

Modélisation de la viscoplasticité des polycristaux poreux : impact sur la densification du continuum neige-glace

L. Védrine¹, P. Hagenmuller¹

¹ Université Grenoble Alpes, Université de Toulouse, Météo-France, CNRS, CNRM, Centre d'Etudes de la Neige, Grenoble, France, louis.vedrine,pascal.hagenmuller@meteo.fr

Résumé —

Cette étude propose une modélisation en champ complet de la réponse viscoplastique des polycristaux poreux. Des simulations 3D en plasticité cristalline sur des microstructures synthétiques évaluent l'effet de microstructure géométrique et cristalline sur le comportement effectif. La frustration géométrique des cristaux gouverne la transition de l'exposant de contrainte entre l'activation des systèmes «mous» dans les matériaux poreux et la réponse dense. Une loi viscoplastique 3D est enfin proposée, distinguant les effets de localisation et le couplage hydrostatique–déviatorique.

Mots clés — Milieu Poreux, Viscoplasticité, Homogénéisation FFT, Neige

1 Introduction

Cette étude explore le comportement viscoplastique tridimensionnel des polycristaux poreux. Les polycristaux poreux—matériaux constitués de cristaux frittés entre eux—se rencontrent à la fois dans la nature, comme la neige, et dans les matériaux industriels, tels que les poudres et mousses métalliques ou certains combustibles nucléaires. Lorsqu'ils sont soumis à des conditions de chargement lent et des températures proches de leur point de fusion, ces matériaux présentent une déformation viscoplastique, comme observé lors de la compaction des poudres métalliques [1] ou du tassement naturel de la neige [2]. Malgré leur large utilisation, les relations systématiques entre leurs microstructures et leurs propriétés viscoplastiques restent encore peu étudiées.

Les principaux modèles viscoplastiques utilisent un formalisme commun. Pour une loi de fluage de type Norton, la contrainte équivalente « dense » de von Mises est remplacée par la contrainte visqueuse équivalente σ_{vp} [3, 4, 5], qui dépend du second invariant $\bar{S}_2 = \sqrt{\sigma' : \sigma'}$, où σ' est le déviateur des contraintes, mais également du premier invariant $S_1 = \text{Tr}(\sigma)$, car le matériau est compressible :

$$\sigma_{vp}^2 = f S_1^2 + \frac{3}{2} c \bar{S}_2^2, \quad (1)$$

où f et c sont des fonctions de localisation qui tiennent compte de la géométrie de la microstructure. L'incompressibilité de la matrice dense impose $f(\Phi = 1) = 0$, tandis que $c(\Phi = 1) = 1$ assure l'obtention de la contrainte équivalente de von Mises dans le cas incompressible. Des bornes théoriques ont été proposées pour ces fonctions [6, 7, 8], mais leur application reste limitée car elles supposent des pores sphériques non pénétrants et ne permettent pas de prendre en compte des effets de localisation liés à des géométries de pores plus complexes [9]. Pour des porosités plus élevées, des fonctions de localisation empiriques, telles que le modèle d'Abouaf, sont souvent préférées, mais leurs paramètres ne sont pas directement liés à des quantités physiques.

Enfin, ces modèles considèrent généralement la matrice comme homogène, ignorant la nature cristalline du matériau. Or il a été montré que, pour des fractions solides importantes, le rapport taille des pores / taille des cristaux ($l_{\text{pore}}/l_{\text{cristal}}$) contrôle fortement le comportement viscoplastique et l'approche de modélisation appropriée. Pour des porosités intra cristalline ($l_{\text{pore}} \ll l_{\text{cristal}}$), la porosité agit sur chaque cristal indépendamment, et les cristaux poreux peuvent être modélisés individuellement. Pour de grands pores ($l_{\text{pore}} \gg l_{\text{cristal}}$), la matrice solide peut être considérée comme homogène. Dans le régime intermédiaire ($l_{\text{pore}} \approx l_{\text{cristal}}$), la séparation d'échelle disparaît, et la double structure, géométrique et cristalline,

doit être prise en compte, comme l'ont montré [10] sur la neige.

Le but de cette étude est de formuler un modèle viscoplastique 3D générique des polycristaux poreux, capable de prendre en compte la microstructure géométrique et son interaction avec la structure cristalline sur une large plage de fraction solide. Nous utilisons pour cela un solveur FFT [11] afin de modéliser le comportement 3D des polycristaux poreux, représentés comme un ensemble de cristaux frittés entre eux.

2 Méthode

2.1 Génération des microstructures synthétiques

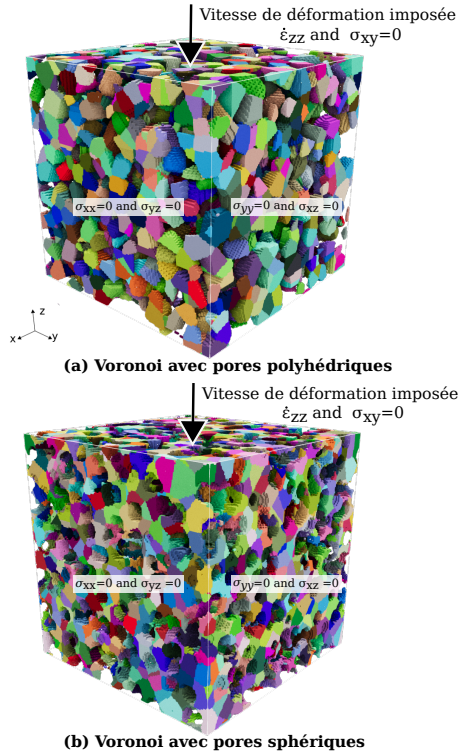


FIGURE 1 – Microstructures synthétiques.

La réponse instantanée des microstructures est étudiée à partir de microstructures synthétiques combinant une texture cristallographique et une géométrie poreuse. Le polycristal dense est généré par tessellation de Voronoï à partir de 3375 germes répartis aléatoirement dans un volume périodique de 150^3 voxels (Fig. 1). Chaque germe forme une cellule de Voronoï d'environ 10^3 voxels, subdivisée en un nombre Λ de cristaux compris entre 1 et 40. Le nombre de cristaux par cellule suit une loi de Poisson de moyenne Λ , permettant de paramétrer la structure cristalline. Les orientations des axes c , sont supposés isotropes et uniformément distribués. Deux géométries poreuses sont considérées. Dans la première, un sous-ensemble de cellules est remplacé aléatoirement par des vides [12], produisant des structures de type Voronoï à pores polyédriques (Fig. 1a). Dans la seconde, des sphères monodisperses pénétrantes sont insérées comme vides dans la structure dense, formant des structures à pores sphériques (Fig. 1b). Les fractions volumiques solides varient de 0,25 à 1,0 par pas de 0,05.

2.2 Simulation élasto-viscoplastique

Les simulations élasto-viscoplastiques sont réalisées à l'aide du modèle développé par [10]. Les cristaux sont décrits par une loi de plasticité cristalline dans laquelle la déformation totale ϵ est la somme d'une partie élastique ϵ^e et d'une partie viscoplastique ϵ^{vp} , avec $\sigma = \mathbf{C} : \epsilon^e$. L'élasticité, supposée isotrope, est définie par le tenseur de rigidité \mathbf{C} . La déformation viscoplastique provient du glissement sur N systèmes de glissement indépendants, caractérisés par une vitesse $\dot{\gamma}^{(k)}$ et le tenseur de Schmid $\mu^{(k)}$:

$$\dot{\gamma}^{(k)} = \dot{\gamma}_0 \left(\frac{|\tau^{(k)}|}{\tau_0^{(k)}} \right)^{n^{(k)}} \text{sgn}(\tau^{(k)}), \quad (2)$$

où $n^{(k)}$ est l'exposant de contrainte, $\dot{\gamma}_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ la vitesse de référence, et $\tau_0^{(k)}$ la contrainte critique de cisaillement pour le système (k) . Les paramètres suivent la calibration de [13] : $n^{(k)} = \{2, 2.85, 4\}$ et $\tau_0^{(k)} = \{35, 166, 98\}$ MPa pour les systèmes basal, prismatique et pyramidal.

Les calculs sont effectués à l'aide du solveur FFT AMITEX_FFTP [14], avec conditions périodiques, et la loi de comportement est implémenté via MFront [15]. Des essais de compression uniaxiale à contrainte latérale moyenne nulle sont imposés à un taux de déformation $< \dot{\epsilon}_z >$ prescrit.

2.3 Loi de comportement

Nous proposons ici une paramétrisation légèrement modifiée du critère de plasticité initialement introduit par [16], permettant de séparer le phénomène de localisation et de couplage entre les composantes déviatorique et hydrostatique de la contrainte, grâce à deux paramètres fonctions de la fraction solide Φ ,

$$\sigma_{vp} = K^{\frac{n+1}{2n}} \sqrt{(1 - 2 \cdot v_v) S_1^2 + (1 + v_v) S_2^2}, \quad (3)$$

où $K(\Phi)$ ($K \in [1, \infty)$) est le facteur d'intensité des contraintes, et $v_v(\Phi)$ ($v_v \in [0, 0.5]$) le coefficient de Poisson visqueux. Ces deux paramètres sont des fonctions algébriques des coefficients de localisation f et c^1 . Ce dernier paramètre, introduit initialement par [17] pour les matériaux visqueux linéaires ($n = 1$) par analogie avec l'élasticité, peut être généralisé aux matériaux non linéaires pour un essai de compression uniaxiale où toutes les directions sont également sensibles à la contrainte. Il est alors défini comme $v_v = -\frac{\dot{\epsilon}_r^{vp}}{\dot{\epsilon}_z^{vp}}$. La loi de comportement correspondante s'écrit alors :

$$\dot{\epsilon}^{vp}(\Sigma, T, \Phi) = \dot{\epsilon}_0(T) \left[\frac{\sqrt{(1 - 2v_v) S_1^2 + (1 + v_v) S_2^2}}{\sigma_0(\Phi = 1)/K} \right]^{n-1} \frac{(1 - 2v_v) S_1 \mathbf{I} + (1 + v_v) \Sigma'}{\sigma_0(\Phi = 1)/K}. \quad (4)$$

3 Résultats

3.1 Exposant des contraintes n et frustration

L'exposant des contraintes n dépend à la fois de la fraction solide Φ et de la structure cristalline (Figure 2).

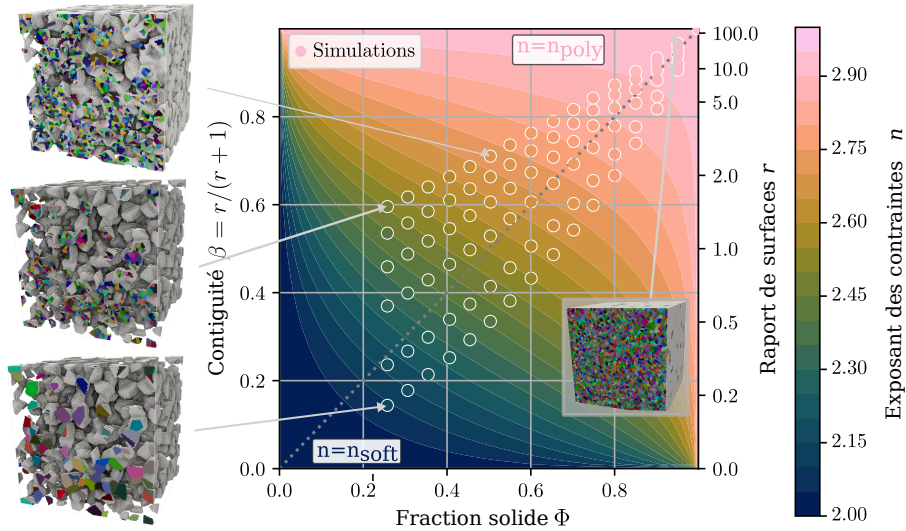


FIGURE 2 – Exposant des contraintes n sur l'ensemble du domaine (Φ, β) donné par l'équation 5 en arrière-plan, et valeurs simulées issues des microstructures synthétiques. Les couleurs dans les cercles blancs correspondent aux exposants des contraintes simulés.

Pour le comportement viscoplastique, n est sensible à la *frustration géométrique* des cristaux, c'est-à-dire la incapacité des mécanismes de déformation «mous» à s'activer. Nous introduisons le *rappor de surface* $r = \frac{CB}{SA}$ entre les surfaces intercristallines (CB) et les surfaces libres (SA). $r = 0$ indique des cristaux libres, tandis qu'un r élevé correspond à une forte frustration. Il est lié à la contiguïté β via $\beta = r/(1 + r)$.

1. $K = (f + c)^{\frac{n+1}{2n}}$, $v_v = \frac{\frac{1}{2}c - f}{f + c}$

L'exposant $n(\Phi, r)$ admet deux limites : n_{poly} pour des cristaux totalement frustrés et n_{soft} pour des cristaux libres. Une règle de mélange permet de relier ces deux contributions :

$$n(\Phi, r) = n_{\text{soft}} + (n_{\text{poly}} - n_{\text{soft}}) \Phi^{(r_t/r)^\gamma}, \quad (5)$$

avec $r_t = 1.95$ et $\gamma = 0.44$. Ce modèle reproduit fidèlement les données numériques et peut être extrapolé sur l'ensemble du domaine (Φ, β) . Le rapport de surface r apparaît comme un indicateur robuste du rapport pore/cristal et de la transition entre les comportements libre et frustré.

3.2 Facteur d'intensité des contraintes K et écrouissage géométrique

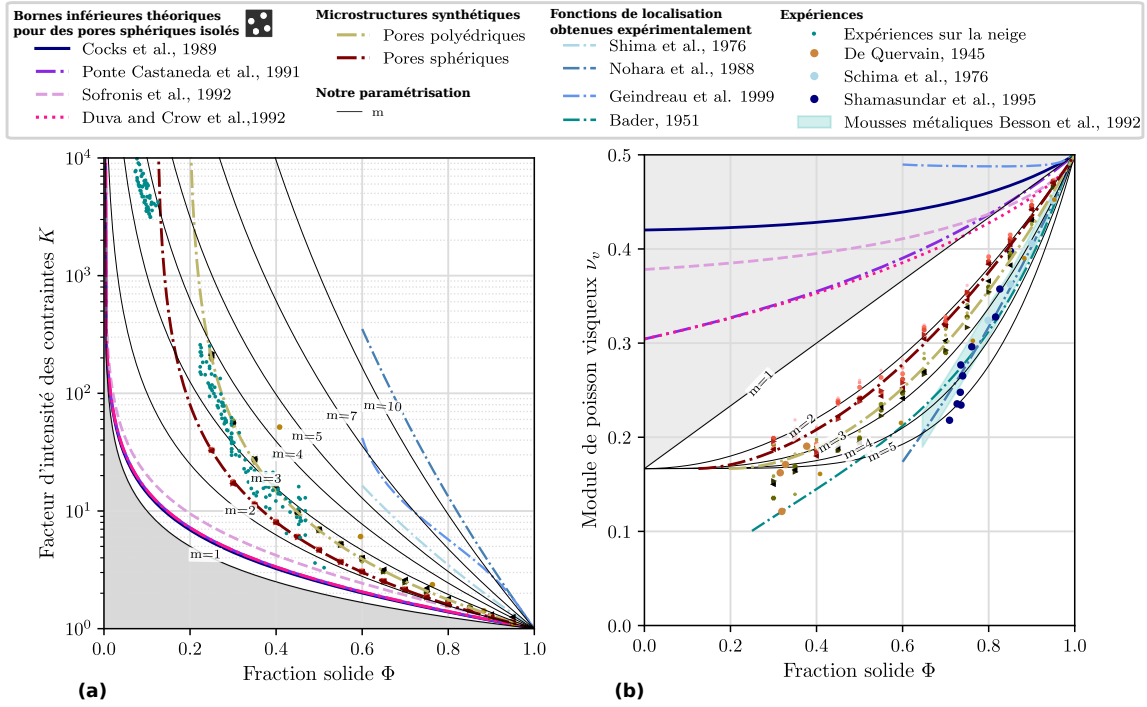


FIGURE 3 – Localisateur des contraintes K (a) et module de Poisson visqueux ν_v (b) en fonction de la fraction solide Φ . Simulations réalisées sur des microstructures avec différents nombres de cristaux par cellule géométrique Λ . Comparaison avec les bornes théoriques et des identifications basés sur des mesures expérimentales.

La figure 3a illustre l'évolution du facteur d'intensité des contraintes K en fonction de la fraction solide Φ , pour différentes morphologies de pores et structures cristallines. Le facteur d'intensité des contraintes K apparaît indépendant de la texture cristalline et de l'exposant des contraintes et peut être décrite en fonction de la fraction solide réduite, $\Phi_{\text{res}} = \frac{\Phi - \Phi_t}{1 - \Phi_t}$, où Φ_t désigne le seuil de percolation, selon la loi puissance :

$$K = \Phi_{\text{res}}^{-m}, \quad (6)$$

avec m le paramètre morphologique [18]. Les valeurs obtenues sont $m = 1.85$ pour les microstructures de type Voronoï à pores sphériques et $m = 2.00$ pour celles à pores polyédriques. Les pores sphériques se révèlent ainsi plus "efficaces" pour supporter la charge appliquée, traduisant une configuration mécaniquement plus optimale. Les seuils de percolation correspondants sont $\Phi_t = 0,12$ et $\Phi_t = 0,19$, respectivement.

Les bornes inférieures théoriques [19, 7] prédisent des exposants m proches de 1, tandis que les approches empiriques [4, 20, 21] conduisent à des valeurs beaucoup plus élevées (entre 5 et 11). Les facteurs d'intensité des contraintes issues d'essais viscoplastiques sur la neige [22, 23, 24, 25], synthétisées par [26], fournissent des points de comparaison aux faibles fractions solides, où le seuil de percolation est particulièrement bas. Les bornes théoriques sous-estiment fortement les valeurs expérimentales : à $\Phi = 0,6$, elles sont inférieures d'environ un ordre de grandeur pour le cuivre [4] et de deux ordres pour

les mousses de plomb [21]. Les données sur la neige indiquent des exposants m variant de 3,5 à faible fraction solide à 2,5 pour des matériaux plus denses. Les ajustements empiriques, avec m entre 5 et 11 (en supposant $\Phi_t = 0$), reflètent probablement la présence d'un seuil de percolation élevé, typique des poudres métalliques.

Ces résultats confirment que la prise en compte conjointe du paramètre morphologique m et du seuil de percolation Φ_t est essentielle pour décrire correctement l'écroutissage géométrique et la diminution effective de rigidité des polycristaux poreux.

3.3 Coefficient de Poisson visqueux ν_v

La figure 3b illustre l'évolution du coefficient de Poisson visqueux pour différentes fractions solides Φ , morphologies de pores et nombres de cristaux par cellule Λ . Lorsque la fraction solide augmente, la valeur de ν_v croît et tend vers 0.5, traduisant un comportement quasi incompressible. Les variations liées à la structure cristalline demeurent faibles, en particulier pour les matériaux denses. Il est donc raisonnable de considérer que ν_v dépend principalement de la fraction solide relative.

Nous proposons l'expression suivante pour ν_v en fonction de Φ_{res} :

$$\nu_v = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} (1 - \Phi_{\text{res}}^m) - 1 \right), \quad (7)$$

où le paramètre morphologique m , analogue à celui introduit dans le facteur d'intensité des contraintes, caractérise la géométrie de la microstructure poreuse.

L'ajustement de l'équation (7) aux différentes microstructures (figure 3b) montre un bon accord avec les simulations. Pour une fraction solide donnée, une augmentation de m — traduisant une structure moins efficace pour le transport des charges — conduit à une déformation volumique e plus élevée, et donc à des déformations latérales plus faibles pour une même déformation axiale. Les isolignes de ν_v associées à différentes valeurs de m sont également reportées sur la figure 3b.

Plusieurs mesures expérimentales du coefficient de Poisson visqueux sont disponibles dans la littérature, ce paramètre étant couramment utilisé pour quantifier l'effet du confinement latéral lors de la compaction de matériaux tels que la neige ou les poudres métalliques. La figure 3b présente notamment les mesures de [27] sur un alliage Ti–24Al–11Nb, de [4] sur du cuivre poreux, ainsi que celles de [28] et [29] sur la neige.

Les approches micromécaniques [6, 30, 19, 7] ont tendance à surestimer ν_v , prédisant des valeurs comprises entre 0.33 et 0.42 pour $\Phi = 0.2$ car les fonctions de localisations ont été déterminées de manière indépendantes sans considérer leur couplage. À l'inverse, les modèles empiriques ajustés sur données expérimentales [4, 20] reproduisent fidèlement les observations et les résultats sur microstructures synthétiques, en bon accord avec notre approche. Seul le modèle de [21] prédit des valeurs sensiblement plus élevées.

4 Conclusion et Perspectives

Cette étude propose un cadre général tridimensionnel pour la viscoplasticité des polycristaux poreux, introduisant un unique paramètre morphologique m , déjà utilisé dans la modélisation des propriétés de transport et des propriétés élastiques [31, 18].

Au-delà de ce cadre générique, le modèle constitue un outil à base physique pour décrire la transition continue entre la neige, le névé et la glace [32, 33], en tenant explicitement compte de la structure cristalline, de écrouissage géométrique et des effets tridimensionnels.

La densification du névé vers la glace offre un excellent cas d'étude pour la validation de ce type modèle. Le problème peut être formulé comme celui d'une colonne de glace poreuse soumise à son propre poids, à température constante, dont la charge augmente annuellement par accumulation de neige. Une comparaison préliminaire des profils verticaux de densité (Figure 4) issus du forage de Site A, Groenland, montre un bon accord entre les prédictions du modèle et les observations, ouvrant la voie à une modélisation plus réaliste du continuum neige-névé-glace dans les régions polaires.

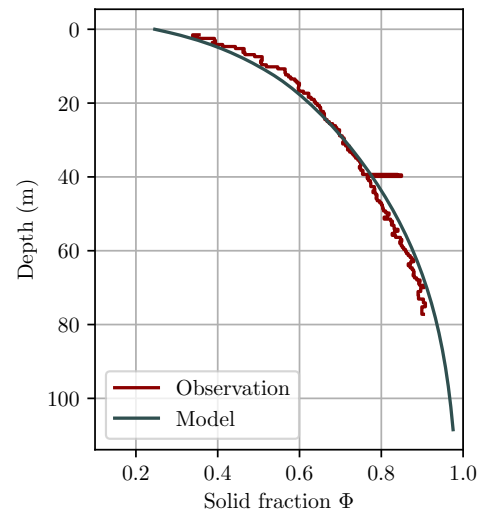


FIGURE 4 – Évolution de la fraction solide avec la profondeur prédite et mesurée à Site A, Groenland [34].

Remerciements

Les calculs présentés dans cet article ont été réalisés en utilisant l'infrastructure GRICAD (<https://gricad.univ-grenoble-alpes.fr>), soutenue par le CNRS, l'Université Grenoble Alpes et l'Inria. Nous remercions chaleureusement Maurine Montagnat, Lionel Gélébart, Kévin Fourteau et Henning Löwe pour les discussions fructueuses et stimulantes.

Références

- [1] F. B. Swinkels, D. S. Wilkinson, E. Arzt, and M. F. Ashby. Mechanisms of hot-isostatic pressing. *Acta Metallurgica*, 31(11) :1829–1840, November 1983.
- [2] Sabine Rolland du Roscoat, Andrew King, Armelle Philip, Peter Reischig, Wolfgang Ludwig, Frédéric Flin, and Jacques Meyssonier. Analysis of Snow Microstructure by Means of X-Ray Diffraction Contrast Tomography. *Advanced Engineering Materials*, 13(3) :128–135, 2011. _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/adem.201000221>.
- [3] R. J. Green. A plasticity theory for porous solids. *International Journal of Mechanical Sciences*, 14(4) :215–224, April 1972.
- [4] S. Shima and M. Oyane. Plasticity theory for porous metals. *International Journal of Mechanical Sciences*, 18(6) :285–291, June 1976.
- [5] Marc Abouaf. *Modélisation de la compaction de poudres métalliques frittées : approche par la mécanique des milieux continus*. 1985. Pages : 186 p.
- [6] A. C. F. Cocks. Inelastic deformation of porous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 37(6) :693–715, January 1989.
- [7] J. M. Duva and P. D. Crow. The densification of powders by power-law creep during hot isostatic pressing. *Acta Metallurgica et Materialia*, 40(1) :31–35, January 1992.
- [8] Pedro Ponte Castaneda. Effective Properties in Power-Law Creep. In *Mechanics of Creep Brittle Materials 2*, pages 218–229. Springer Netherlands, Dordrecht, 1991.
- [9] Yong-Mei Liu, H. N. G. Wadley, and J. M. Duva. Densification of porous materials by power-law creep. *Acta Metallurgica et Materialia*, 42(7) :2247–2260, July 1994.
- [10] Louis Védrine, Pascal Hagenmuller, Lionel Gélébart, Maurine Montagnat, and Antoine Bernard. Role of Ice Mechanics on Snow Viscoplasticity. *Geophysical Research Letters*, 51(7) :e2023GL107676, 2024. _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2023GL107676>.

- [11] Lionel Gélébart. A modified FFT-based solver for the mechanical simulation of heterogeneous materials with Dirichlet boundary conditions. *Comptes Rendus. Mécanique*, 348(8-9) :693–704, December 2020.
- [12] Luc Portelette, Pierre-Guy Vincent, Hervé Moulinec, and Mihail Găărăjeu. Viscoplastic behavior of a porous polycrystal with similar pore and grain sizes : Application to nuclear MOX fuel materials. *International Journal of Solids and Structures*, 236-237 :111316, February 2022.
- [13] O. Castelnau, P. Duval, M. Montagnat, and R. Brenner. Elastoviscoplastic micromechanical modeling of the transient creep of ice. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 113(B11), 2008. _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2008JB005751>.
- [14] Yang Chen, Lionel Gélébart, Camille Chateau, Michel Bornert, Cédric Sauder, and Andrew King. Analysis of the damage initiation in a SiC/SiC composite tube from a direct comparison between large-scale numerical simulation and synchrotron X-ray micro-computed tomography. *International Journal of Solids and Structures*, 161 :111–126, April 2019.
- [15] Thomas Helfer, Bruno Michel, Jean-Michel Proix, Maxime Salvo, Jérôme Sercombe, and Michel Casella. Introducing the open-source mfront code generator : Application to mechanical behaviours and material knowledge management within the PLEIADES fuel element modelling platform. *Computers & Mathematics with Applications*, 70(5) :994–1023, September 2015.
- [16] Louis Védrine and Hagenmuller Pascal. A constitutive model of porous polycrystals viscoplasticity. [*manuscrit en préparation*], 2026.
- [17] David J. Green, Olivier Guillon, and Jürgen Rödel. Constrained sintering : A delicate balance of scales. *Journal of the European Ceramic Society*, 28(7) :1451–1466, January 2008.
- [18] A. P. Roberts and E. J. Garboczi. Computation of the linear elastic properties of random porous materials with a wide variety of microstructure. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 458(2021) :1033–1054, May 2002.
- [19] P. Sofronis and R. M. McMeeking. Creep of Power-Law Material Containing Spherical Voids. *Journal of Applied Mechanics*, 59(2S) :S88–S95, June 1992.
- [20] Akira Nohara, Tomokazu Nakagawa, Tadashi Soh, and Tohru Shinke. Numerical simulation of the densification behaviour of metal powder during hot isostatic pressing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 25(1) :213–225, January 1988.
- [21] Christian Geindreau, Didier Bouvard, and Pierre Dorémus. Constitutive behaviour of metal powder during hot forming. : Part II : Unified viscoplastic modelling. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 18(4) :597–615, 1999. Publisher : Elsevier.
- [22] Carlo Scapozza and Perry A. Bartelt. The influence of temperature on the small-strain viscous deformation mechanics of snow : a comparison with polycrystalline ice. *Annals of Glaciology*, 37 :90–96, January 2003.
- [23] S. Schleef, H. Löwe, and M. Schneebeli. Influence of stress, temperature and crystal morphology on isothermal densification and specific surface area decrease of new snow. *The Cryosphere*, 8(5) :1825–1838, October 2014.
- [24] Antoine Bernard. *Etude multiéchelle de la transition ductile-fragile dans la neige*. phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], March 2023.
- [25] Antoine Bernard, Pascal Hagenmuller, Maurine Montagnat, and Guillaume Chambon. Disentangling creep and isothermal metamorphism during snow settlement with X-ray tomography. *Journal of Glaciology*, 69(276) :899–910, August 2023.
- [26] Louis Védrine, Pascal Hagenmuller, Lionel Gélébart, Maurine Montagnat, and Henning Löwe. Sensitivity of the viscoplasticity of polycrystals to porosity and pore-to-crystal size ratio. *Acta Materialia*, 301 :121507, 2025.
- [27] S. Shamasundar, R. E. Dutton, and S. L. Semiatin. Modeling the consolidation behavior of an alpha-two titanium aluminide powder. *Journal of Materials Processing Technology*, 48(1) :817–823, January 1995.
- [28] M. De Quervain. Die Setzung der Schneedecke. *Interner Bericht*, (11), 1945.
- [29] Henri Bader. Sorge’s Law of Densification of Snow on High Polar Glaciers. *Journal of Glaciology*, 2(15) :319–323, January 1954.
- [30] P. Ponte Castañeda, John Raymond Willis, and Anthony James Merrill Spencer. On the overall properties of nonlinearly viscous composites. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 416(1850) :217–244, January 1997. Publisher : Royal Society.
- [31] E. J. Garboczi, K. A. Snyder, J. F. Douglas, and M. F. Thorpe. Geometrical percolation threshold of overlapping ellipsoids. *Physical Review E*, 52(1) :819–828, July 1995. Publisher : American Physical Society.
- [32] J. M. Barnola, D. Raynaud, Y. S. Korotkevich, and C. Lorius. Vostok ice core provides 160,000-year record of atmospheric CO₂. *Nature*, 329(6138) :408–414, October 1987. Publisher : Nature Publishing Group.

- [33] R. J. Arthern and D. J. Wingham. The Natural Fluctuations of Firn Densification and Their Effect on the Geodetic Determination of Ice Sheet Mass Balance. *Climatic Change*, 40(3) :605–624, December 1998.
- [34] M. K. Spencer, R. B. Alley, and T. T. Creyts. Preliminary firn-densification model with 38-site dataset. *Journal of Glaciology*, 47(159) :671–676, January 2001.