

Identification symbolique d'équations différentielles non linéaires sous contraintes d'inégalités à l'aide de l'intelligence artificielle : applications aux problèmes industriels de mécanique du contact

M. Adiouane¹, C. Pozzolini¹, C. Grenat², S. Masnou³, R. Denis³

¹ Framatome, 2 rue Professeur Jean Bernard, 69007 Lyon, France, mustapha.adiouane@framatome.com, cedric.pozzolini@framatome.com

² Framatome, Tour Areva, 1 place Jean Millier, 92400, Courbevoie, France, clement.grenat@framatome.com

³ ICJ, CNRS UMR 5208, UCB Lyon 1, 69622 Villeurbanne, France, masnou@math.univ-lyon1.fr ; denis@math.univ-lyon1.fr

Résumé — L'extraction d'équations gouvernantes à partir de données mesurées a toujours été un défi dans divers domaines de la science et de l'ingénierie. Malgré l'abondance des données, la création de modèles précis, fiables et utiles pour l'analyse, l'interprétation et la prédiction reste complexe. Les modèles nécessitent une conception minutieuse, des tests, une validation, et souvent des techniques sophistiquées combinées à des connaissances spécifiques au domaine. L'objectif principal du travail présenté dans ce document est d'identifier des dynamiques non linéaires et non lisses.

Mots clés — Identification parcimonieuse des dynamiques non linéaires, Machine Learning, Frottement sec de Coulomb, Quantification de l'incertitude, Contact unilatéral, Solide rigide.

1 Introduction

L'identification des équations différentielles à partir de données est cruciale pour modéliser et prédire le comportement de systèmes complexes dans de nombreux domaines scientifiques et industriels, en particulier en tribologie, où les phénomènes de contact, de frottement et d'usure jouent un rôle central. Traditionnellement, cette tâche repose sur une expertise approfondie et des hypothèses simplificatrices, ce qui peut limiter la précision et la capacité des modèles à représenter la réalité physique. L'intelligence artificielle offre une alternative puissante en automatisant l'extraction des lois physiques directement à partir de données expérimentales ou numériques, sans nécessiter une connaissance a priori exhaustive du système. Cela permet de capturer des dynamiques non linéaires, des comportements non réguliers ou des transitions de régime difficiles à modéliser analytiquement. De plus, une telle approche accélère considérablement le processus de découverte de modèles, facilitant ainsi l'optimisation, la surveillance et la maintenance des systèmes réels.

La méthode SINDy (voir [1]), Sparse Identification of Nonlinear Dynamics, est particulièrement efficace pour identifier des systèmes dynamiques non linéaires mais réguliers (smooth). Elle repose sur l'hypothèse que la dynamique peut être exprimée comme une combinaison linéaire de fonctions de base, et utilise une régression parcimonieuse pour sélectionner les termes dominants. Cela permet d'obtenir des modèles compacts, interprétables et cohérents avec la physique. Toutefois, son efficacité diminue fortement dans le cas des systèmes non réguliers (non-smooth), comme ceux rencontrés en mécanique du contact, où apparaissent des discontinuités, des seuils, ou des lois à comportement non différentiable (loi de Signorini, frottement de Coulomb ou de Tresca, etc.).

Pour les données bruitées, une variante appelée UQ-SINDy (Uncertainty Quantification SINDy, voir [2]) a été développée, intégrant une inférence bayésienne afin de quantifier l'incertitude sur les termes identifiés. Néanmoins, cette approche reste elle aussi limitée aux dynamiques régulières.

Cette limitation a motivé le développement de méthodes adaptées, comme celles proposées dans notre travail, afin d'étendre l'identification symbolique aux systèmes non réguliers tout en conservant les avantages de parcimonie et d'interprétabilité. Dans un premier temps, nous avons évalué deux hypothèses fondamentales : premièrement, qu'une réduction de dimension n'est pas nécessaire ; deuxièmement, que les variables d'état impliquées dans les non-linéarités non lisses sont observables. Nous avons ensuite exploré deux scénarios : l'un dans lequel les fonctions représentant les composantes non lisses ne sont pas identifiables, et un autre où ces fonctions, représentées comme des fonctions polynomiales moniques,

sont identifiable. De plus, nous avons adopté une approche bayésienne pour le modèle, en utilisant spécifiquement la méthode dite spike-and-slab (voir [3]) afin de traiter les données bruitées et garantir une sélection robuste des termes dynamiques.

2 Identification parcimonieuse des systèmes dynamiques non linéaires lisses

2.1 SINDy avec contrôle (SINDyC)

À partir des données d'entrée numériques ou expérimentales qui pourraient et non pourraient être raisonnablement collectées lors de simulations ou d'expérimentations, nous cherchons à représenter le système dynamique non linéaires (voir Brunton et al. [1]) :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t) \quad \text{pour tout } t \quad (1)$$

Et pour tout t , $x(t) \in \mathbb{R}^n$, le terme $f(x(t))$ représente les contraintes de la dynamique où la fonction f est non linéaire et $u(t)$ représente le terme de contrôle. Pour déterminer la forme de la fonction f à partir des données, la variable d'état x , sa dérivée \dot{x} et le terme de contrôle u sont échantillonnées aux instants t_1, \dots, t_m . Les échantillonnages obtenues sont regroupés dans les matrices X , \dot{X} et U : et U :

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t_1) & \dots & x_n(t_1) \\ x_1(t_2) & \dots & x_n(t_2) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1(t_m) & \dots & x_n(t_m) \end{bmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t_1) & \dots & \dot{x}_n(t_1) \\ \dot{x}_1(t_2) & \dots & \dot{x}_n(t_2) \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_1(t_m) & \dots & \dot{x}_n(t_m) \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1(t_1) & \dots & u_n(t_1) \\ u_1(t_2) & \dots & u_n(t_2) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(t_m) & \dots & u_n(t_m) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

Après une construction de la base fonctionnelle $\Theta := [f_1, \dots, f_p]$ où les f_i sont lisses et non linéaires, on calcule $f_i(X) \in \mathcal{M}_{m,n_i}(\mathbb{R})$ pour tout i et on pose $\Theta(X) = [f_1(X), \dots, f_p(X)] \in \mathcal{M}_{m,n_f}(\mathbb{R})$ où $n_f = \sum_{i=1}^p n_i$. On pose $\Theta_u(X) = [\Theta(X)|U] \in \mathcal{M}_{m,n_f+n}(\mathbb{R})$. Soit $\Xi \in \mathcal{M}_{n_f+n,n}(\mathbb{R})$ les coefficients de régression, une fois $\Theta_u(X)$ est construite et la matrice des coefficients Ξ est définie, l'objectif fondamental de SINDy est d'identifier un modèle parcimonieux qui explique la dynamique du système. Cela revient à approximer les dérivées temporelles \dot{X} par une combinaison linéaire des fonctions de la bibliothèque :

$$\dot{X} \approx \Theta_u(X)\Xi \quad (2)$$

Cette formulation permet de traduire le problème d'identification dynamique en un problème de régression linéaire, où l'on cherche à déterminer les entrées non nulles de Ξ qui capturent les mécanismes dominants du système en minimisant la fonction de coût suivante :

$$\mathcal{L}_s : \Xi \mapsto \|\dot{X} - \Theta_u(X)\Xi\|_2 + \lambda \|\Xi\|_1 \quad (3)$$

Avec λ pondère les contraintes de parcimonie.

2.2 SINDy bayésien avec contrôle (UQ-SINDyC)

Nous commençons avec un ensemble de mesures de séries temporelles contaminées par du bruit de mesure $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. En supposant que la configuration de celle-ci est la même que la précédente, mais avec une légère différence, où nous considérons que les données sont régies par :

$$\dot{X} \approx \Theta_u(X)\Xi + \varepsilon \quad (4)$$

Avec $\varepsilon \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ s'agit de la matrice d'erreur résiduel, prenant en compte les inadéquations du modèle et les erreurs de mesure (On peut dire que $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 E)$ avec σ est inconnu et E est une matrice des uns). L'objectif est de déterminer la distribution a posteriori de Ξ conditionnellement aux données (voir [2] & [3]) :

$$p(\Xi, \sigma | X, \dot{X}) \propto p(\dot{X} | \Xi, X) p(\Xi) p(\sigma) \quad (5)$$

Où $p(\dot{X}|\Xi, X)$ désigne la vraisemblance des données (Likelihood), $p(\sigma)$ et $p(\Xi)$ représentent la distribution a priori. Pour résoudre ce problème, on utilise la distribution de Laplace pour la vraisemblance de données et la distribution a priori de Ξ . C'est-à-dire :

$$\begin{cases} p(\dot{X}|\Xi, X) \propto \exp(-\frac{1}{b} \|\dot{X} - \Theta_u(X)\Xi\|_2) \\ p(\Xi) \propto \exp(-\lambda \|\Xi\|_1) \end{cases} \quad (6)$$

Où b est le paramètre d'échelle du bruit. Donc, maximiser $p(\dot{X}|\Xi, X)p(\Xi)$ est équivalent à minimiser la fonction de coût \mathcal{L}_s (voir [4]) :

$$\hat{\Xi}^{\text{Laplace}} = \arg \max_{\Xi} p(\dot{X}|\Xi, X)p(\Xi) = \arg \min_{\Xi} \mathcal{L}_s(\Xi) \quad (7)$$

L'un des a priori parcimonieux les plus populaires est l'a priori 'spike and slab'. Dans ce modèle hiérarchique, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n_f + 1\} \times \{1, \dots, n\}$ le $\xi_{i,j}$ est généré comme suit :

$$\begin{cases} \xi_{i,j} | \lambda_{i,j} \sim \lambda_{i,j} \cdot \mathcal{N}(0, c^2) + (1 - \lambda_{i,j}) \cdot \mathcal{N}(0, \varepsilon^2) \\ \lambda_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{B}(\pi) \quad (\text{la loi de Bernoulli}) \end{cases} \quad (8)$$

Où $\varepsilon \ll c$, si $\lambda_{i,j} \approx 1$ alors $\xi_{i,j}$ appartient au modèle (suivant la distribution "slab"), sinon $\xi_{i,j}$ n'est pas inclus dans le modèle (suivant la distribution "spike"). Une fois les lois a priori et la vraisemblance des données spécifiées, nous utilisons les méthodes MCMC (Monte Carlo Markov Chain) pour échantillonner à partir de $p(\Xi, \sigma|X, \dot{X})$.

3 Reformulation du problème de poutre en système de Klarbring

Soit une poutre encastree à gauche et libre à droite, en mouvement entre deux obstacles, comme illustré dans la figure (1). La semi-discrétisation en espace conduit à un système de Klarbring représentant un ensemble de n masselottes reliées par des ressorts, illustré dans la figure (2).

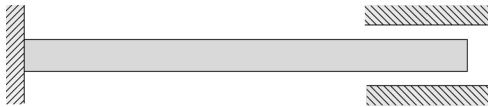


FIGURE 1 – Poutre

⇒
discrétisation
en espace

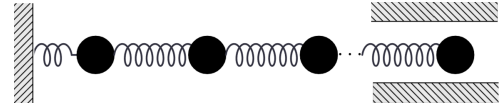


FIGURE 2 – Système de Klarbring

Dans le cas d'un problème unilatéral sans frottement, la question de l'existence et l'unicité d'un système de Klarbring à nombre fini de degrés de liberté a été étudiée pour la première fois par Schatzman [10]. Elle a démontré l'existence de solutions dans le cadre d'une loi d'impact élastique, et a également fourni un contre-exemple d'unicité, même lorsque la force extérieure est de régularité C^∞ . Par la suite, Perceval a précisé dans [11] que, dans le cas à un seul degré de liberté, si la force extérieure dépend uniquement du temps et est analytique, alors l'unicité de la solution est restaurée. Schatzman [12] a ensuite étendu ce résultat en supposant l'analyticité de la force extérieure pouvant dépendre non seulement du temps, mais aussi de la position et de la vitesse, toujours dans le cas à un degré de liberté. Finalement, Ballard [8] a généralisé ce résultat à un nombre quelconque de degrés de liberté, en montrant également l'unicité sous l'hypothèse d'analyticité de la force extérieure.

En ce qui concerne le cas avec frottement sec sous une contrainte unilatérale régulière, Monteiro Marques [13] a été le premier à l'étudier, en supposant une loi d'impact totalement inélastique. En utilisant la méthode de la discrétisation en temps développée par Moreau [14, 15], il a construit une suite d'approximation, puis, à l'aide d'un argument de compacité et d'extraction de sous-suite convergente, il a démontré l'existence de la solution. La question de l'unicité a été ensuite abordée par Ballard et Basseville [6], qui ont prouvé l'unicité pour le cas à un seul degré de liberté sous hypothèse d'analyticité, puis Charles et Ballard [9] ont généralisé ce résultat au cas à nombre arbitraire de degrés de liberté.

Par ailleurs, pour le problème d'impact sans frottement, la méthode de la masse singulière, introduite par Pozzolini, Renard et Salaün [16], est particulièrement adaptée aux structures fines telles que les poutres, où les schémas classiques en temps échouent souvent à capturer correctement les dynamiques

de contact. En modifiant la matrice de masse pour refléter la nature singulière du contact, cette méthode assure la cohérence énergétique et évite les oscillations parasites. De manière complémentaire, la méthode de redistribution de masse, proposée par Khenous, Laborde et Renard [17], s'attaque à l'instabilité causée par l'inertie au niveau des noeuds de contact dans les simulations de poutres. En redistribuant la masse loin de la frontière de contact, elle permet d'obtenir une formulation bien posée qui respecte les contraintes unilatérales et améliore la stabilité numérique. Ensemble, ces approches renforcent la fiabilité des simulations par éléments finis pour des poutres en contact dynamique.

3.1 Problème de frottement de Coulomb

Afin d'étendre la méthodologie développée dans SINDy, il convient tout d'abord de s'intéresser aux systèmes régis par des équations différentielles dont les solutions ne possèdent pas de dérivée au sens classique. Parmi ces cas particuliers figure notamment le problème de contact de frottement de Coulomb sans impact. Considérons à ce titre le système représenté dans la figure suivante :

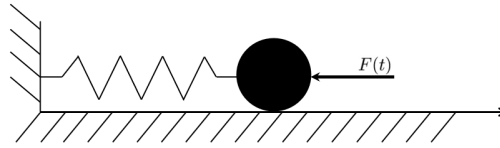


FIGURE 3 – Système de Klarbring 1 degré-de-liberté

Ce modèle de frottement est composé d'un ressort de raideur k et d'une masselotte de masse m , soumise à une force extérieure F , se déplaçant sur un obstacle horizontal, avec x_1 son déplacement et x_2 sa vitesse. La dynamique du système est décrite par l'inclusion différentielle suivante :

$$\begin{cases} x_1(0) = u_0, & x_2(0) = v_0 \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ m\dot{x}_2(t) + kx_1(t) \in -\mu mg \text{Sgn}(x_2(t)) + F(t) & \text{p.p } t \end{cases} \quad (9)$$

L'application multivoque Sgn est définie comme suit :

$$\text{Pour tout } X \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}); \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}; \quad (\text{Sgn}(X))_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{i,j} > 0 \\ [-1, 1] & \text{si } X_{i,j} = 0 \\ -1 & \text{si } X_{i,j} < 0 \end{cases} \quad (10)$$

Ce problème est bien posé et admet une solution unique $x_1 \in W^{2,1}([0, T], \mathbb{R})$ (voir Ballard et Basseville [6]).

3.1.1 Représentation de modèle

On peut considérer une généralisation de ce problème en introduisant le système d'inclusions différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) \in a_{1,1}\text{Sgn}(x_1(t) - r_{1,1}) + a_{1,2}\text{Sgn}(x_2(t) - r_{1,2}) + b_{1,1}x_1(t) + b_{1,2}x_2(t) + c_1 + f_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \in a_{2,1}\text{Sgn}(x_1(t) - r_{2,1}) + a_{2,2}\text{Sgn}(x_2(t) - r_{2,2}) + b_{2,1}x_1(t) + b_{2,2}x_2(t) + c_2 + f_2(t) & \text{p.p } t \\ x_1(0) = x_1^0, & x_2(0) = x_2^0 \end{cases} \quad (11)$$

Ce problème est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A \circ \Lambda(t))e + BX(t) + C + F(t) \\ \Lambda(t) \in \text{Sgn}(eX(t)^T - R) & \text{p.p } t \\ X(0) = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (12)$$

Où $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $C \in \mathbb{R}^2$, $A, B, R \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec R représentant la matrice des points de rupture et F est le terme de contrôle (fonction de contrôle, forçage ...). L'opérateur \circ désigne le produit matriciel de Hadamard (produit terme à terme), et $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ce problème est discrétisé dans le temps avec un pas Δt selon la formulation suivante pour tout $k \in \{2, \dots, m-1\}$:

$$\begin{cases} X_1 = X(0) \\ X_k^* = (I_2 - \Delta t \theta B)^{-1} ((\Delta t B (1 - \theta) + I_2) X_k + \Delta t C + \Delta t F_{k+\theta}) \\ X_{k+1} = L(A \circ \Lambda_{k+1}) e + X_k^* \\ \Lambda_{k+1} = P_{\mathcal{M}_2([-1,1])} (\Lambda_{k+1} + \rho (E(A \circ \Lambda_{k+1})^T L^T + e X_k^{*T} - R)) \quad \text{pour tout } \rho > 0 \\ L = \Delta t (I_2 - \Delta t \theta B)^{-1} \\ E = e e^T \end{cases} \quad (13)$$

Avec $F_{k+\theta} = \theta F_{k+1} + (1 - \theta) F_k$ et $P_{\mathcal{M}_2([-1,1])}$ la projection sur $\mathcal{M}_2([-1,1])$. On note $\Xi = (A, B, C)$, et $\mathcal{X}(\Xi) \in \mathcal{M}_{2,m}(\mathbb{R})$ les données générées par cette discrétisation temporelle, pour toute valeur de Ξ , tandis que $\mathcal{X}^{obv} \in \mathcal{M}_{2,m}(\mathbb{R})$ représente les données expérimentales ou numériques. On définit la fonction de coût suivante :

$$\mathcal{L}_{ns} : \Xi \mapsto \|\mathcal{X}^{obv} - \mathcal{X}(\Xi)\|_2 + \lambda \|\Xi\|_1 \quad (14)$$

Avant de minimiser cette fonction de coût, une méthode de détection de points de rupture R est nécessaire avec une méthode de fenêtrage glissant (voir [7]). Ensuite, puisque la fonction de coût \mathcal{L}_{ns} est convexe, propre et semi-continue inférieurement, on a utilisé l'algorithme de recherche linéaire (voir Calson et Valkonen [5]).

3.1.2 Application numériques

On reprend le même système, on posant $F : t \mapsto f_0 \cos(\omega t)$. Pour l'application, on considère $m = 1 \text{ kg}$, $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$, $\mu = 0.2$, $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$, $f_0 = 3 \text{ N}$ et $\omega = 4.5 \text{ rad.s}^{-1}$. Une fois les valeurs des points de rupture obtenues, notre modèle a été entraîné à l'aide des données d'entraînement représentées par la zone rouge dans la figure (4) pour la condition initiale $u_0 = 0.1 \text{ m}$ et $v_0 = 0.2 \text{ m.s}^{-1}$. Et pour la base de test, 1000 jeux de données sont générés avec des conditions initiales aléatoires $(u_0, v_0) \in [-1, 1]^2$.

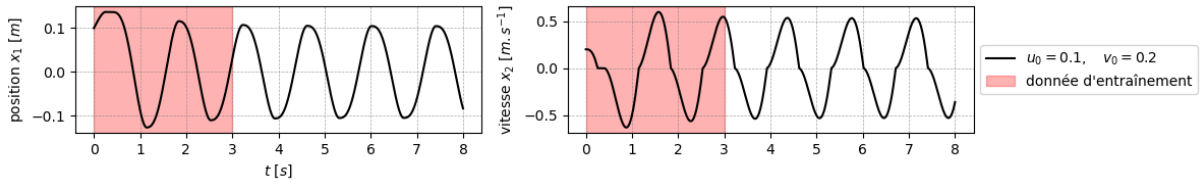


FIGURE 4 – Simulation numérique du système ressort-masselotte

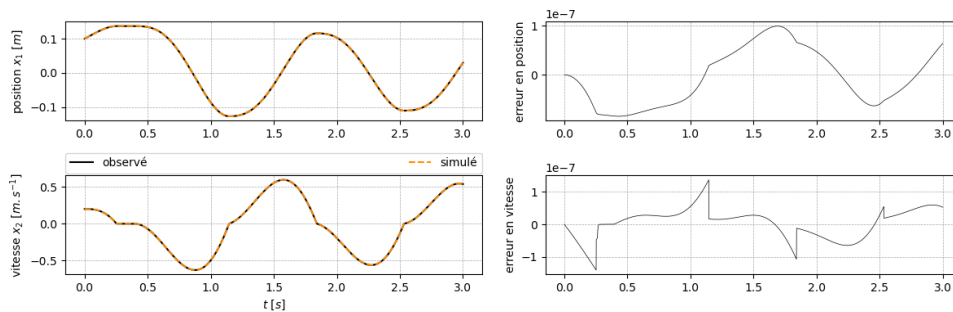


FIGURE 5 – Résultat d'entraînement (SINDyC)

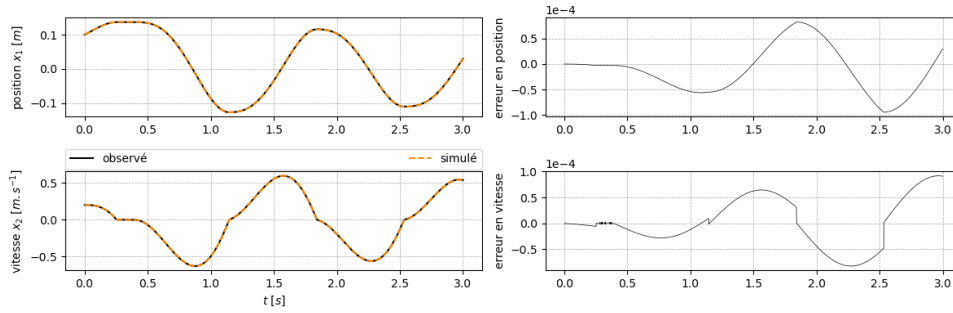


FIGURE 6 – Résultat d’entraînement (UQ-SINDyC)

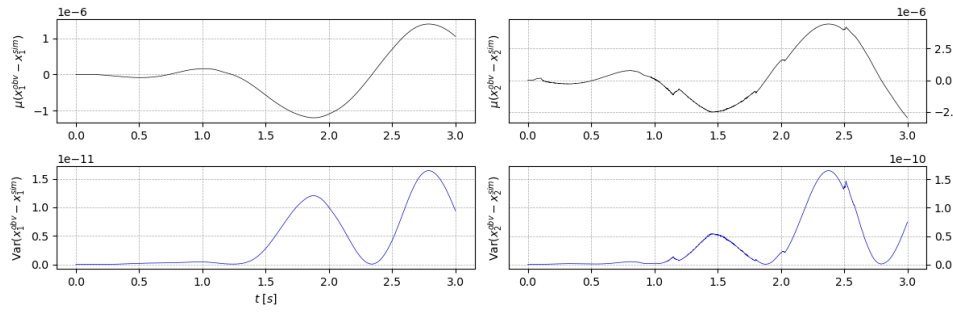


FIGURE 7 – La moyenne et la variance pour la base de test (SINDyC)

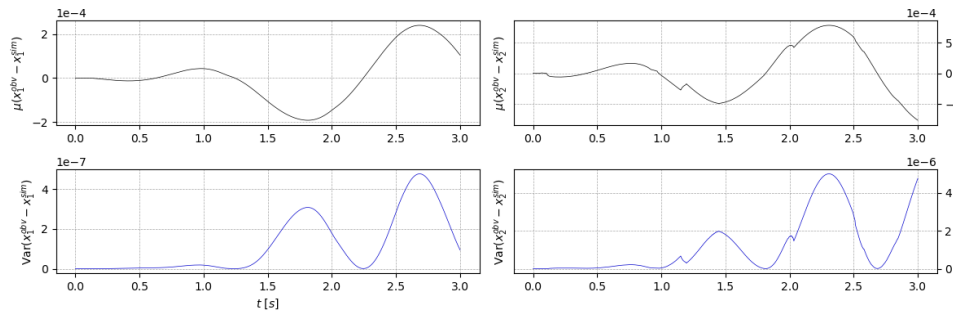


FIGURE 8 – La moyenne et la variance pour la base de test (UQ-SINDyC)

Dans les figures 5 et 6, l’erreur a été évaluée en comparant les résultats obtenus lors de l’entraînement aux données d’apprentissage, révélant une erreur faible. Les figures 7 et 8 présentent la moyenne et la variance de l’erreur calculées à partir des données de test, lesquelles sont également faibles. En utilisant le coefficient de détermination R^2 comme métrique de précision, le modèle atteint une exactitude de 99,99 % sur les données Tests pour les modèles SINDyC et UQ-SINDyC, ce qui signifie qu’il a estimé les coefficients avec une erreur très faible.

3.2 Problème unilatéral

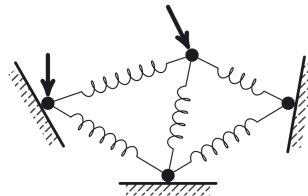


FIGURE 9 – Système de Klarbring pour un nombre arbitraire de degré-de-liberté

Soit $n \geq 1$ masselottes dans \mathbb{R}^2 en contact avec des obstacles droits typo illustré à la figure 9.

Pour chaque masselotte i , on introduit un repère affine orthonormé basé sur l'obstacle droit associé, décrivant sa position par $u^i = \begin{bmatrix} u_N^i \in \mathbb{R} \\ u_T^i \in \mathbb{R} \end{bmatrix}$. Soit $U = (u^i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{2n}$ la configuration de la collection, $U_N = (u_N^i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ et $U_T = (u_T^i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ (la même écriture pour tout vecteur $X = (x^i)_{i \in I}$ pour $I \subset \mathbb{N}$). On a l'équation différentielle sous contrainte d'inégalité de ce problème est la suivante :

$$\begin{cases} U(0) = U_0, & \dot{U}^+(0) = V_0 \\ \ddot{U} = F(\cdot, U, \dot{U}) + R & \text{sur } [0, T] \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall t \in]0, T[: 0 \leq u_N^i \perp r_N^i \geq 0 & \text{(Condition de complémentarité)} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall v \in C^0([0, T]; \mathbb{R}) : \int_0^T r_T^i(v - \dot{u}_T^i) + \mu_i r_N^i(|v| - |\dot{u}_T^i|) \geq 0 & \text{(Loi de Coulomb)} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall t \in]0, T[: u_N^i(t) = 0 \implies \dot{u}_T^i(t) = -e_i \dot{u}_T^i(t) & \text{(Loi d'impact de Newton)} \end{cases} \quad (15)$$

Pour F est la somme des forces intérieures et extérieures, R est la réaction des obstacles sur la collection et pour chaque masselotte i , $\mu_i \geq 0$ est son coefficient de frottement associé, et $e_i \in [0, 1]$ est son coefficient de restitution. Les solutions de cette équation différentielle vivent dans l'espace $MMA([0, T]; \mathbb{R}^{2n})$, défini comme l'ensemble des fonctions de $L^1([0, T]; \mathbb{R}^{2n})$ dont les dérivées au sens faible appartiennent à $BV([0, T]; \mathbb{R}^{2n})$ et comme notation, on pose $\dot{u}^{i+}(t) = \dot{u}^i(t^-)$ pour $t \in [0, T]$ (de la même manière pour t^-), et dont les dérivées secondes sont des mesures dans $\mathcal{M}([0, T]; \mathbb{R}^{2n})$. C'est pour cette raison que la loi de Coulomb est formulée de manière faible. Pour le problème unilatéral, Charles et Ballard [9] ont établi l'existence et l'unicité de la solution pour le problème unilatéral (avec frottement), pour un nombre arbitraire de masselottes, sous certaines conditions imposées à la fonction F , où $(U, V) \mapsto F(t, U, V)$ est Lipschitzienne pour tout $t \in [0, T]$, $(t, U, V) \mapsto F(t, U, V)$ est analytique, et chaque composante f^i ne dépend pas de \dot{u}^j lorsque $i \neq j$.

3.2.1 Identification symbolique d'un problème unilatéral parfait

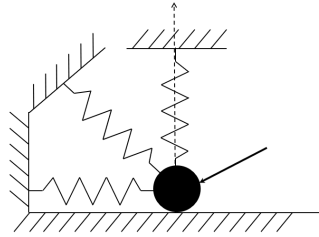


FIGURE 10 – Système de Klarbring 1 degré-de-liberté (impact sans frottement)

Pour étudier le cas d'un problème unilatéral parfait (sans frottement), on considère le cas d'une seule masselotte comme illustré à la figure 10. Comme $BV([0, T]; \mathbb{R}^2) \subset L^1([0, T]; \mathbb{R}^2)$, on peut affaiblir l'espace des solutions en considérant $(u, \dot{u}) \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^2) \times BV([0, T]; \mathbb{R}^2)$, et reformuler le problème en cherchant une solution $x \in BV([0, T]; \mathbb{R}^2)^2$. (par exemple $x := \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}$) d'une équation différentielle de premier ordre. Puisque $BV([0, T]; \mathbb{R}^2)^2 \cong BV([0, T]; \mathbb{R}^4)$, on peut regarder des solutions $x \in BV([0, T]; \mathbb{R}^4)$ pour l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x} = \tilde{f}(\cdot, x) + \lambda & \text{sur } [0, T] \\ \forall t \in]0, T[: 0 \leq g(x) \perp \lambda \geq 0 & \text{(Condition de complémentarité)} \\ x(t^+) = \beta(x(t^-))x(t^-) & \text{pour } t \in J_x \end{cases} \quad (16)$$

Pour $J_x := \{t \in [0, T] \mid \lim_{s \rightarrow t^+} x(s) \neq \lim_{s \rightarrow t^-} x(s)\}$. Nous avons considéré une fonction β dépendant de x , car dans l'article de Ballard [8], le coefficient de restitution peut dépendre de la position et de la vitesse. Il faut également examiner les régularités, ou plutôt les hypothèses sur les fonctions \tilde{f} , g et β , afin d'assurer le problème est bien posé. Il convient également de prêter attention à cette équation, le multiplicateur de

Lagrange λ est une mesure donc il est nécessaire d'en considérer la formulation faible :

$$\forall \phi \in C_c^1([0, T], \mathbb{R}^4); \quad - \int_0^T x \dot{\phi} = \int_0^T \tilde{f}(\cdot, x) \phi + \int_0^T \lambda \phi \quad (17)$$

Ensuite, on considère une base de fonctions, à la manière de SINDy, pour \tilde{f} , g et β , et l'on cherche à définir une fonction de coût qui permettrait d'identifier symboliquement le problème.

Références

- [1] Brunton, S. L., Proctor, J. L., & Kutz, J. N. (2016). Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the national academy of sciences*, 113(15), 3932-3937.
- [2] Hirsh, S. M., Barajas-Solano, D. A., & Kutz, J. N. (2022). Sparsifying priors for Bayesian uncertainty quantification in model discovery. *Royal Society open science*, 9(2), 211823.
- [3] Nayek, R., Fuentes, R., Worden, & K., Cross, E. J. (2021). On spike-and-slab priors for Bayesian equation discovery of nonlinear dynamical systems via sparse linear regression. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 161, 107986.
- [4] Park, T., & Casella, G. (2008). The bayesian lasso. *Journal of the american statistical association*, 103(482), 681-686.
- [5] Clason, C., & Valkonen, T. (2020). Introduction to nonsmooth analysis and optimization. arXiv preprint arXiv :2001.00216.
- [6] Ballard, P., & Basseville, S. (2005). Existence and uniqueness for dynamical unilateral contact with Coulomb friction : a model problem. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39(1), 59-77.
- [7] Chang Liu, YanRu Chen, FengHua Chen, Ping Zhu, and LiangYin Chen. Sliding window change point detection based dynamic network model inference framework for airport ground service process. *Knowledge-Based Systems*, 238 :107701, 2022.
- [8] Ballard, P. (2000). The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 154(3), 199-274.
- [9] Charles, A., & Ballard, P. (2014). Existence and uniqueness of solutions to dynamical unilateral contact problems with Coulomb friction : the case of a collection of points. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 48(1), 1-25.
- [10] M. Schatzman, A Class of Nonlinear Differential Equations of Second Order in Time, *Nonlinear Analysis. Theory, Methods Appl.* 2 (1978) 355-373.
- [11] D. Percivale, Uniqueness in the Elastic Bounce Problem, I, *J. Diff. Eqs.* 56 (1985) 206-215.
- [12] M. Schatzman, Uniqueness and continuous dependence on data for one dimensional impact problems. *Math. Comput. Modell.* 28 (1998) 1-18.
- [13] M.D.P. Monteiro Marques, *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems*. Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin (1993).
- [14] Moreau, J. J. (1986). *Dynamique de systèmes à liaisons unilatérales avec frottement sec éventuel; essais numériques* (Doctoral dissertation, Université des Sciences et Techniques du Languedoc).
- [15] Moreau, J. J. (1988). Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In *Nonsmooth mechanics and Applications* (pp. 1-82). Vienna : Springer Vienna.
- [16] C. Pozzolini, Y. Renard, M. Salaün. The singular dynamic method for dynamic contact of thin elastic structures. *ESAIM : Proc.* 42 :20–33, 2013.
- [17] H. Khenous, P. Laborde, Y. Renard. Mass redistribution method for finite element contact problems in elastodynamics. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 27(5) :918–932, 2008