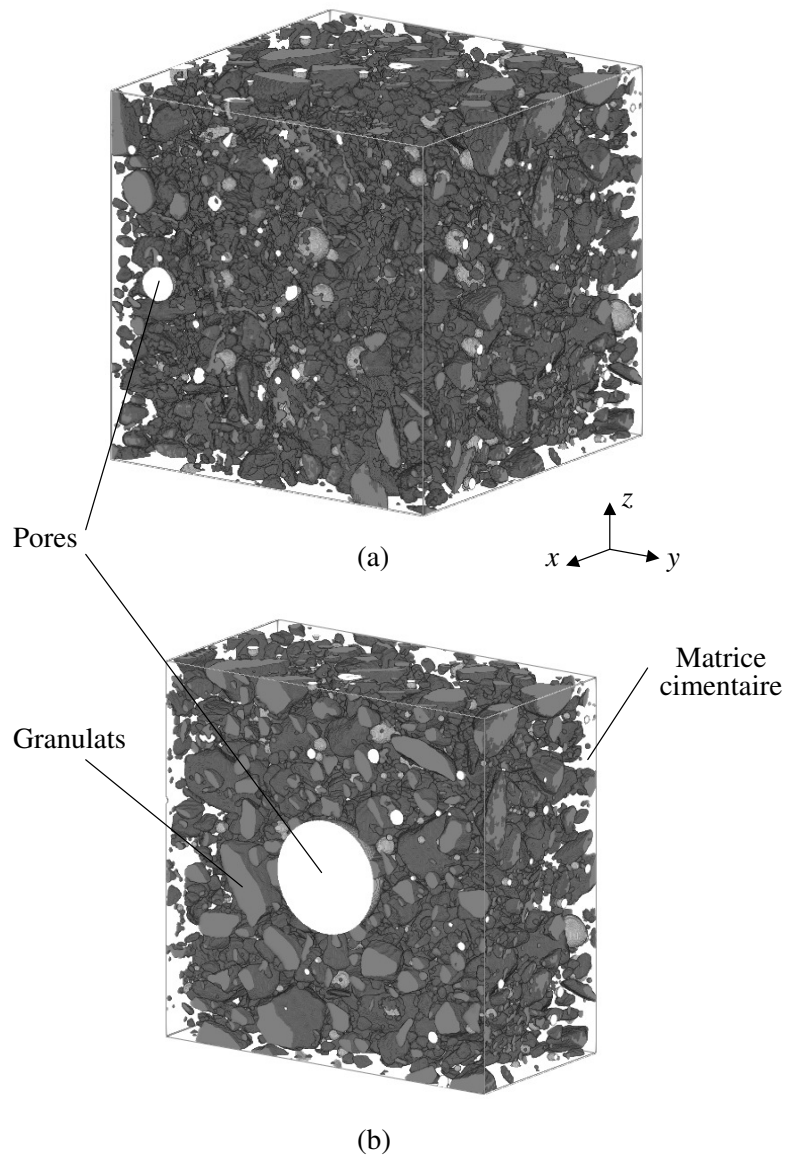


FIGURE 3 – Modèle géométrique réaliste d'un béton léger obtenu par la microtomographie à rayons X (XR- μ CT) : (a) structure tridimensionnelle ; (b) coupe de la structure ($x \in [0, L/2]$).

6 Conclusion

Dans ce travail, une implémentation massivement parallèle et efficace de la méthode de champ de phase pour simuler l'endommagement de matériaux hétérogènes quasi-fragiles sur des supercalculateurs est proposée. Développée dans le cadre de la méthode des éléments finis, cette implémentation permet de modéliser l'endommagement de structures tridimensionnelles hétérogènes de très grande taille avec plusieurs milliards de degrés de liberté. Le parallélisme repose sur une décomposition de domaine, où chaque processus réalise des calculs sur un sous-domaine. L'interface MPI est utilisée pour assurer la distribution de données et les communications entre les processus. L'analyse des performances de cette implémentation a été réalisée sur le supercalculateur Jean Zay de l'IDRIS. L'efficacité a atteint 97% pour un calcul sur 6400 processus et est restée supérieure à 80% pour un calcul sur 10240 processus, ce qui rend l'implémentation proposée rapide et extrêmement efficace. Les systèmes linéaires impliqués dans les simulations, comportant jusqu'à 10^{10} degrés de liberté, sont résolus en quelques secondes. Une simulation complète d'endommagement d'un modèle de géométrie réaliste d'un béton léger obtenue par la microtomographie à rayons X (XR- μ CT), employant 375×10^6 degrés de liberté et 500 pas de temps, a été réalisée. Avec 6000 processus sur le supercalculateur Jean Zay, la simulation s'est achevée en 1 heure et 9 minutes, contre environ 10 mois en séquentiel.

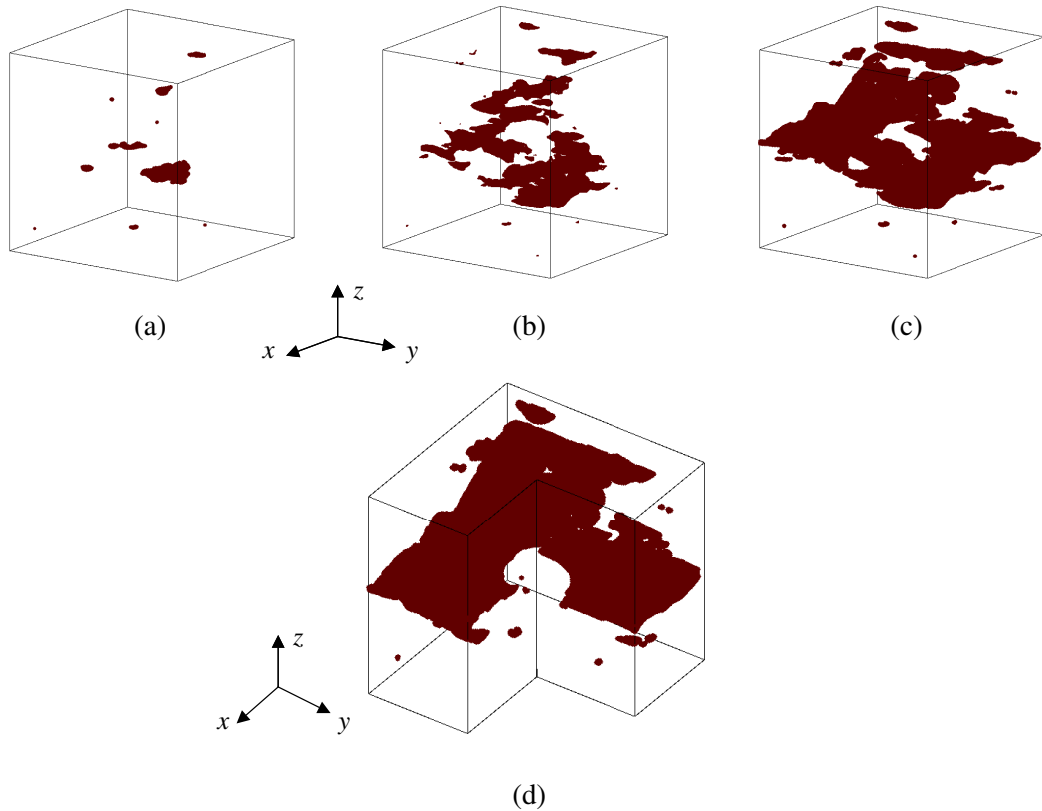


FIGURE 4 – Évolution de l’endommagement : (a) $U = 157 \times 10^{-6}$ mm ; (b) $U = 178 \times 10^{-6}$ mm ; (c) $U = 200 \times 10^{-6}$ mm ; (d) coupe du champ d’endommagement correspondant au cas (c).

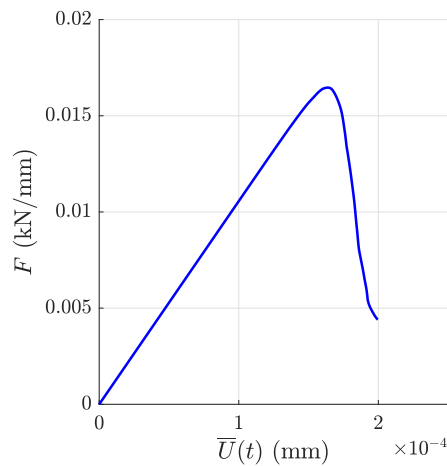


FIGURE 5 – Courbe force-déplacement.

Références

- [1] B. Bourdin, G. A. Francfort, and J.-J. Marigo. *Numerical experiments in revisited brittle fracture*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48(4) :797–826, 2000.
- [2] S. Burke, C. Ortner, and E. Süli. *An adaptive finite element approximation of a variational model of brittle fracture*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 48(3) :980–1012, 2010.
- [3] T. Heister, M. F. Wheeler, and T. Wick. *A primal-dual active set method and predictor-corrector mesh adaptivity for computing fracture propagation using a phase-field approach*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 290 :466–495, 2015.
- [4] R. Patil, B. Mishra, and I. Singh. *An adaptive multiscale phase field method for brittle fracture*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 329 :254–288, 2018.

- [5] Z. Chafia, J. Yvonnet, and J. Bleyer. *A data-driven-based homogenization method to simulate the anisotropic damage of brittle heterogeneous structures*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 437 :117747, 2025.
- [6] J. Yvonnet, Q.-C. He, and P. Li. *A data-driven harmonic approach to constructing anisotropic damage models with a minimum number of internal variables*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 162 :104828, 2022.
- [7] J. Yvonnet, Q.-C. He, and P. Li. *Reducing internal variables and improving efficiency in data-driven modelling of anisotropic damage from RVE simulations*. Computational Mechanics, 72(1) :37–55, 2023.
- [8] J. Yvonnet and Q.-C. He. *Microstructure-based machine learning of damage models including anisotropy, irreversibility and evolution*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, page 106160, 2025.
- [9] S. Chaouch and J. Yvonnet. *Unsupervised machine learning classification for accelerating fe2 multiscale fracture simulations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 432 :117278, 2024.
- [10] Z. Chafia, J. Yvonnet, and J. Bleyer. *Bridging overlapping 2d coarse and fine meshes within the phase field fracture method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 126(9) :e70043, 2025.
- [11] Z. Chafia, J. Yvonnet, and J. Bleyer. *A bridging-domain approach for multiscale modeling of anisotropic fracture in large-scale heterogeneous structures*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (soumis).
- [12] Z. Chafia, J. Yvonnet, J. Bleyer, S. Vincent, and S. El Ouafa. *Massively parallel phase field fracture simulations on supercomputers : towards multi-billion degree-of-freedom computations*. Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences, 11(1) :25, 2024.
- [13] C. Miehe, F. Welschinger, M. Hofacker. *Thermodynamically consistent phasefield models of fracture : Variational principles and multi-field fe implementations*. International journal for numerical methods in engineering, 83(10), 1273–1311, 2010.
- [14] C. Miehe, L.-M. Schaezel, H. Ulmer. *Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. part i. balance of crack surface and failure criteria for brittle crack propagation in thermo-elastic solids*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 294, 449–48, 2015.
- [15] T.T. Nguyen, J. Yvonnet, Q.-Z. Zhu, M. Bornert, C. Chateau. *A phase field method to simulate crack nucleation and propagation in strongly heterogeneous materials from direct imaging of their microstructure*. Eng. Fract. Mech. 139 18–39, 2015.
- [16] W. Gropp, E. Lusk, N. Doss, and A. Skjellum. *A high-performance, portable implementation of the MPI message passing interface standard*. Parallel computing, 22(6), 789-828, 1996.
- [17] S. Balay, W. Gropp, L.C. McInnes, and B.F. Smith. *Petsc, the portable, extensible toolkit for scientific computation*. Argonne National Laboratory, 2(17), 1998.
- [18] Yang, L.T., Brent, R.P. *The improved bicgstab method for large and sparse unsymmetric linear systems on parallel distributed memory architectures*. Fifth International Conference on Algorithms and Architectures for Parallel Processing, 324–328, 2002.
- [19] A. Brandt. *Algebraic multigrid theory : The symmetric case*. Applied mathematics and computation, 19(1-4), 23–56, 1986.
- [20] TT. Nguyen, J. Yvonnet, M. Bornert, and C. Chateau. *Initiation and propagation of complex 3d networks of cracks in heterogeneous quasi-brittle materials : Direct comparison between in situ testing-microct experiments and phase field simulations*. J Mech Phys Solids, 95 :320–50, 2016.