

Optimisation de formes distributionnellement robuste

Charles Dapogny¹, Julien Prando², Boris Thibert³

¹ Laboratoire Jacques Louis Lions, Paris, charles.dapogny@sorbonne-universite.fr

² Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble, julien.prando@univ-grenoble-alpes.fr

³ Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble, boris.thibert@univ-grenoble-alpes.fr

Résumé — La forte dépendance du caractère optimal d'un design par rapport aux incertitudes portant sur les paramètres caractérisant la situation physique doit être anticipée dès la formulation d'un problème de conception optimal. Nous présentons l'approche distributionnellement robuste, issue de l'optimisation convexe, qui préconise de minimiser la pire valeur moyenne de la fonction de coût lorsque la loi de probabilité des paramètres incertains appartient à un ensemble d'ambiguïté regroupant des lois "proches" d'une loi de référence. Ces méthodes sont illustrées par deux exemples de mécanique des structures.

Mots clés — Optimisation de formes, incertitude, robustesse, dualité convexe, distance de Wasserstein.

1 Introduction et motivations

L'optimisation de formes vise à minimiser une fonction de coût dépendant du comportement physique du design. Dans les applications concrètes, ce comportement implique des paramètres physiques tels que le chargement appliqué, les coefficients matériaux ou la géométrie lorsque l'on s'intéresse à des structures mécaniques. En pratique, ces paramètres physiques ne sont bien souvent connus qu'imparfaitement, soit qu'ils sont imparfaitement mesurés (e.g. les chargements) soit qu'ils subissent des fluctuations non contrôlées au cours du temps (e.g. l'usure de la géométrie). Ainsi, garantir le maintien des performances d'un design optimisé face à de telles incertitudes constitue un enjeu industriel majeur.

Nous introduisons pour ce faire le paradigme de la robustesse distributionnelle, issu de l'optimisation convexe (voir [12] pour les travaux originaux et [6] pour une revue de la littérature), dans le contexte de l'optimisation de formes. Le problème distributionnellement robuste se présente à priori comme un problème d'optimisation à deux niveaux de type min-max, visant à minimiser la pire valeur moyenne de la fonction de coût du problème d'intérêt parmi des lois "proches" de la loi des paramètres incertains. Cette notion de proximité entre lois de probabilités dépend des données disponibles (échantillon, information statistique...) et donne lieu à des études différentes. Nous présentons ici deux cadres particuliers d'optimisation de formes distributionnellement robuste reposant sur deux manières différentes de décrire les lois "proches" de la loi de référence : le premier s'appuie sur la distance de Wasserstein entre les différentes lois tandis que le second compare les moments d'ordre 1 et 2 des lois candidates aux moments de la loi de référence.

Nous renvoyons à la note [3] introduisant une première version d'un modèle distributionnellement robuste appliqué à l'optimisation de formes. L'article [4], dont ce résumé est issu, étend le précédent article à un ensemble plus large de problèmes concernant la source d'incertitude ou l'approche choisie. La thèse [10] complète ce dernier article avec du contenu additionnel concernant les motivations, les modèles étudiés (considérant notamment le cas des incertitudes géométriques) ou les expériences numériques présentées.

Les méthodes développées dans ce travail sont très générales, et s'appliquent autant à l'optimisation par densité (SIMP) qu'à l'optimisation géométrique (méthode level-set). On se place alors dans le cadre abstrait suivant : soit $\mathcal{U}_{\text{ad}} \subset \mathcal{H}$ le sous-espace des designs possibles h , où \mathcal{H} est un espace vectoriel. Cet espace peut représenter l'espace des fonctions de densités $L^\infty(D, [0, 1])$ sur une boîte $D \subset \mathbb{R}^2$ ou un ensemble de domaines $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. Le modèle mathématique décrivant le comportement physique du design $h \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ implique différents paramètres. Ceux-ci sont regroupés dans un vecteur ξ appartenant

à un sous-espace compact (de dimension finie) Ξ de \mathbb{R}^k . Le problème de design optimal s'écrit alors :

$$\min_{h \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} J(h, \xi) \quad \text{tel que} \quad G(h) = 0, \quad (1)$$

où $J(h, \xi)$ est une fonction coût évaluant la performance du design et $G(h)$ est une contrainte imposée. L'exemple suivant illustre la forte sensibilité de ce type de problème par rapport à la valeur du paramètre ξ .

Exemple : Considérons l'optimisation de la compliance (ou inversement de sa rigidité) d'une poutre 2D sous une contrainte de volume V_T . Ce problème est modélisé à l'aide des équations de l'élasticité linéaire et le design est représenté par une fonction de densité ρ , définie sur une boîte de calcul D de taille 2×1 :

$$\min_{\rho \in L^\infty(D; [0,1])} C(\rho, \xi) \quad \text{tel que} \quad \int_D \rho \, dx = V_T.$$

Ici, $C(\rho, \xi)$ désigne la compliance du design ρ définie par :

$$C(\rho, \xi) = \int_D \boldsymbol{\sigma}(u_{\rho, \xi}) : \boldsymbol{e}(u_{\rho, \xi}) \, dx,$$

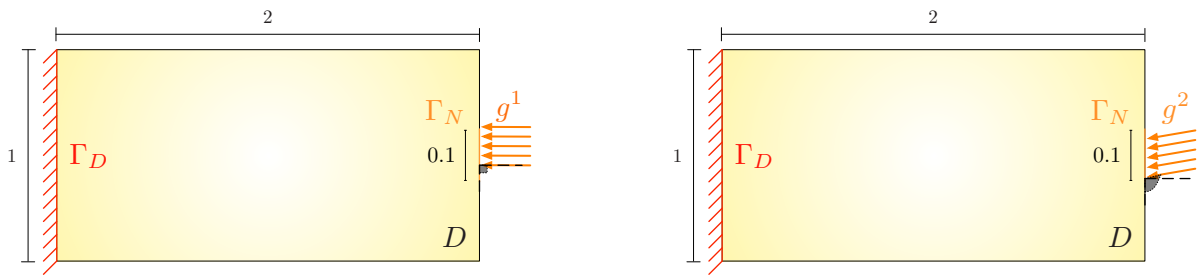
où $u_{\rho, \xi}$ est le déplacement élastique subi par le design ρ lorsque les forces surfaciques appliquées prennent la valeur ξ . Ce dernier est la solution du système d'élasticité linéaire :

$$\begin{cases} -\text{div}(\boldsymbol{\sigma}(u_{\rho, \xi})) = 0 & \text{dans } D, \\ u_{\rho, \xi} = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma}(u_{\rho, \xi})n = \xi & \text{sur } \Gamma_N, \\ \boldsymbol{\sigma}(u_{\rho, \xi})n = 0 & \text{sur } \partial D \setminus (\overline{\Gamma_N} \cup \overline{\Gamma_D}), \end{cases} \quad (2)$$

et $\boldsymbol{\sigma}(u)$ décrit le tenseur des contraintes construit à partir de la loi de Hooke A et des coefficients de Lamé (λ, μ) :

$$\forall e \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\sigma} := Ae = 2\mu e + \lambda \text{tr}(e)\mathbf{I}.$$

On considère deux situations physiques : une situation idéale où le chargement $g^1 = (-1, 0)$ est parfaitement horizontal (Figure 1 (Gauche)) alors que le second chargement $g^2 = (-1, -0.1)$ présente une petite perturbation verticale (Figure 1 (Droite)).



(a) Les forces surfaciques valent $g^1 = (-1, 0)$.

(b) Les forces surfaciques valent $g^2 = (-1, -0.1)$.

FIGURE 1 – Configurations des deux problèmes d'optimisation d'une poutre de soutien.

Les designs optimisés numériquement sont présentés sur la Figure 2 . Ceux-ci diffèrent significativement, bien que les chargements appliqués soient très proches.

La compliance des résultats optimisés $\rho_{g^1}^*$ et $\rho_{g^2}^*$, par rapport aux deux directions g^1 et g^2 , est reportée dans la Table 1 indiquant la perte de performances de ces designs lorsque le chargement présente une direction différente de celle choisie pour l'optimisation.

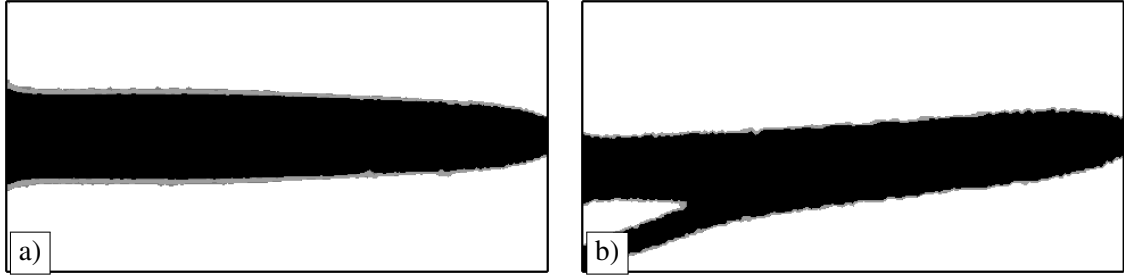


FIGURE 2 – (a) Densité optimisée $\rho_{g^1}^*$ pour la situation idéale (Figure 1 (a)); (b) Densité optimisée $\rho_{g^2}^*$ pour la situation perturbée (Figure 1 (b)).

TABLE 1 – Valeur de la compliance $C(\rho_{g^1}^*, \cdot)$ et $C(\rho_{g^2}^*, \cdot)$ des deux situations présentées dans la Figure 1 selon les deux directions de chargements g^1 et g^2 .

$C(\rho_{g^1}^*, g^1)$	$C(\rho_{g^1}^*, g^2)$	$C(\rho_{g^2}^*, g^2)$	$C(\rho_{g^2}^*, g^1)$
0.0713908	0.187543	0.0745849	0.165434

2 Optimisation distributionnellement robuste

L'incorporation d'une exigence de robustesse dans un problème d'optimisation de formes repose sur la connaissance d'informations statistiques concernant une loi de probabilité $\mathbb{P}_{\text{réel}}$ des paramètres incertains ξ (qu'il s'agisse d'échantillons, d'informations sur ses moments, ou de sa connaissance complète). Ce paramètre est modélisé comme un vecteur aléatoire $\xi \equiv \xi(\omega)$ de dimension k , où ω représente un événement d'un espace de probabilité abstrait $(O, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{\text{réel}})$. La loi de probabilité $\mathbb{P}_{\text{réel}}$ appartient à l'espace des mesures de probabilité $\mathcal{P}(\Xi)$ sur Ξ .

Une manière "classique" de rendre le problème (1) robuste à des incertitudes sur les paramètres ξ est d'optimiser la valeur moyenne du coût :

$$\min_{h \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} \int_{\Xi} J(h, \xi) d\mathbb{P}_{\text{réel}}(\xi). \quad (3)$$

Malheureusement, la loi de probabilité $\mathbb{P}_{\text{réel}}$ est rarement connue avec certitude. Généralement, seul un faible échantillon de données $\xi^1, \dots, \xi^N \in \Xi$ est disponible et on approche la loi $\mathbb{P}_{\text{réel}}$ par la moyenne empirique \mathbb{P} de ces observations :

$$\mathbb{P} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi^i}, \quad (4)$$

où $\delta_{\xi^i} \in \mathcal{P}(\Xi)$ représente la masse de Dirac au point ξ^i , $i \in \{1, \dots, N\}$. La connaissance imparfaite de la loi $\mathbb{P}_{\text{réel}}$ lors de la résolution du problème (3) rend les résultats optimaux très sensibles aux observations considérées, et donc les performances peuvent être fortement dégradées pour des événements qui diffèrent (même légèrement) de ceux utilisés dans la reconstruction (4). Le paradigme de l'optimisation distributionnellement robuste a été introduit précisément pour pallier cette difficulté.

2.1 Le modèle abstrait de l'optimisation distributionnellement robuste

Cette approche vise à minimiser la pire valeur moyenne de la fonction de coût $J(h, \xi)$ lorsque la loi de probabilité du paramètre incertain \mathbb{Q} appartient à un ensemble d'ambiguïté \mathcal{A} , regroupant des mesures de probabilités \mathbb{Q} "proches" de la loi de référence \mathbb{P} :

$$\min_{h \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} J_{\text{dr}}(h), \quad \text{où} \quad J_{\text{dr}}(h) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{A}} \int_{\Xi} J(h, \xi) d\mathbb{Q}(\xi). \quad (5)$$

La structure de type "min-max" du problème (5) rend sa résolution particulièrement délicate. Les travaux portant sur des reformulations pratiques de ce problème, issus de l'optimisation convexe, reposent souvent sur de fortes hypothèses (de convexité par exemple) qui ne sont pas applicables en optimisation de formes. Ainsi, l'objectif est de proposer des reformulations pratiques de ces problèmes, en considérant des ensembles d'ambiguïté \mathcal{A} spécifiques. On distingue deux grandes classes d'ensembles d'ambiguïté :

- Dans la Section 2.2, \mathcal{A} rassemble les lois de probabilité $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\Xi)$ qui sont "proches" de \mathbb{P} au sens de la distance de Wasserstein (régularisée). Ce modèle est généralement appliqué lorsque l'on dispose d'un échantillon de données ξ^1, \dots, ξ^N du paramètre incertain (et donc une loi reconstruite \mathbb{P} , voir (4)).
- Dans la Section 2.3, \mathcal{A} contient les lois de probabilité $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\Xi)$ dont les moments d'ordre 1 et 2 sont proches de ceux de la loi \mathbb{P} , lorsque ce sont les seules informations disponibles.

2.2 Ensemble d'ambiguïté basé sur la distance de Wasserstein

Nous commençons tout d'abord par rappeler quelques faits de base à propos de la distance de Wasserstein, issue du transport optimal, avant de présenter le problème distributionnellement robuste associé.

2.2.1 Rappel sur la distance de Wasserstein

La distance de Wasserstein [11] entre deux lois de probabilités \mathbb{P} et \mathbb{Q} de $\mathcal{P}(\Xi)$ correspond au coût minimal pour transporter la masse de \mathbb{P} sur \mathbb{Q} .

$$W(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \min \left\{ \int_{\Xi \times \Xi} c(\xi, \zeta) d\pi(\xi, \zeta), \pi \in \mathcal{P}(\Xi \times \Xi), \pi_1 = \mathbb{P}, \pi_2 = \mathbb{Q} \right\}. \quad (6)$$

Cette définition implique des couplages π , i.e. des mesures de probabilité sur l'espace $\Xi \times \Xi$ dont les premières et secondes marginales sont respectivement π_1 et π_2 . Précisément, on a :

$$\forall \varphi \in C(\Xi), \int_{\Xi} \varphi(\xi) d\pi_1(\xi) = \int_{\Xi \times \Xi} \varphi(\xi) d\pi(\xi, \zeta), \text{ et } \int_{\Xi} \varphi(\zeta) d\pi_2(\zeta) = \int_{\Xi \times \Xi} \varphi(\zeta) d\pi(\xi, \zeta).$$

La fonction de coût $c(\xi, \zeta)$ mesure le coût de transport d'une unité de masse ξ jusqu'à ζ ; dans ce travail, on choisit le coût quadratique :

$$\forall \xi, \zeta \in \Xi, \quad c(\xi, \zeta) = |\xi - \zeta|^2.$$

Dans les applications considérées, nous utiliserons plus précisément une version régularisée de la distance de Wasserstein (6), voir [2]. On définit pour cela une fonction d'entropie $H(\pi)$ par :

$$H(\pi) = \begin{cases} \int_{\Xi \times \Xi} \log \frac{d\pi}{d\pi_0} d\pi & \text{si } \pi \text{ est absolument continue par rapport à } \pi_0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7)$$

Inspiré des travaux de [1], cette définition implique un couplage de référence $\pi_0 \in \mathcal{P}(\Xi \times \Xi)$ défini par :

$$\pi_0(\xi, \zeta) = \mathbb{P}(\xi) \otimes v_\xi(\zeta), \text{ où } v_\xi(\zeta) = \alpha_\xi e^{-\frac{|\xi - \zeta|^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_\Xi(\zeta), \quad (8)$$

et α_ξ est une constante de normalisation de sorte que $v_\xi \in \mathcal{P}(\Xi)$. Plus explicitement, l'action de π_0 sur l'espace des fonctions continues $C(\Xi)$ s'écrit :

$$\int_{\Xi \times \Xi} \varphi(\xi, \zeta) d\pi_0(\xi, \zeta) = \int_{\Xi} \left(\int_{\Xi} \varphi(\xi, \zeta) dv_\xi(\zeta) \right) d\mathbb{P}(\xi).$$

Rappelons qu'un couplage π est absolument continue par rapport à un couplage π_0 s'il existe une fonction intégrable $\alpha \in L^1(\Xi \times \Xi, d\pi_0)$ telle que $\pi = \alpha(\xi, \zeta)\pi_0$. Celle-ci est généralement notée $\alpha = \frac{d\pi}{d\pi_0}$.

On définit alors la distance de Wasserstein régularisée en ajoutant un terme de pénalisation entropique à la définition (6) :

$$W_\varepsilon(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \min \left\{ \int_{\Xi \times \Xi} c(\xi, \zeta) d\pi(\xi, \zeta) + \varepsilon H(\pi), \pi \in \mathcal{P}(\Xi \times \Xi), \pi_1 = \mathbb{P}, \pi_2 = \mathbb{Q} \right\}.$$

Intuitivement, cette régularisation induit un "floutage" de la distance de Wasserstein (6), qui la rend plus robuste à de petites variations des mesures comparées.

2.2.2 Optimisation distributionnellement robuste basée sur la distance de Wasserstein

On étudie dans cette partie le problème distributionnellement robuste (5) où l'ensemble $\mathcal{A} := \mathcal{A}_W$ est défini par :

$$\mathcal{A}_W = \left\{ \mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\Xi), W_\varepsilon(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) \leq m \right\} \quad \text{pour } m > 0.$$

En utilisant des arguments de dualité convexe [1], le problème (5), de type "min-max", peut être reformulé comme un problème de minimisation sur le couple (h, λ) , composé de la variable de design h et d'une variable additionnelle $\lambda \in \mathbb{R}^+$:

$$\min_{(h, \lambda) \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \times \mathbb{R}_+} \mathcal{D}_W(h, \lambda) \quad \text{où } \mathcal{D}_W(h, \lambda) = \lambda m + \lambda \varepsilon \int_{\Xi} \log \left(\int_{\Xi} e^{\frac{J(h, \xi) - \lambda c(\xi, \xi)}{\lambda \varepsilon}} d\nu_{\xi}(\zeta) \right) d\mathbb{P}(\xi). \quad (9)$$

Ce problème simple de minimisation (sur l'espace augmenté $\mathcal{U}_{\text{ad}} \times \mathbb{R}^+$) peut alors être traité par une méthode de descente de gradient alternée.

2.3 Ensemble d'ambiguïté basé sur les moments

Dans cette section, on suppose que seules la moyenne $\mu_0 \in \mathbb{R}^k$ et la matrice de covariance $\Sigma_0 \in \mathbb{R}^{k \times k}$ de la loi du paramètre incertain ξ sont connues, voir [5]. On considère alors l'ensemble d'ambiguïté \mathcal{A}_M suivant :

$$\mathcal{A}_M = \left\{ \mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\Xi), \left| \int_{\Xi} \xi d\mathbb{Q}(\xi) - \mu_0 \right| \leq m_1, \text{ et } \int_{\Xi} (\xi - \mu_0) \otimes (\xi - \mu_0) d\mathbb{Q}(\xi) \preceq m_2 \Sigma_0 \right\}. \quad (10)$$

Ici, $m_1 > 0$ et $m_2 > 0$ sont des bornes fixées et \preceq désigne l'inégalité pour les matrices semi-définies positives.

Dans cette situation, en utilisant un argument de dualité convexe similaire à celui qui sous-tend à la Section 2.2, on obtient une formulation utilisable en pratique pour le problème distributionnellement robuste (5), en pénalisant la valeur moyenne $\int_{\Xi} J(h, \xi) d\mathbb{Q}(\xi)$ de la fonction de coût par un petit terme d'entropie strictement convexe. Ce dernier, noté $H(\mathbb{Q})$ (à ne pas confondre avec la précédente entropie $H(\pi)$ du couplage de l'Équation (7)) est défini par :

$$H(\mathbb{Q}) = \begin{cases} \int_{\Xi} \log \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}_0} d\mathbb{Q} & \text{si } \mathbb{Q} \text{ est absolument continue par rapport à } \mathbb{Q}_0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (11)$$

Ici, la loi de référence $\mathbb{Q}_0 \in \mathcal{P}(\Xi)$ est (la restriction à Ξ d') une loi normale de moyenne μ_0 et de variance $\Sigma_0 \in \mathbb{R}^{k \times k}$:

$$\mathbb{Q}_0 = \alpha e^{-\frac{1}{2}(\xi - \mu_0)\Sigma_0^{-1}(\xi - \mu_0)} \mathbb{1}_{\Xi}(\xi) d\xi, \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante de normalisation.}$$

Ces ingrédients permettent de reformuler le problème distributionnellement robuste basé sur les moments (i.e. la version de (5) où $\mathcal{A} = \mathcal{A}_M$) comme un problème de minimisation sur un espace de variables augmentées :

$$\min_{\substack{h \in \mathcal{U}_{\text{ad}}, \lambda \geq 0, \\ |\tau| \leq 1, S \in \mathcal{S}_+^k(\mathbb{R})}} \mathcal{D}_M(h, \lambda, \tau, S), \quad \text{où} \quad (12)$$

$$\mathcal{D}_M(h, \lambda, \tau, S) := \lambda m_1 - \lambda \tau \cdot \mu_0 + m_2 S : \Sigma_0 + \varepsilon \log \left(\int_{\Xi} \left(e^{\frac{J(h, \xi) + \lambda \tau \cdot \xi - S : (\xi - \mu_0) \otimes (\xi - \mu_0)}{\varepsilon}} \right) d\mathbb{Q}_0(\xi) \right). \quad (13)$$

Là encore, ce problème peut être résolu par une simple méthode de directions alternées.

3 Applications numériques

Cette section présente deux expériences numériques dans le contexte physique de la mécanique des structures, utilisant une approche distributionnellement robuste associée à une incertitude sur les chargements. Ces exemples sont discutés avec une formulation par densité en deux dimensions et avec une formulation de formes en trois dimensions.

3.1 Optimisation distributionnellement robuste basée sur la distance de Wasserstein

Nous reprenons l'exemple illustré sur la Figure 1 (Gauche). Le chargement idéal $g^1 = (-1, 0)$ appliqué sur la région Γ_N est maintenant inconnu; sa valeur ξ appartient à une boule suffisamment large $\Xi \subset \mathbb{R}^2$. La loi de probabilité de ξ est également inconnue et est estimée à partir de la valeur idéale g^1 . On introduit ainsi la loi de probabilité $\mathbb{P} = \delta_{g^1}$ et on considère le problème distributionnellement robuste :

$$\min_{\rho \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{A}_{\mathbb{W}}} \int_{\Xi} C(\rho, \xi) d\mathbb{Q}(\xi) \text{ tel que } \text{Vol}(\rho) = V_T; \quad (14)$$

qui peut se reformuler de la manière suivante d'après la Section 2.2.

$$\min_{\substack{\rho \in \mathcal{U}_{\text{ad}}, \\ \lambda \geq 0}} \mathcal{D}_{\mathbb{W}}(\rho, \lambda) \text{ tel que } \text{Vol}(\rho) = V_T,$$

$$\text{où } \mathcal{D}_{\mathbb{W}}(\rho, \lambda) := \lambda m + \lambda \varepsilon \log \left(\int_{\Xi} \exp \left(\frac{C(\rho, \zeta) - \lambda c(g^1, \zeta)}{\lambda \varepsilon} \right) dv_{g^1}(\zeta) \right),$$

et $v_{g^1}(\zeta) = \mathbb{1}_{\Xi}(\zeta) \alpha_{\xi} e^{-\frac{|g^1 - \zeta|^2}{2\sigma^2}} d\zeta$ est la loi apparaissant dans la définition du couplage de référence π_0 de l'Équation (8). Les résultats selon les paramètres du modèle (i.e. la variance σ^2 et le rayon de la boule de Wasserstein m) sont présentés en Figure 3.

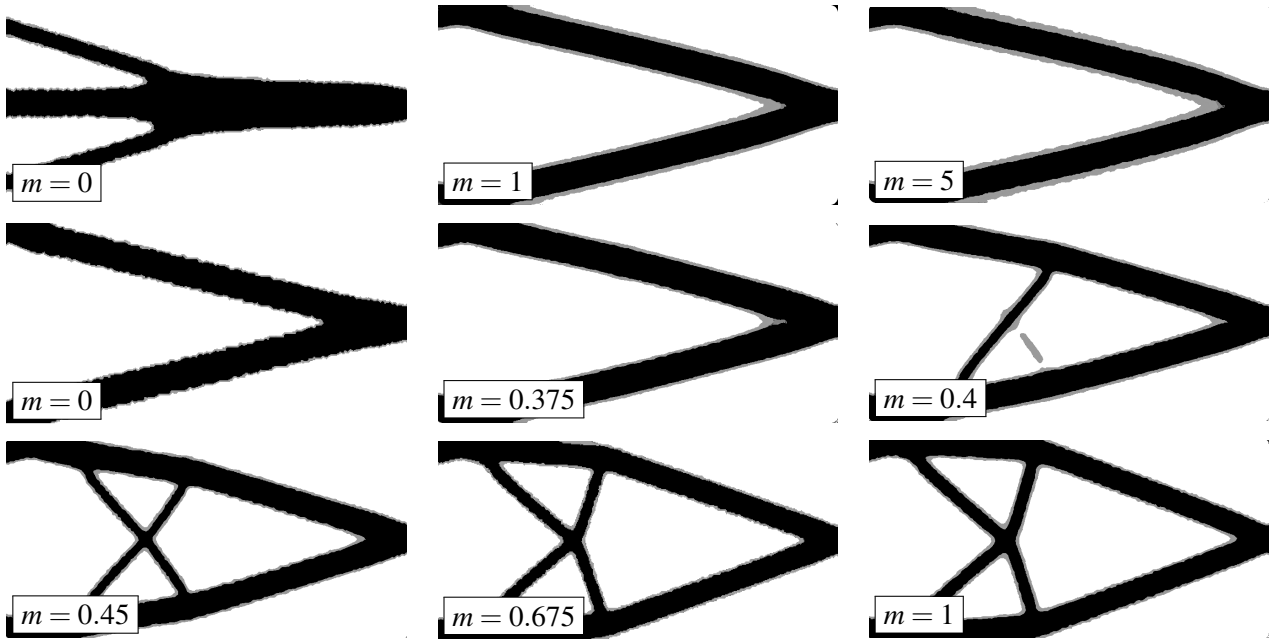


FIGURE 3 – Densités optimisées pour le problème distributionnellement robuste (14) d'une poutre de soutien pour différentes valeurs du rayon de la boule de Wasserstein m ; (1^{ère} ligne) $\sigma^2 = 2e-2$, $\varepsilon = 1e-4$; (2^{ème}/3^{ème} ligne) $\sigma^2 = 1e-1$, $\varepsilon = 1e-4$.

Lorsque le rayon de la boule de Wasserstein augmente, les "mauvaises" directions verticales sont anticipées, expliquant la formation de renforcements diagonaux qui sont similaires à celui d'une poutre typiquement soumise à un chargement vertical.

3.2 Optimisation distributionnellement robuste avec une ambiguïté sur les moments

On s'intéresse ici à l'optimisation d'une poutre de soutien 3D présentée sur la Figure 4 a). La structure est contenue dans une boîte D de taille $2 \times 1 \times 1$ dont l'une des faces Γ_D est fixée, tandis qu'un chargement ξ est appliqué sur une zone Γ_N au centre de la face opposée. Dans la situation idéale, le chargement ξ appliqué sur Γ_N est connu parfaitement et vaut $\xi^0 = (0, 0, -1)$. Le problème considéré est l'optimisation de la compliance :

$$\min_{\Omega} C(\Omega, \xi^0) \text{ tel que } \text{Vol}(\Omega) = 0.45. \quad (15)$$

Le résultat optimal Ω_{det}^* est présenté dans la Figure 4 (b,c).

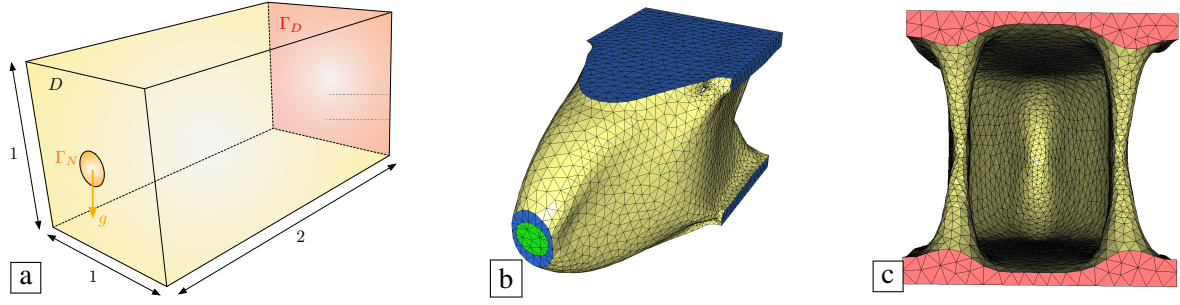


FIGURE 4 – (a) Configuration de l'optimisation d'une poutre de soutien 3D; (b) Face avant (c) Face arrière du domaine optimisé Ω_{det}^* dans la situation idéale (15) où le chargement ξ est parfaitement connu.

Supposons que le chargement ξ est maintenant incertain et appartient à une boule $\Xi \subset \mathbb{R}^3$, suffisamment large autour de ξ^0 . Supposons également que sa loi de probabilité est inconnue mais que sa moyenne $\mu_0 \in \mathbb{R}^3$ et sa variance $\Sigma_0 \in \mathbb{R}^{k \times k}$ sont connues :

$$\mu_0 = \xi^0 \text{ et } \Sigma_0 = \sigma^2 I, \text{ où } \sigma^2 = 0.01.$$

Comme introduit précédemment dans la section 2.3, on considère le problème distributionnellement robuste suivant :

$$\min_{\Omega} \left(\sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{A}_M} \int_{\Xi} C(\Omega, \xi) d\mathbb{Q}(\xi) - \varepsilon H(\mathbb{Q}) \right) \text{ tel que } \text{Vol}(\Omega) = 0.45, \quad (16)$$

où \mathcal{A}_M est l'ensemble d'ambiguïté basé sur les moments (10)

On rappelle également que l'entropie $H(\mathbb{Q})$ d'une loi de probabilité $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\Xi)$ est définie dans l'équation (11) ici, pour une loi normale \mathbb{Q}_0 de paramètre (μ_0, Σ_0) . Le paramètre ε est fixé ici à 0.001 et le problème distributionnellement robuste (16) admet la reformulation (17) suivante :

$$\min_{\substack{\Omega, |\tau| \leq 1, \\ \lambda \geq 0, S \in S_+^3(\mathbb{R})}} \mathcal{D}_M(\Omega, \lambda, \tau, S) \text{ tel que } \text{Vol}(\Omega) = 0.45, \text{ où} \quad (17)$$

$$\mathcal{D}_M(\Omega, \lambda, \tau, S) := \lambda m_1 - \lambda \tau \cdot \mu_0 + m_2 S : \Sigma_0 + \varepsilon \log \left(\int_{\Xi} \left(e^{\frac{C(\Omega, \xi) + \lambda \tau \cdot \xi - S : (\xi - \mu_0) \otimes (\xi - \mu_0)}{\varepsilon}} \right) d\mathbb{Q}_0(\xi) \right).$$

On résout ce problème pour différentes valeurs de paramètres m_1 et m_2 et les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 5.

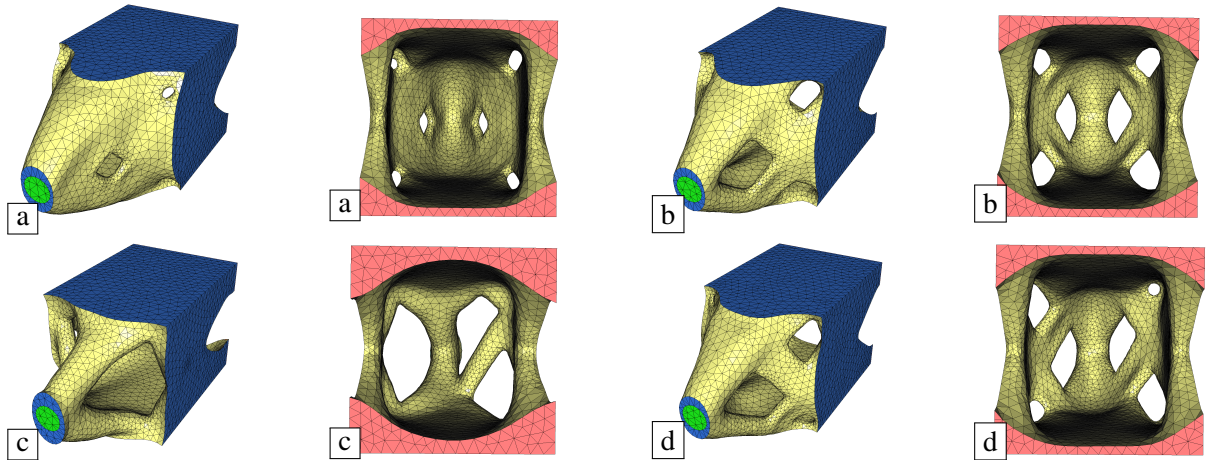


FIGURE 5 – Formes optimisées du problème distributionnellement robuste (17) d'une poutre de soutien 3D pour différentes valeurs de paramètre m_1 et m_2 ; face avant et face arrière pour les paramètres (a) $m_1 = 0, m_2 = 1$; (b) $m_1 = 1, m_2 = 1$; (c) $m_1 = 2, m_2 = 1$ et (d) $m_1 = 5, m_2 = 1$.

4 Généralisations

Nous avons présenté ici des résultats portant sur l'incertitude au niveau des chargements. Le cas d'incertitudes de dimension infinie, concernant par exemple les coefficients matériaux, a été introduit également dans l'article [4]. La thèse [10] contient également des modèles additionnels, portant notamment sur des incertitudes géométriques ou sur des problèmes du type "reliability-based" (i.e. incorporant une probabilité d'échec qui est gérée ici à l'aide de la notion de Conditional Value at Risk).

Références

- [1] W. Azizian, F. Iutzeler, and J. Malick, *Regularization for wasserstein distributionally robust optimization*, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, 29 (2023), p. 33.
- [2] M. Cuturi, *Sinkhorn distances : Lightspeed computation of optimal transport*, Advances in neural information processing systems, 26 (2013).
- [3] C. Dapogny, F. Iutzeler, A. Meda and B. Thibert, *Entropy-regularized Wasserstein distributionally robust shape and topology optimization*, Struct. Multidisc. Optim., 66, (2023), 42.
- [4] C. Dapogny, J. Prando, and B. Thibert, *Distributionally robust shape and topology optimization*, arXiv preprint arXiv :2507.21574, 2025.
- [5] E. Delage and Y. Ye, *Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems*, Operations research, 58 (2010), pp. 595–612.
- [6] D. Kuhn, S. Shafiee and W. Wiesemann, *Distributionally Robust Optimization*, arXiv preprint arXiv : 2411.02549, 2025.
- [7] R. Liu, D. Zhong, H. Lyu, and J. Han, *A bevel gear quality inspection system based on multicamera vision technology*, Sensors, 16 (2016).
- [8] K. Oladejo, R. Abu, A. Nurudeen Olatunde, and D. Adiasor, *Analysing bevel gears for efficient power transmission : A study on design, simulation and performance assessment*, East African Journal of Engineering, 7 (2024), pp. 21–34.
- [9] A. Parey and N. Tandon, *Impact velocity modelling and signal processing of spur gear vibration for the estimation of defect size*, Mechanical Systems and Signal Processing, 21 (2007), pp. 234–243.
- [10] J. Prando, *Distributionally Robust Shape and Topology optimization*, PhD Thesis, 2025.
- [11] F. Santambrogio, *Optimal transport for applied mathematicians*, Birkäuser, 2015.
- [12] H. Scarf, *A Min-Max Solution of an Inventory Problem*, 1958.