

Estimation des facteurs d'intensité de contraintes généralisés au niveau d'une entaille via la corrélation d'images numériques intégrée.

R. Vargas¹, H. Girard², J. Lachambre¹, A. Doitrand¹

¹ Univ Lyon, INSA-Lyon, UCBL, CNRS, MATEIS, UMR5510, F-69621 Villeurbanne, France, rafael.vargas-magador@insa-lyon.fr

² Univ Bordeaux, CNRS, Bordeaux INP, I2M, UMR5295, F-33400 Talence, France

Résumé — Les facteurs d'intensité de contraintes généralisés (GSIF) au niveau d'une entaille en V sont déterminés expérimentalement à partir d'essais Arcan. La corrélation d'images numériques intégrée est utilisée pour obtenir les champs de déplacements suivant les champs asymptotiques au niveau de l'entaille. L'approche proposée permet de déterminer la position optimale de la pointe de l'entaille par une méthode itérative de minimisation des GSIFs des modes duaux. Elle donne également accès à la variation des GSIFs des modes d'ouverture et de cisaillement au cours de l'essai.

Mots clés — Singularité, GSIF, amorçage de fissure.

1 Introduction

Quand une structure contient une fissure en milieu homogène isotrope, les champs de déplacements et de contraintes dans son voisinage sont bien connus. La propagation de la fissure peut être décrite par les facteurs d'intensités de contraintes [1], souvent obtenus expérimentalement à partir de mesures de champs en 2D et 3D [2, 3, 4, 5]. Ces champs peuvent être généralisés au voisinage de n'importe quel point singulier avec les facteurs d'intensité de contrainte généralisés (GSIF, de l'anglais *generalized stress intensity factor*), dont les magnitudes sont couplées à une description du point singulier par un exposant caractéristique et une fonction angulaire [6]. Pour un chargement donné, ils peuvent être calculés par une intégrale de contour [7], à partir de la densité d'énergie de déformation élastique [8], ou juste par un ajustement des champs obtenus par éléments finis (EF) [9, 10, 11].

Le chargement appliqué dans un calcul EF est souvent idéalisé. Dans un cas réel, celui-ci est souvent plus complexe et peut évoluer au cours de l'essai, ce qui démontre l'intérêt de mesurer expérimentalement les GSIFs, ce qui est encore peu exploré. Des premières approches ont consisté à mesurer expérimentalement des chargements critiques et à calculer numériquement les GSIFs correspondants à partir d'un modèle EF [10, 11, 12]. Ils peuvent aussi être obtenus à partir d'une régression entre les champs obtenus par corrélation d'images numériques (CIN) et les champs asymptotiques théoriques [13, 14]. L'objectif de ce travail consiste à vérifier la possibilité de sauter cette étape de régression, en couplant les champs théoriques avec la corrélation d'images. De cette manière, les inconnues sont directement les GSIFs, la pertinence de la mesure étant ensuite déterminée via une analyse critique des résidus obtenus en déplacement et en niveau des gris. Cela permet d'alimenter la discussion de possibilités d'amélioration du modèle utilisé. L'approche proposée est mise en place dans le cadre d'essais Arcan sur des éprouvettes entaillées, présentés en Section 2. La méthode de mesure des GSIFs est décrite en Section 3 puis appliquée aux cas d'un essai Arcan dans la Section 4.

2 Essais de caractérisation

Différentes mixités modales de chargement (mode I + mode II) sont possibles via des essais de traction avec un montage Arcan (Figure 1). L'insertion des goupilles entre les positions #1 et #5 permet de couvrir des chargements allant d'une traction pure à un cisaillement pur, et donc de faire des essais sur éprouvettes entaillées avec des mixités de mode allant du mode I au mode II. Ces configurations sont appliquées à des échantillons d'époxy avec une entaille en V d'angle 30° et de 10 mm de profondeur. Les échantillons ont été élaborés par versement de la résine dans des moules en silicone avec la géométrie

désirée, de 5 mm d'épaisseur et 20 mm de largeur utile pour le chargement, sans considérer l'entaille. Une première polymérisation est faite à température ambiante pendant 24h afin d'éviter les contraintes résiduelles, suivi par un traitement thermique à 60°C pendant 8h, pour d'obtenir un taux de réticulation plus important et des propriétés mécaniques plus élevées sans induire des contraintes résiduelles.

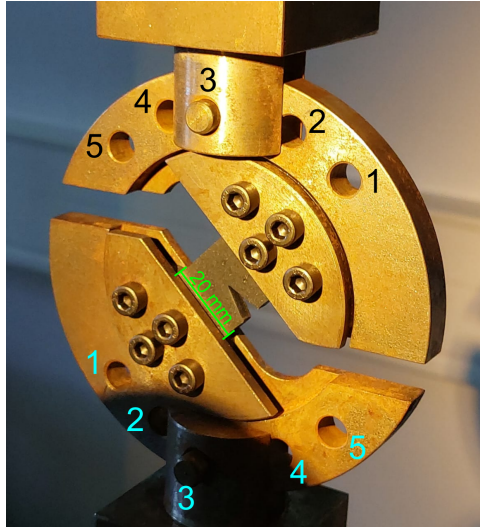


FIGURE 1 – Photo du montage Arcan avec un échantillon en position #3 qui correspond à un chargement mixte de traction/cisaillement. Les trous indiqués entre #1 et #5 montrent les possibilités de montage pour changer la mixité modale.

Des essais de traction sur des éprouvettes non entaillées ont permis l'obtention des propriétés élastiques : un module de Young de 3040 MPa et un coefficient de Poisson de 0.4. Les deux surfaces opposées des éprouvettes ont été polies avec un papier de verre de 10 μm et un mouchetis a été appliqué avec un aérographe, avec l'application d'un fond en peinture noire, suivi par un motif de peinture blanche, pour permettre le suivi avec la CIN. Les échantillons ont été séchés pendant 24h avant les essais mécaniques, menés dans une machine d'essais Instron de 30 kN dont les mors sont visibles dans la Figure 1. Cinq images de référence ont été prises pour toutes les configurations avant le chargement, et entre 15 et 25 pendant le chargement jusqu'à la rupture fragile du matériau. Les images ont une résolution de 3000 \times 3084 px, avec une taille de pixel de 10 μm .

3 Traitement des données

3.1 Correlation d'Images Numériques (CIN)

Considérant une image de référence de l'échantillon f , où le vecteur de position de chaque pixel est donné par \underline{x} et une image du même échantillon après un chargement g , on peut considérer la conservation des niveaux de gris [15, 16]

$$\rho(\underline{x}) = f(\underline{x}) - g(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x})), \quad (1)$$

\underline{u} étant le champ de déplacement entre les deux images et ρ le champ de résidu. La présence de bruit d'acquisition ne permet pas d'annuler ρ , on obtient alors \underline{u} par minimisation de ρ . Il est possible de régulariser les déplacements pour que le système soit bien posé, comme par exemple

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_i v_i \Psi_i(\underline{x}) \quad (2)$$

où Ψ_i sont des fonctions de forme couplant le déplacement de plusieurs pixels et v_i sont les degrés de liberté. Dans la suite de ce travail, deux approches seront utilisées : une première avec des fonctions de forme d'éléments finis [17], ici triangulaires à trois noeuds (T3) pour donner une référence avec des hypothèses plus souples (pas de contrainte sur la forme du champ de déplacement recherché), et où les v_i sont les déplacements nodaux. La seconde approche consiste à utiliser des fonctions analytiques [18, 19,

20], dans ce cas les déplacements asymptotiques au niveau d'une entaille en V chargé sous sollicitation de mode mixte traction/cisaillement (Voir Section 3.2). Le logiciel libre PyFEDIC [21] (écrit en Python) est utilisé dans les deux cas.

3.2 Formules analytiques des déplacements au niveau d'une entaille en V

Pour un matériau homogène avec un comportement linéaire élastique isotrope, il est possible de décrire le déplacement en fonction des coordonnées polaires (r et φ), depuis la pointe d'une entaille en V [22] :

$$\underline{V}(r, \varphi) = k_I r^{\lambda_I} \underline{v}_I(\varphi) + k_{II} r^{\lambda_{II}} \underline{v}_{II}(\varphi) + \dots \quad (3)$$

où les exposants λ_i ($i = I, II$) et leurs modes associés $\underline{v}_i(\varphi)$ dépendent principalement de la géométrie du point singulier alors que les GSIF k_i sont des fonctions de la géométrie de l'éprouvette et du chargement appliqué. λ_i et $\underline{v}_i(\varphi)$ peuvent être déterminés par résolution d'un problème aux valeurs propres [6]. Par exemple, pour une entaille de 30° , les exposants de la singularité sont $\lambda_I = 0.501$ et $\lambda_{II} = 0.598$. Les champs de déplacement correspondants aux modes primaux d'ouverture (I) et de cisaillement (II) sont donnés dans le repère local de l'entaille par :

$$\underline{v}_I(r, \varphi) = r^{\lambda_I} \left\{ \begin{array}{c} v_r^I(\varphi) \\ v_\varphi^I(\varphi) \end{array} \right\} \text{ and } \underline{v}_{II}(r, \varphi) = r^{\lambda_{II}} \left\{ \begin{array}{c} v_r^{II}(\varphi) \\ v_\varphi^{II}(\varphi) \end{array} \right\} \quad (4)$$

et (cf., p. ex., , [23, 24, 25])

$$\begin{aligned} v_r^I(\varphi) &= \left[\cos((1 + \lambda_I)\varphi) + \frac{\lambda_L + 3\mu_L - \lambda_I(\lambda_L + \mu_L)}{(\lambda_L + \mu_L)(1 - \lambda_I)} \frac{\sin(\omega(1 + \lambda_I)/2)}{\sin(\omega(1 - \lambda_I)/2)} \cos((1 - \lambda_I)\varphi) \right] / \gamma_{\varphi\varphi}^{I-0} \\ v_\varphi^I(\varphi) &= \left[-\sin((1 + \lambda_I)\varphi) - \frac{\lambda_L + 3\mu_L + \lambda_I(\lambda_L + \mu_L)}{(\lambda_L + \mu_L)(1 - \lambda_I)} \frac{\sin(\omega(1 + \lambda_I)/2)}{\sin(\omega(1 - \lambda_I)/2)} \sin((1 - \lambda_I)\varphi) \right] / \gamma_{\varphi\varphi}^{I-0} \\ v_r^{II}(\varphi) &= \left[\sin((1 + \lambda_{II})\varphi) + \frac{\lambda_L + 3\mu_L - \lambda_{II}(\lambda_L + \mu_L)}{(\lambda_L + \mu_L)(1 + \lambda_{II})} \frac{\sin(\omega(1 + \lambda_{II})/2)}{\sin(\omega(1 - \lambda_{II})/2)} \sin((1 - \lambda_{II})\varphi) \right] / \gamma_{\varphi\varphi}^{II-0} \\ v_\varphi^{II}(\varphi) &= \left[\cos((1 + \lambda_{II})\varphi) + \frac{\lambda_L + 3\mu_L + \lambda_{II}(\lambda_L + \mu_L)}{(\lambda_L + \mu_L)(1 + \lambda_{II})} \frac{\sin(\omega(1 + \lambda_{II})/2)}{\sin(\omega(1 - \lambda_{II})/2)} \cos((1 - \lambda_{II})\varphi) \right] / \gamma_{r\varphi}^{II-0} \end{aligned} \quad (5)$$

où

$$\begin{aligned} \gamma_{\varphi\varphi}^{I-0} &= 2\mu_L \lambda_I \left[\frac{(1 + \lambda_I) \sin(\omega(1 + \lambda_I)/2)}{(1 - \lambda_I) \sin(\omega(1 - \lambda_I)/2)} - 1 \right] \\ \gamma_{r\varphi}^{II-0} &= 2\mu_L \lambda_{II} \left[1 - \frac{(1 - \lambda_{II}) \sin(\omega(1 + \lambda_{II})/2)}{(1 + \lambda_{II}) \sin(\omega(1 - \lambda_{II})/2)} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

avec λ_L , μ_L les constantes de Lamé, et la définition de l'angle de l'éprouvette incluant le matériau ω (c.-à-d. $2\pi - \omega$ étant l'angle de l'entaille en V).

Les champs de déplacements et de contraintes correspondant aux modes duaux sont associés, en 2D, à un exposant $-\lambda_i$, si λ_i est l'exposant du mode primal. Ils peuvent être obtenus dans le cas particulier de l'entaille en V en 2D en remplaçant λ_i par $-\lambda_i$ dans les expressions analytiques données pour les modes primaux.

Pour la CIN dit *intégrée*, au lieu d'utiliser des fonctions de forme des éléments finis, sept fonctions sont utilisées : les modes primaux \underline{v}_I et \underline{v}_{II} , les modes duaux \underline{v}_{-I} et \underline{v}_{-II} pour trouver la pointe du V-notch (voir Section suivante), en plus des trois modes permettant des translations en x , en y et des petites rotations. Pour les quatre premiers paramètres, les v_i obtenus sont directement les GSIF des modes primaux et duaux d'ouverture et de cisaillement.

3.3 Décalage de la pointe de l'entaille en V

Les modes duaux sont des modes à énergie infinie et donc non physiques. Leur utilisation permet cependant d'extraire la valeur du GSIF des modes primaux avec le calcul d'une intégrale de contour

[6]. Le GSIF des modes duaux est censé être nul lors d'un chargement mécanique. En pratique, on peut trouver des GSIFs non nuls qui traduisent une petite perturbation (de dimension ℓ) au niveau de l'entaille, telle que la présence d'une fissure [26] ou d'un endommagement localisé [27]. Les GSIFs des modes duaux peuvent aussi être utilisés pour estimer la dimension de cette perturbation comme

$$\ell \propto \left(\frac{k_{-I}}{k_I} \right)^{\frac{1}{2\lambda_I}} \quad (7)$$

où k_I et k_{-I} sont les GSIF relatifs au mode dual et primal, respectivement. On peut alors inclure les modes duaux dans la base des fonctions de forme pour estimer leurs GSIFs, et les minimiser en absence de perturbation. On peut par exemple s'attendre à avoir une valeur non nulle des GSIFs duaux si la position de la pointe de l'entaille en V n'est pas la bonne. Nous pouvons alors trouver la position de la pointe de l'entaille en V en minimisant les GSIFs des modes duaux. Ceci est obtenu en décalant la position supposée de l'entaille de manière itérative en considérant

$$\Delta r_I(r, \varphi = 0^\circ) = \left(\frac{k_{-I}}{c_I k_I} \right)^{\frac{1}{2\lambda_I}},$$

$$\Delta r_{II}(r, \varphi = 90^\circ) = \left(\frac{k_{-II}}{c_{II} k_{II}} \right)^{\frac{1}{2\lambda_{II}}}. \quad (8)$$

Cette approche permet de définir une position optimale pour la pointe de l'entaille en V dès lors que Δr_I et Δr_{II} sont plus petits que 0.1 px, c.a.d. 1 μm . Les deux constantes c_I et c_{II} seront choisies pour aider la convergence de la méthode.

4 Quantification des facteur d'intensité des contraintes généralisés

Pour démontrer l'intérêt de la méthodologie, nous présentons ci-dessous des résultats pour un échantillon chargé dans la configuration #1 du montage Arcan (voir Figure 1), c.a.d. majoritairement en mode I. L'image de référence avec le maillage initial (obtenu via GMSH avec une taille moyenne d'éléments de 80 px) est montrée en Figure 2(a). La pointe initiale de l'entaille a été choisie au croisement de l'extrapolation des bords libres de l'entaille en V, au niveau de la croix jaune dans la Figure 2(b). Le maillage est défini par un rayon interne de 100 px et un rayon externe de 700 px, en considérant une ouverture de 40° (soit 10° en plus de l'angle nominal de l'entaille). Les décalages de la pointe de l'entaille en V trouvés avec la méthode décrite dans la Section 3.3, avec un $c_I = 1$ et $c_{II} = 10$ sont montrés dans la Figure 2(b), et leurs GSIF dans la Figure 2(c). Pour chaque image analysée, la convergence a été obtenue en moins de 15 itérations.

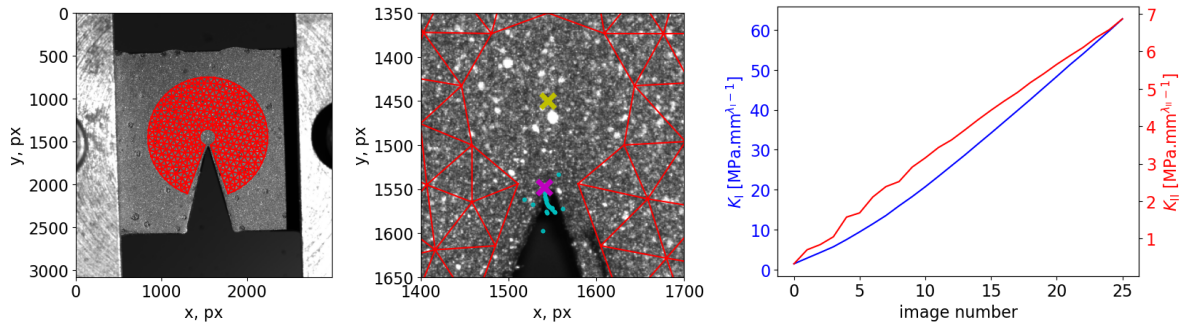


FIGURE 2 – (a) Image de référence avec maillage utilisé, (b) zoom proche de la position de l'entaille initiale (croix jaune), intermédiaires (pointes bleue claires) et finale (croix magenta); (c) GSIFs pour chaque image de l'essai analysé.

5 Conclusion et perspectives

Des fonctions analytiques pour calculer les GSIFs des entailles en V ont été utilisées pour qu'ils soient directement les inconnues de la minimisation de la différence entre deux images, sans avoir besoin de faire un moindre carré à partir des champs de déplacements mesurés. La position optimale de l'entaille en V a été trouvée de manière itérative par minimisation des GSIFs des modes duaux.

Cette méthodologie a été démontrée pour un seul essai Arcan incluant un chargement majoritairement en mode I, mais elle sera aussi appliquée pour différentes mixités de modes sur des éprouvettes similaires. L'incertitude sur la mesure des GSIFs sera évaluée en appliquant la méthode aux différentes images de référence prises avant le début du chargement. Les résidus en niveaux de gris et en déplacement seront comparés avec un calcul de CIN classique pour voir les limites de cette technique et s'il reste plus d'informations dans les images qui pourraient être exploitées en enrichissant la base cinématique utilisée.

Références

- [1] G.R. Irwin, *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*. J Appl Mech, 24, 361-364, 1957.
- [2] N. Limodin, J. Réthoré, J.Y. Buffière, A. Gravouil, F. Hild, S. Roux. *Crack closure and stress intensity factor measurements in nodular graphite cast iron using three-dimensional correlation of laboratory X-ray microtomography images*. Acta Mater, 57(14), 4090-4101, 2009.
- [3] F. París, R. Picón, J. Marín, J. Cañas. *Photoelastic determination of K_I and K_{II} : A numerical study on experimental data*. Exp Mech, 37(1), 45-55, 1997.
- [4] J. Réthoré, S. Roux, F. Hild. *Noise-robust stress intensity factor determination from kinematic field measurements*. Engng Fract Mech, 75, 3763-3781, 2008.
- [5] S. Roux, J. Réthoré, F. Hild. *Digital image correlation and fracture : an advanced technique for estimating stress intensity factors of 2D and 3D cracks*. J Phy D : Appl Phys, 42, 214004, 2009.
- [6] D. Leguillon, E. Sanchez-Palencia. *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*, John Wiley, New York, 1987.
- [7] A. Doitrand, D. Leguillon, R. Estevez. *Experimental determination of generalized stress intensity factors from full-field measurements*. Engng. Fract. Mech. 230, 106980, 2020.
- [8] P. Lazzarin, F. Berto, M. Zappalorto. *Rapid calculations of notch stress intensity factors based on averaged strain energy density from coarse meshes : Theoretical bases and applications*. Int J Fatigue, 32(10), 1559-1567, 2010.
- [9] A. Barroso, E. Graciani, V. Mantič, F. París. *A least squares procedure for the evaluation of multiple generalized stress intensity factors at 2D multimaterial corners by BEM*. Eng Anal Bound El, 36, 458-470, 2012.
- [10] M.L. Dunn, W. Suwito, S. Cunningham, *Fracture initiation at sharp notches : correlation using critical stress intensities*. Int J Sol Struct, 34(29), 3873-3883, 1997.
- [11] P.E.W. Labossiere, M.L. Dunn. *Fracture initiation at three-dimensional bimaterial interface corners*. J Mech Phys Sol, 49 (3), 609-634, 2001.
- [12] D. Vicentini, A. Barroso, J. Justo, V. Mantič, F. París. *Determination of Generalized Fracture Toughness in composite multimaterial closed corners with two singular terms ? Part II : Experimental results*. Engng Fract Mech, 89, 15-23, 2012.
- [13] A.R. Torabi, B. Bahrami, M.R. Ayatollahi. *Experimental determination of the notch stress intensity factor for sharp Vnotched specimens by using the digital image correlation method*. Theor App Fract Mech, 103, 102244, 2019.
- [14] B. Bahrami, M.R. Ayatollahi, A.R. Torabi. *Application of digital image correlation method for determination of mixed mode stress intensity factor in sharp notches*. Opt Las Engng, 124, 105830, 2020.
- [15] M. A. Sutton, J. J. Orteu, H. Schreier. *Image correlation for shape, motion and deformation measurements : Basic concepts, theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [16] F. Hild, S. Roux. *Digital Image Correlation in Optical Methods for Solid Mechanics. A Full-Field Approach*, 183-228. Wiley-VCH, 2012
- [17] G. Besnard, F. Hild, S. Roux. *"Finite-Element" displacement fields analysis from digital images : Application to Portevin-Le Chatelier bands*. Exp Mech, 6(46), 789-803, 2006.

- [18] S. Roux, F. Hild. *Stress intensity factor measurements from digital image correlation : post-processing and integrated approaches*. Int J Fract, 140(1-4), 141-157, 2006.
- [19] F. Mathieu, F. Hild, S. Roux. *Identification of a crack propagation law by digital image correlation*. Int J Fatigue, 36(1), 146-154, 2012.
- [20] R. Vargas, J. Neggers, R. B. Canto, J. A. Rodrigues, F. Hild. *Analysis of wedge splitting test on refractory castable via integrated DIC*. J Eur Ceram Soc, 36(16), 4309-4317, 2016.
- [21] J. Lachambre. *pyFEDIC*. (25.11.0). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.8298429> , 2023.
- [22] M.L. Williams, 1952. *Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension*. J Appl Mech, 19, 526-528.
- [23] A. Seweryn, K. Molski. *Elastic stress singularities and corresponding generalized stress intensity factors for angular corners under various boundary conditions*. Engng Fract Mech, 55, 529-556, 1996.
- [24] D. Vasilopoulos. *On the determination of higher order terms of singular elastic stress fields near corners*. Numer Math, 53, 51-95, 1988.
- [25] Z. Yosibash, E. Priel, D. Leguillon. *A failure criterion for brittle elastic materials under mixed-mode loading*. Int J Fract, 141, 291-312, 2006.
- [26] D. Leguillon. *Determination of the length of a short crack at a v-notch from a full field measurement*. Int J Solids Struct, 48, 884-892, 2011.
- [27] D. Leguillon, Z. Yosibashi. *Failure initiation at V-notch tips in quasi-brittle materials*. Int J Solids Struct, 122-123, 1-13, 2017.