

# Définition d'un cadre probabiliste pour la justification des facteurs de sécurité en analyse de fiabilité des structures

G. Perrin<sup>1</sup>, M. Temple-Boyer<sup>1,2</sup>, V. Chabridon<sup>2</sup>, J. Reygner<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Université Gustave Eiffel, COSYS, 14-20 Boulevard Newton, 77447 Marne-la-Vallée, France, guillaume.perrin@univ-eiffel.fr

<sup>2</sup> EDF R&D, 6 quai Watier, 78401 Chatou, France, marie.temple-boyer@edf.fr, vincent.chabridon@edf.fr

<sup>3</sup> CERMICS, ENPC, Institut Polytechnique de Paris, Marne-la-Vallée, France, julien.reygner@enpc.fr

---

## Résumé —

Ce travail s'intéresse à l'analyse de fiabilité des structures complexes, et plus précisément à la justification des facteurs de sécurité. On se place pour cela dans un cadre probabiliste : les quantités non parfaitement maîtrisées caractérisant une structure d'intérêt sont modélisées par des quantités aléatoires, et on propose un formalisme permettant de s'assurer que les indicateurs de bon fonctionnement de la structure (sous la forme de mesures de risques) restent en dessous de seuils normatifs avec une probabilité contrôlée. L'approche proposée est illustrée sur plusieurs cas numériques représentatifs en calcul des structures.

**Mots clés** — Analyse de fiabilité, systèmes complexes, facteurs de sécurité, prise de décision en contexte incertain

---

## 1 Introduction

L'analyse de fiabilité des structures complexes s'appuie de manière croissante sur la simulation numérique. Dans ce contexte, ce travail traite du cas où le fonctionnement d'une structure d'intérêt peut être analysé à l'aide d'un modèle déterministe de type boîte noire. Le vecteur d'entrée  $\mathbf{x}$  décrit à la fois les caractéristiques de la structure et les conditions environnementales, tandis que la variable de sortie  $y$ , supposée scalaire, permet de définir un domaine de défaillance sous la forme

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \mid y(\mathbf{x}) > s\},$$

avec  $s \in \mathbb{R}$  un seuil donné. Le caractère déterministe du simulateur considéré signifie que deux évaluations identiques de  $\mathbf{x}$  conduisent à la même valeur de  $y$ , tandis que l'aspect boîte noire traduit l'absence d'expression analytique explicite liant  $\mathbf{x}$  à  $y$  : seules des évaluations ponctuelles sont supposées disponibles.

Dans la pratique, les valeurs des variables d'entrée ne sont pas parfaitement connues, en raison par exemple de tolérances de fabrication ou de conditions d'exploitation variables. Nous les modélisons alors comme des variables aléatoires regroupées dans le vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$ . La variable de sortie correspondante, notée  $Y = y(\mathbf{X})$ , devient également aléatoire.

L'analyse de fiabilité de la structure repose alors sur deux étapes distinctes :

- (i) l'estimation d'une mesure de risque (typiquement un quantile de niveau  $\alpha$  ou une probabilité de défaillance),
- (ii) sa confrontation à des exigences normatives ou à une expertise disponible pour décider du caractère acceptable ou non du risque estimé.

Alors que de nombreux travaux ont porté sur le développement de méthodes efficaces pour estimer différentes mesures de risque [1, 2, 3, 4, 5, 6], la phase décisionnelle, qui consiste à interpréter et exploiter ces estimations, reste rarement abordée, comme indiqué dans [7].

C'est sur cette seconde étape de prise de décision que se concentre ce travail. L'objectif est ainsi de proposer une méthode à base de facteurs de sécurité bien définis pour pouvoir décider, dans un contexte où l'information sur la loi de  $\mathbf{X}$  peut être partielle et où le nombre d'appels au modèle est nécessairement fini, s'il est raisonnable de supposer que le risque de défaillance de la structure est suffisamment faible vis-à-vis de la mesure de risque considérée.

Deux approches seront notamment étudiées. Dans un premier temps, on supposera que l'on dispose d'un grand nombre de réalisations indépendantes et identiquement distribuées de  $\mathbf{X}$ , et qu'il est possible d'évaluer le modèle en chacun de ces points disponibles. On se retrouve ainsi dans une configuration relativement standard, où il est possible de proposer des estimateurs classiques des mesures de risque. Dans un second temps, on étudiera le cas où le nombre de réalisations disponibles de  $\mathbf{X}$  est relativement faible (vis-à-vis du risque acceptable considéré). Dans ce cas, la majorité des observations de  $\mathbf{X}$  conduisent à des valeurs de  $Y$  situées hors du domaine de défaillance, et deux niveaux d'incertitude devront être considérés pour la prise de décision : un premier en lien avec l'estimation de la loi des variables d'entrée, et un second en lien avec la propagation de cette estimation jusqu'à la décision finale.

## 2 Formalisme proposé

Supposons que l'on s'intéresse à l'analyse de fiabilité d'une structure  $\mathcal{S}$ , dont les propriétés (matériaux, conditions limites, géométrie, etc.) peuvent être regroupées dans un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$ , et dont le bon fonctionnement peut être analysé à travers une quantité d'intérêt scalaire  $y(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ . Les valeurs de  $\mathbf{x}$  sont supposées être connues de manière incertaine, et sont modélisées par un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  de loi de probabilité  $\mu_{\mathbf{X}}$  (que l'on pourra considérer plus ou moins bien connue). La quantité d'intérêt, comme fonction d'entrées aléatoires, devient elle-même aléatoire, et est notée  $Y = y(\mathbf{X})$ . On note  $F_Y$  la fonction de répartition de  $Y$ .

De manière générale, l'analyse de fiabilité de la structure repose sur l'introduction d'un seuil  $s \in \mathbb{R}$  et d'un risque acceptable  $1 - \alpha \in (0, 1)$ , puis sur le choix d'une mesure de risque  $\mathcal{R}_\alpha(Y)$ . Avec ces notations, on peut définir le critère de décision suivant.

**Critère de décision 1 (Cas théorique)** *Le système est considéré comme suffisamment sûr si  $\mathcal{R}_\alpha(Y) \leq s$ .*

Parmi les mesures de risque les plus fréquemment utilisées, on peut citer :

- la fonction de marge :  $m_\alpha(Y) = \mathbb{E}[Y] + f(\alpha)\sqrt{\text{Var}(Y)}$ , avec  $f$  une fonction positive croissante,
- le quantile :  $q_\alpha(Y) = \inf\{y \in \mathbb{R} : F_Y(y) \geq \alpha\}$ ,
- le superquantile (aussi appelé "conditional value at risk") :  $\bar{q}_\alpha(Y) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 q_\beta(Y) d\beta$ .

On notera que les valeurs de  $s$  et  $\alpha$  sont cas-dépendants tout en étant intrinsèquement reliées. En effet, plus le risque acceptable  $1 - \alpha$  est petit (et donc plus  $\alpha$  est grand), et plus on peut s'attendre à ce que les conséquences associées à la défaillance de la structure soient redoutées. Par ailleurs, plus la valeur de  $s$  est choisie élevée par rapport aux valeurs possibles de  $Y$ , plus on peut penser que le fait que  $\mathcal{R}_\alpha(Y)$  dépasse  $s$  soit problématique, et donc plus on s'attend à un risque acceptable faible.

Comme la valeur réelle de  $\mathcal{R}_\alpha(Y)$  est (la plupart du temps, pour les applications réelles) inconnue, il est important de remarquer que le critère de décision 1 est difficile (voire impossible) à utiliser dans la pratique.

Pour contourner ce problème, supposons que l'on dispose de  $n$  réalisations i.i.d. de  $\mathbf{X}$  regroupées dans l'ensemble  $\mathcal{D}_n = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ , et que l'on puisse construire un estimateur statistique  $\hat{\mathcal{R}}_{\alpha,n}$  de  $\mathcal{R}_\alpha(Y)$  en s'appuyant sur un nombre fini (pouvant être plus grand que  $n$ ) d'évaluations de  $y$  en des points de  $\mathbb{X}$  choisis de manière intelligente à partir de  $\mathcal{D}_n$ .

Comme  $\hat{\mathcal{R}}_{\alpha,n}$  est un estimateur de  $\mathcal{R}_\alpha(Y)$ , il est fortement probable qu'il surestime ou sous-estime la véritable valeur de  $\mathcal{R}_\alpha(Y)$ . Par conséquent, s'assurer que  $\hat{\mathcal{R}}_{\alpha,n}$  est inférieur à  $s$  ne sera probablement pas suffisant pour garantir que le système concerné est réellement sûr. On peut alors chercher à pénaliser la mesure de risque, comme indiqué dans le critère de décision suivant.

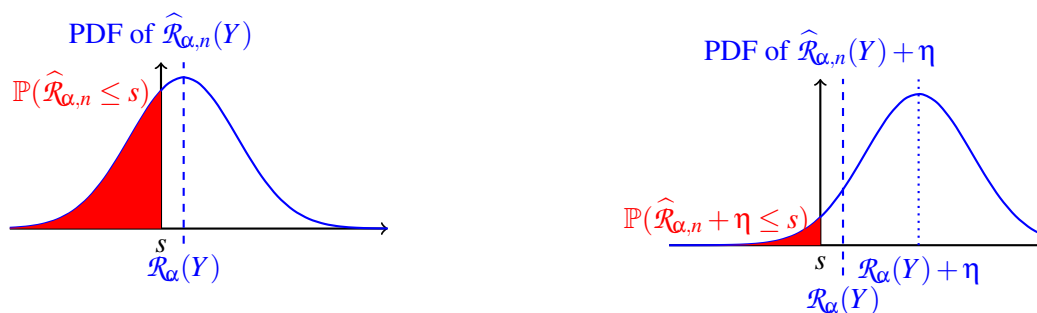
**Critère de décision 2 (Cas basé sur un facteur de sécurité)** *Le système est considéré comme suffisamment sûr pour le facteur de sécurité  $\eta \geq 0$  si  $\hat{\mathcal{R}}_{\alpha,n}(Y) + \eta \leq s$ .*

L'ajout du facteur de sécurité  $\eta$  permet ainsi d'éviter, dans une certaine mesure, le comportement indésirable décrit ci-dessus, comme illustré sur la figure 1. Remarquons que le choix de  $\eta$  est ici crucial :

une valeur de  $\eta$  trop petite ne permettrait pas d'éviter le comportement indésirable décrit ci-dessus, tandis qu'une valeur de  $\eta$  trop grande risquerait de labelliser comme "non-sûres" un nombre important de structures devant au contraire être considérées comme sûres si l'on avait accès à la vraie valeur de  $\mathcal{R}_\alpha(Y)$ .

Remarquons également, comme il est expliqué dans [8], qu'il est possible de proposer une formulation alternative pour ce facteur de sécurité, en jouant sur le risque acceptable plutôt que sur le seuil à ne pas dépasser. C'est ce qui est proposé dans le critère suivant, en introduisant un autre facteur de sécurité  $\delta \in (0, 1)$ .

**Critère de décision 3 (Version duale du cas basé sur un facteur de sécurité)** *Le système est considéré comme suffisamment sûr pour le facteur de sécurité  $\delta$  si  $\widehat{\mathcal{R}}_{\alpha+\delta,n}(Y) \leq s$ .*



(a) Illustration de l'approche naïve. La courbe bleue représente la PDF de  $\widehat{\mathcal{R}}_{\alpha,n}(Y)$ . Même si  $\mathcal{R}_\alpha(Y) > s$ , la probabilité que le système soit labellisé comme sûr (représentée par l'aire en rouge) est élevée.

(b) Illustration du critère 2. La courbe bleue représente la PDF de  $\widehat{\mathcal{R}}_{\alpha,n}(Y) + \eta$ , et la courbe pointillée bleue verticale indique la valeur  $\mathcal{R}_\alpha(Y) + \eta$ . L'ajout du facteur de sécurité  $\eta$  permet de réduire la probabilité que le système soit labellisé comme sûr.

FIGURE 1 – Illustration d'un critère de décision naïf et du critère 2 pour une structure à évaluer. Le seuil  $s$  (ligne noire continue) et la mesure du risque réel  $\mathcal{R}_\alpha(Y)$  (ligne bleue en pointillés) sont représentés. La distribution de l'estimateur  $\widehat{\mathcal{R}}_{\alpha,n}(Y)$  est supposée gaussienne et centrée sur  $\mathcal{R}_\alpha(Y)$ . La zone remplie en rouge représente la probabilité que le système soit labellisé comme sûr avec le critère considéré.

Afin de choisir les valeurs de  $\eta$  et  $\delta$  dans ce contexte d'information disponible finie, nous proposons d'adopter le formalisme des tests statistiques [9]. On prend alors comme hypothèses nulle et alternative

$$H_0 = \{\mathcal{R}_\alpha(Y) > s\}, \quad H_1 = \{\mathcal{R}_\alpha(Y) \leq s\}.$$

Comme on souhaite tester si le système est suffisamment sûr ou non, on choisit l'hypothèse nulle  $H_0$  comme correspondant à un système non sûr, conformément aux formulations standard des tests d'hypothèses statistiques. Ensuite, si l'on désigne par  $\beta \in (0, 1)$  l'erreur de type I, c'est-à-dire la probabilité de labelliser le système comme sûr alors qu'il ne faudrait pas, on peut alors choisir  $\eta$  et  $\delta$  comme les solutions (respectives) des problèmes d'optimisation suivants (sous la convention que  $\inf \emptyset = +\infty$ ) :

$$\inf \left\{ \eta > 0 : \sup_{Z \in V_{\text{unsafe}}} \mathbb{P}(\widehat{\mathcal{R}}_{\alpha,n}(Z) + \eta \leq s) < \beta \right\}, \quad \inf \left\{ \delta > 0 : \sup_{Z \in V_{\text{unsafe}}} \mathbb{P}(\widehat{\mathcal{R}}_{\alpha+\delta,n}(Z) \leq s) < \beta \right\}, \quad (1)$$

$$V_{\text{unsafe}} = \{Z : \mathcal{R}_\alpha(Z) > s\}. \quad (2)$$

En d'autres termes, on cherche les plus petites valeurs de  $\eta$  et  $\delta$  telles que si l'on considère une structure caractérisée par  $Z$  que l'on devrait labelliser comme "non-sûre" ( $Z$  est choisi dans  $V_{\text{unsafe}}$ ), la probabilité de labelliser cette structure comme "sûre" (en observant  $\mathcal{R}_\alpha(Z) + \eta \leq s$  ou  $\mathcal{R}_{\alpha+\delta}(Z) \leq s$ ) doit être plus petite que  $\beta$  (que l'on choisit a priori petit).

La résolution des problèmes introduits dans l'équation 1 est a priori non triviale, et dépend en pratique du choix de la mesure de risque  $\mathcal{R}_\alpha$ , et du type d'estimateur considéré pour l'approcher à partir de  $\mathcal{D}_n$ . De même, les formulations en fonction de  $\eta$  et de  $\delta$  ne sont pas équivalentes, et en fonction de la mesure de risque considérée, l'une peut être plus adaptée que l'autre.

En se basant sur les résultats présentés en [8] et [10], l'objectif de ce travail sera de montrer dans quelle mesure ces problèmes peuvent être résolus numériquement de manière efficace dans les deux cas suivants : le cas où  $1/n$  est relativement petit vis-à-vis de  $1 - \alpha$ , et le cas où  $1/n$  est du même ordre de grandeur que  $1 - \alpha$ . Dans le cas où  $n$  est réduit, on se basera notamment sur un estimateur de  $\mathcal{R}_\alpha(Y)$  qui repose sur une première étape d'estimation de la distribution de probabilité de  $\mathbf{X}$ .

L'intérêt d'une telle construction de facteurs de sécurité sera finalement illustré sur plusieurs cas numériques :

- un cas d'évaluation de la hauteur d'une digue vis-à-vis d'un risque de crue,
- un cas d'évaluation de la stabilité d'un train à grande vitesse vis-à-vis d'un critère de déraillement.

### 3 Conclusions

En mettant l'accent sur l'inférence statistique et la quantification des incertitudes, l'idée principale de ce travail est de fournir un moyen de prendre des décisions (justifiées) sur la fiabilité de structures lorsque les informations disponibles pour cette analyse sont limitées. En effet, l'analyse de la fiabilité des structures repose traditionnellement sur des modèles probabilistes qui nécessitent une connaissance fine des distributions de probabilité des données d'entrée et un calcul précis de mesures de risque. Mais dans les contextes pratiques de l'ingénierie, ces distributions sont souvent inconnues ou mal caractérisées, et il n'est généralement pas possible de calculer exactement ces mesures de risque. Il est alors nécessaire d'adapter les méthodes de prise de décision existantes pour déterminer si le système est sûr ou non, tout en cherchant à contrôler au mieux le risque de mauvaise labellisation du système.

Une façon de reformuler ce problème que nous détaillons dans ce travail repose sur l'introduction de facteurs de sécurité, que l'on peut formuler au niveau du seuil à ne pas dépasser, ou au niveau du risque acceptable que l'on peut chercher à réduire.

Une distinction importante est faite entre les cas où  $n$  est grand ou non devant l'inverse du risque acceptable, qui a été noté  $1 - \alpha$ . C'est dans le traitement de ce cas où  $n$  est relativement petit, c'est-à-dire les cas où l'estimation de la mesure de risque doit intégrer une source supplémentaire d'incertitude liée à la méconnaissance de la distribution de probabilité des entrées, que se trouveront les principales contributions de ce travail.

### Références

- [1] R. Rackwitz. Reliability analysis—a review and some perspectives. *Structural Safety*, 23(4) :365–395, 2001.
- [2] J. Morio and M. Balesdent. *Estimation of Rare Event Probabilities in Complex Aerospace and Other Systems : A Practical Approach*. Woodhead Publishing, Elsevier, 2015.
- [3] J.-M. Bourinet. *Mechanical Engineering under Uncertainties : From Classical Approaches to Some Recent Developments*, chapter “5. Rare-event Probability Estimation”, pages 145–204. ISTE - Wiley, 2021.
- [4] A. Gerasimov and M. Vořechovský. Failure probability estimation and detection of failure surfaces via adaptive sequential decomposition of the design domain. *Structural Safety*, 104 :102364, 2023.
- [5] D. Yadav, K. Sekar, and P. Ramu. Adaptive sampling based estimation of small probability of failure using interpretable Self-Organising Map. *Structural Safety*, 109 :102470, 2024.
- [6] K. Cheng, I. Papaioannou, and D. Straub. Enhanced sequential directional importance sampling for structural reliability analysis. *Structural Safety*, page 102574, 2025.
- [7] N. P. Høj, I. B. Kroon, J. S. Nielsen, and M. Schubert. System risk modelling and decision-making—Reflections and common pitfalls. *Structural Safety*, 113 :102469, 2025.
- [8] Marie Temple-Boyer, Emma Cussenot, Guillaume Perrin, Vincent Chabridon, Julien Pelamatti, Emmanuel Remy, and Bertrand Iooss. Risk Measures in Reliability Engineering : Comparison, Duality and Decision-Making. *(hal-05295409)*, 2025.
- [9] E. L. Lehmann and J. P. Romano. *Testing Statistical Hypotheses*. Springer Texts in Statistics. Springer New York, NY, Third ed. edition, 2005.
- [10] Guillaume Perrin, Julien Reygner, and Vincent Chabridon. Enhancing Reliability Analysis with Limited Observations : A Statistical Framework for System Safety Margins. *Structural Safety*, 2025.