

Adaptation de maillage espace-temps : une alternative à la projection dans les méthodes DG

V. Degrooff¹, J.-F. Remacle², N. Moës³

¹ IMMC, UCLouvain, vincent.degrooff@uclouvain.be

² IMMC, UCLouvain, jean-francois.remacle@uclouvain.be

³ IMMC, UCLouvain, nicolas.moes@uclouvain.be

Résumé — Nous présentons une méthode d'adaptation de maillage dans un cadre espace-temps permettant des changements topologiques locaux sans nécessiter de projection des solutions. Globalement construit par extrusion temporelle, le maillage espace-temps est adapté localement par des opérations de nucléation et d'annihilation, tout en restant conforme. Cette approche permet de simuler des EDP hyperboliques linéaires et non-linéaires à l'aide de schémas de Galerkin discontinu. La méthode est validée sur des simulations 1D et des résultats préliminaires sont présentés en 2D.

Mots clés — Adaptation de maillage ; DG ; Espace-temps ; Projection de champ

1 Contexte et objectifs

L'adaptation de maillage est un outil clé pour résoudre efficacement des équations aux dérivées partielles (EDP) lorsque la solution présente des variations locales importantes : forts gradients, interfaces matérielles, chocs, couches limites, etc. Classiquement, on adapte le maillage spatial à chaque pas de temps en fonction de la solution courante. Cette dernière doit alors être interpolée ou projetée sur le nouveau maillage pour poursuivre la simulation. Ce transfert de solution, ou projection, bien que largement utilisé, peut introduire des erreurs numériques, compromettre la conservation locale, ou simplement complexifier la mise en œuvre de tels schémas. Une illustration de ce processus est donnée à la figure 1.

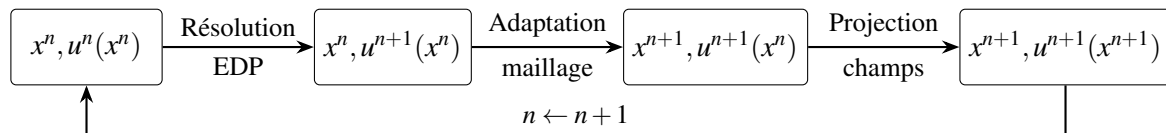


FIGURE 1 – Détails d'une itération temporelle avec de l'adaptation de maillage classique.

Les méthodes espace-temps traitent les dimensions spatiales et temporelle de manière unifiée. Il est donc possible de construire directement un maillage espace-temps qui couvre le domaine spatial sur tous les temps de la simulation ($\Omega \times [0, T]$). Cependant, le coût de calcul d'une telle approche devient rapidement prohibitif étant donné qu'il augmente la dimension du problème. Par exemple, un cube unitaire simulé sur 1 seconde, avec une taille de maille $h_x = h_y = h_z = 0.01$ et une précision similaire $h_t = 0.01$ en temps impliquerait de résoudre un seul système, mais de l'ordre de 10^8 inconnues.

Fort heureusement, il existe une alternative assez naturelle : progresser par couches temporelles successives (*time slabs*) jusqu'à atteindre le temps final désiré T . On retombe ainsi sur une succession de problèmes de taille raisonnable. De plus, chaque couche démarre à un temps commun t_n et finit à un temps commun t_{n+1} , assurant ainsi facilement la causalité des EDP hyperboliques/paraboliques.

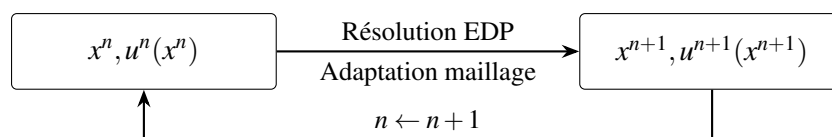


FIGURE 2 – Détails d'une itération temporelle dans un cadre espace-temps.

Au cours d'une simulation espace-temps, il est possible d'adapter légèrement le maillage spatial en déplaçant les nœuds dans une tranche de temps. Cette approche, comparable aux méthodes *Arbitrary Lagrangian-Eulerian* (ALE), s'effectue toutefois à nombre de nœuds constant. Autoriser des changements topologiques à l'intérieur d'une tranche de temps augmente la flexibilité de l'adaptation. Il est cependant crucial de conserver le maillage spatial initial de la tranche pour maintenir la continuité de la solution et éviter toute projection. Le défi principal consiste alors à nucléer et annihiler les éléments correctement dans le maillage espace-temps, en veillant à ce que chaque élément conserve un jacobien de transformation positif. La résolution de l'EDP et l'adaptation du maillage sont ainsi effectuées simultanément, comme illustré à la figure 2.

Dans ce travail, nous proposons une méthode d'adaptation de maillage espace-temps sans projection et permettant des changements topologiques importants au cours d'une tranche de temps. Les simulations 1D spatiales y sont indiquées comme 1.5D espace-temps, tandis que les simulations 2D spatiales sont notées 2.5D espace-temps pour souligner la dimension temporelle supplémentaire, obtenue globalement par extrusion.

La section suivante présente la formulation numérique adoptée pour résoudre l'équation d'évolution sur un tel maillage espace-temps.

2 Schéma numérique

Nous considérons des équations hyperboliques de la forme

$$\partial_t q + \bar{\nabla} \cdot \bar{F}(q) = S(q), \quad (1)$$

où q est le vecteur des variables conservées, \bar{F} le flux convectif et S un terme source. L'opérateur $\bar{\nabla} = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z) = (\partial_t, \bar{\nabla})$ désigne le gradient espace-temps et le tenseur associé $F = [q, \bar{F}]$ permet d'écrire la loi de conservation sous la forme compacte

$$\bar{\nabla} \cdot F(q) = S(q). \quad (2)$$

Le domaine espace-temps $\mathcal{K} = [0, T] \times \Omega$ est décomposé en tranches de temps successives $\mathcal{K}^n = [t_n, t_{n+1}] \times \Omega$ afin de limiter la taille des systèmes à résoudre. Bien qu'un domaine spatial évolutif $\Omega(t)$ puisse être envisagé, nous nous limitons ici au cas stationnaire où la frontière $\partial\Omega$ est constante. Dans chaque tranche, les éléments \mathcal{K}_i^n partagent des interfaces notées Q_{ij}^n .

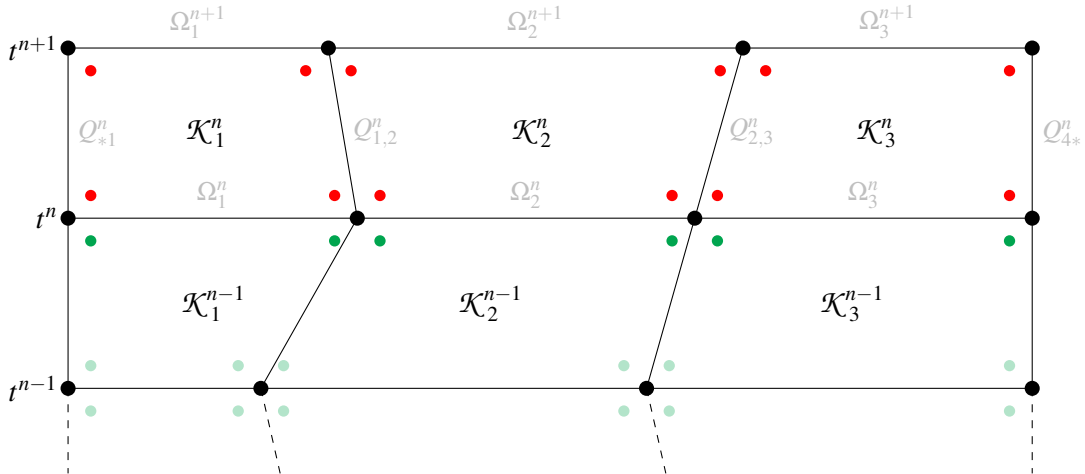


FIGURE 3 – Discretisation espace-temps d'un domaine 1D sur deux tranches de temps successives. Les points verts et rouges représentent les degrés de liberté d'une approximation polynomiale d'ordre 1 dans chaque élément \mathcal{K}_i^n , respectivement connus et inconnus.

Cette équation est discrétisée à l'aide d'un schéma de Galerkin discontinu (DG) dans le domaine espace-temps. La formulation faible locale sur un élément \mathcal{K}_i^n s'écrit

$$r_{il}(q) = - \int_{\mathcal{K}_i} F(q) \cdot \nabla \phi_{il} dx + \oint_{\partial \mathcal{K}_i} \phi_{il} F(q) \cdot n ds - \int_{\mathcal{K}_i} S(q) \phi_{il} dx = 0 \quad l = 1, \dots, N \quad (3)$$

où ϕ_{il} sont les fonctions de forme locales et N le nombre de degrés de liberté par élément. Une illustration de la discrétisation espace-temps est donnée à la figure 3 pour un domaine 1D et des fonctions de forme d'ordre 1, mais le principe s'étend naturellement à des dimensions et ordres supérieurs.

Les intégrales de volume sur \mathcal{K} sont évaluées directement à partir de la solution locale. En revanche, les intégrales de surface requièrent une attention particulière, la solution q étant discontinue à l'interface entre éléments. On distingue alors trois types de faces :

- les faces spatiales initiales Ω_i^n ,
- les faces spatiales finales Ω_i^{n+1} ,
- les faces latérales Q_{ij}^n .

Sur les deux premières, le champ q est évalué uniquement du côté *passé* de l'interface par causalité, donc respectivement en t_n^- et t_{n+1}^- . L'intégrale sur la face initiale Ω_i^n sert donc de terme source puisqu'elle ne fait intervenir aucun degré de liberté inconnu, en rouge à la figure 3. Sur les faces latérales Q_{ij}^n , un flux numérique de type Lax-Friedrichs assure le couplage entre éléments adjacents.

Chaque tranche temporelle conduit ainsi à un système linéaire ou non-linéaire en fonction de l'EDP considérée. Dans le cas non-linéaire, ce système est résolu par une méthode de Newton-Raphson.

Cette formulation décrit le cœur du schéma DG espace-temps. Dans la section suivante, nous étendons cette approche pour permettre d'adapter localement le maillage espace-temps sans projection.

3 Adaptation de maillage espace-temps

Afin de permettre une adaptation dynamique du maillage sans recours à la projection, nous introduisons des opérations topologiques locales au sein d'une tranche de temps. Celles-ci consistent à *nucléer* de nouveaux éléments et à *annihiler* des éléments existants sur base d'un champ de taille donné, tout en garantissant la conformité de la géométrie espace-temps.

Stratégie d'adaptation

Le maillage d'une tranche espace-temps est défini par la topologie du maillage spatial, par son épaisseur Δt et par la position spatiale des nœuds aux temps t_n et t_{n+1} , que l'on indiquera respectivement x et $y \in \mathbb{R}^d$. Pour une tranche donnée, les positions x_i des nœuds au temps t_n sont imposées, soit à partir du maillage initial fourni par l'utilisateur, soit à partir de la tranche précédente. Les positions y_i au temps t_{n+1} sont quant à elles libres, et initialisées à x_i .

Comme dans un algorithme d'adaptation classique, une mesure locale de la longueur des arêtes est évaluée à partir d'un champ de taille, de sorte qu'une arête optimale ait une longueur unitaire. Le processus d'adaptation se décompose en quatre étapes successives :

1. *Split* : les arêtes dont la longueur dépasse une tolérance ℓ_{\max} sont divisées en deux arêtes. Cette opération est répétée jusqu'à ce que toutes les arêtes vérifient $\ell \leq \ell_{\max}$. Le nœud i créé lors de la division d'une arête (a, b) reçoit comme position initiale $x_i \leftarrow x_a$ ou $x_i \leftarrow x_b$ sur base d'un critère défini ci-dessous en 1.5D et 2.5D. Sa position finale est quant à elle $y_i \leftarrow (y_a + y_b)/2$.
2. *Collapse* : les arêtes dont la longueur est inférieure à une tolérance ℓ_{\min} sont successivement supprimées en fusionnant leurs nœuds, jusqu'à ce que $\ell \geq \ell_{\min}$ pour toutes les arêtes. Les nœuds a et b d'une arête courte (a, b) sont envoyés à la position finale $y_a \leftarrow y_b \leftarrow (y_a + y_b)/2$.
3. *Relocate* : les nœuds restants sont déplacés pour se rapprocher de leur position optimale y_i^{target} , estimée à partir du champ de taille.
4. *Simplify* : les paires d'éléments espace-temps dégénérés (quadrangles devenus triangles) en t_n / dégénérés en t_{n+1} sont fusionnés.

Méthodologie 1.5D

En 1D, la topologie du maillage spatial est triviale. L'adaptation revient donc à déterminer les positions y_i des nœuds au temps t_{n+1} , comme illustré à la figure 4. Lors du *split* d'un segment (a, b) , un nouveau nœud m est nucléé vers la position médiane $y_m \leftarrow (y_a + y_b)/2$, à partir de l'extrémité x_a ou x_b la plus proche de y_m .

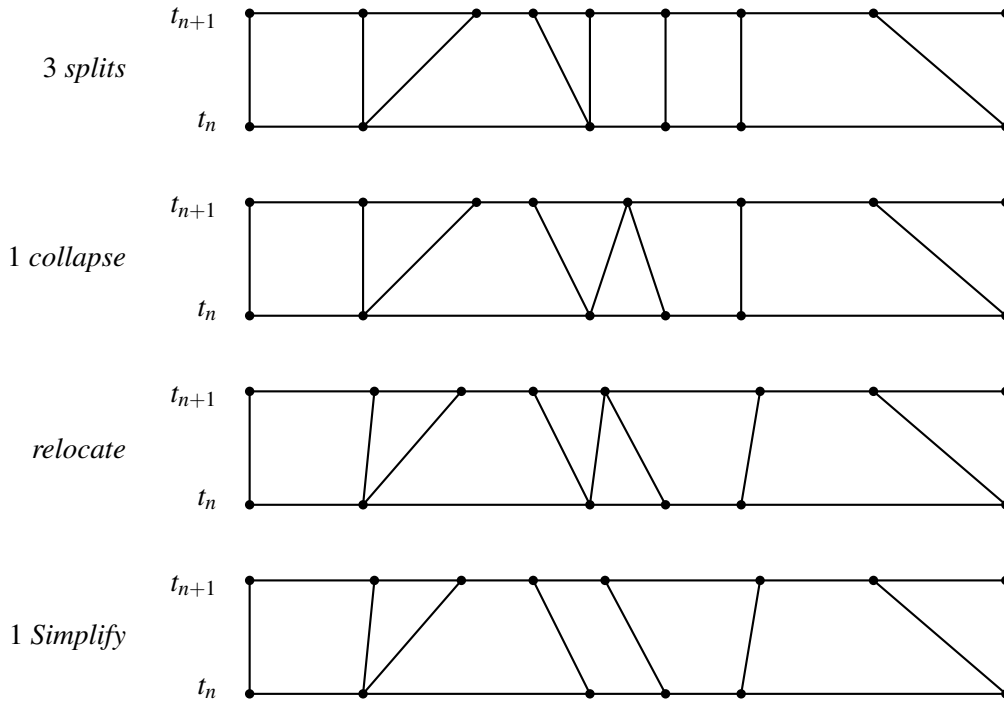


FIGURE 4 – Exemple d’adaptation de maillage espace-temps dans un domaine 1D.

3.1 Méthodologie 2.5D

L’extension de cette approche à la dimension supérieure s’avère plus délicate. Les opérations élémentaires de *split* et de *collapse* sont d’abord plus complexes à implémenter. Mais la difficulté principale survient surtout lorsque l’on modifie des arêtes nouvellement créées.

Les opérations de *split* et de *collapse* sont illustrées à la figure 5 pour une arête partagée par deux triangles. À noter qu’un *swap* d’arêtes peut être obtenu en combinant un *split* suivi d’un *collapse*.

Pour un triangle dont les sommets se déplacent linéairement, le déterminant du jacobien de transformation varie quadratiquement en temps. Il peut donc arriver qu’un des 4 triangles issu d’un *split* se

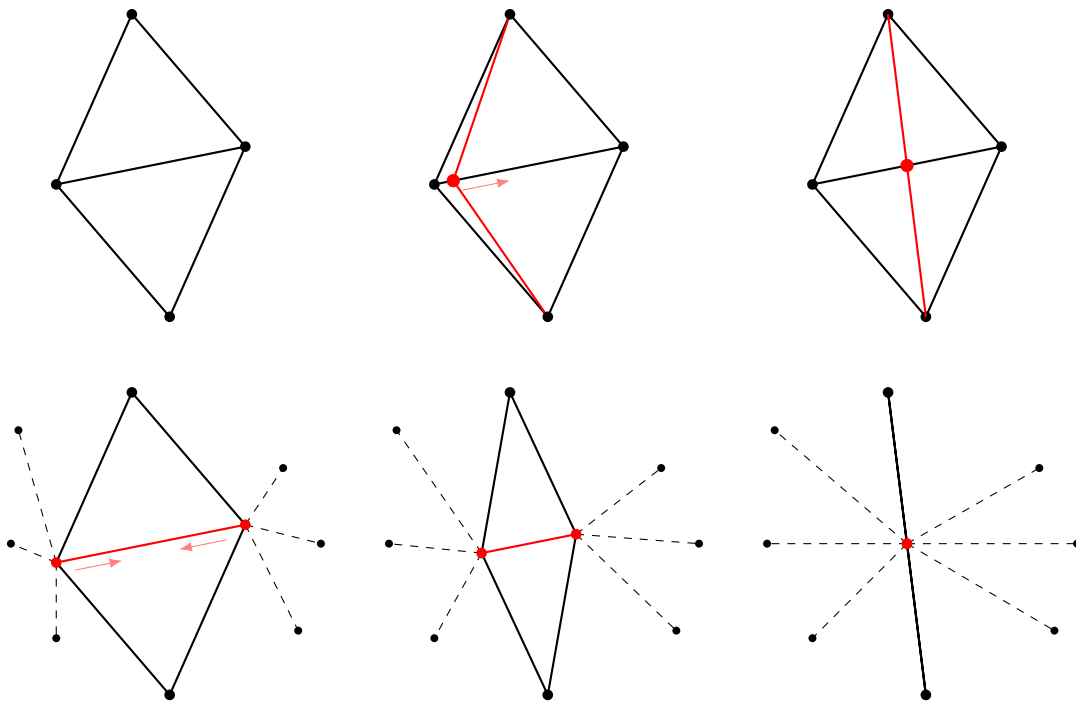


FIGURE 5 – Illustration de la procédure de *split* et *collapse* en 2D.

retourne instantanément à t_n avant de retrouver une orientation correcte à $t^* < t_{n+1}$. Ce phénomène impose un choix prudent de l'origine du nœud nucléé lors d'un *split*. Trois cas de figures peuvent alors se présenter :

- *Un seul choix est valide* : on retient naturellement cette option.
- *Les deux choix sont valides* : on retient celui qui minimise l'angle maximal des quatre triangles à l'instant $t_n + \varepsilon$.
- *Aucun choix n'est valide* : une stratégie, en cours de développement, consiste à utiliser un arbre de décision pour reculer dans la séquence d'opérations et repartir avec d'autres choix d'origines.

Par construction, les triangles ont une surface nulle en t_n . Ils sont donc issus soit d'une arête, soit d'un point lorsque l'arête d'origine est elle-même initialement de longueur nulle. Seul le premier cas est susceptible d'engendrer des retournements temporaires d'éléments.

À ce stade, seul le raffinement de maillage par *splits* a été implémenté, sans encore introduire de déraffinement par *collapses*. En pratique l'heuristique fondée sur la minimisation de l'angle maximal s'avère toutefois robuste et produit des configurations géométriques satisfaisantes. Deux exemples d'adaptation espace-temps en 2.5D sont présentés à la figure 6.

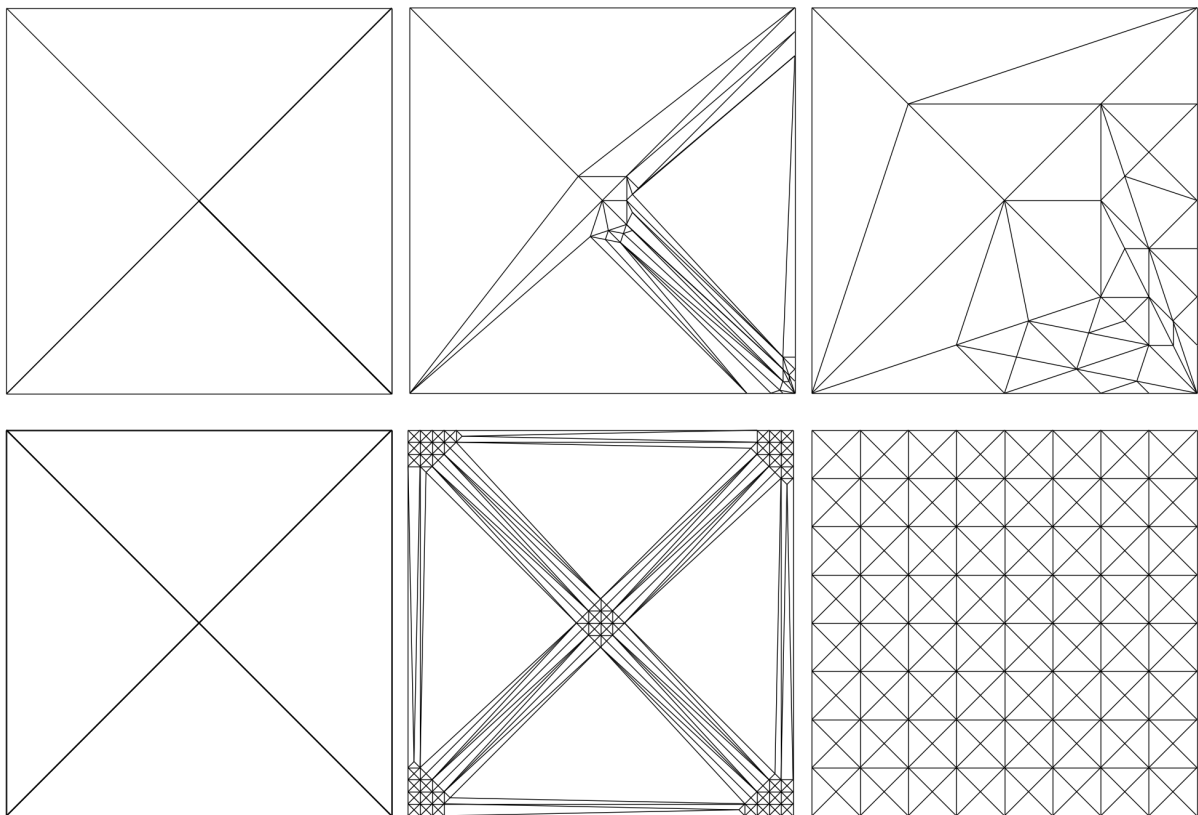


FIGURE 6 – Exemples d'adaptation espace-temps en 2.5D. Chaque ligne correspond à une tranche de temps $[0, \Delta t]$ où le même maillage initial est raffiné selon un champ de taille non-uniforme (en haut) ou uniforme (en bas). Les trois colonnes correspondent respectivement aux instants 0 , $\Delta t/4$ et Δt .

Les changements topologiques dans des maillages de quadrilatères ont également été envisagés. Une approche en deux temps permet de raffiner un maillage uniforme comme présenté à la figure 7. Cependant, il est clairement plus compliqué de raffiner des topologies arbitraires de maillages de quadrilatères que de triangles.

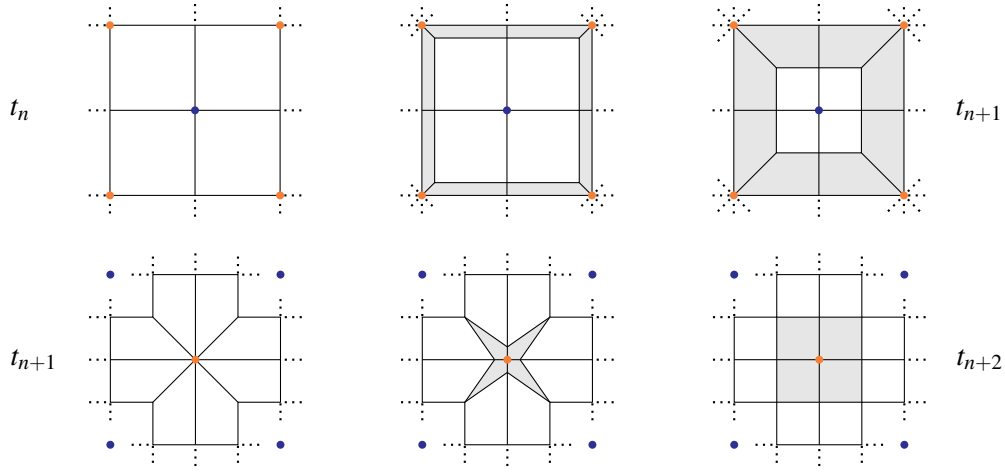


FIGURE 7 – Chaque patch de 4 quadrilatères est raffiné d’un facteur 2 au cours de deux tranches de temps successives. Le maillage contient des nœuds de valence 3 et 8 dans la tranche $[t_n, t_{n+1}]$ avant de retrouver son caractère uniforme à la fin de la tranche $[t_{n+1}, t_{n+2}]$. Les éléments nucléés sont coloriés en gris. Le point de vue est décalé en diagonale entre les deux tranches de temps pour mieux visualiser l’opération.

4 Résultats numériques

Les éléments dégénérés présents dans le maillage espace-temps peuvent a priori inquiéter en termes de stabilité et de précision. Cependant, dans le cas d’équations purement convectives, ils ne posent en pratique aucun problème : l’élément espace-temps n’a jamais un volume nul et l’intégrale sur les bords dégénérés tombe simplement à zéro.

Nous illustrons ici le comportement de la méthode dans le cas 1.5D, pour une équation de transport linéaire, et pour les équations d’eaux peu profondes résolues à l’aide du schéma DG espace-temps décrit à la section 2. La figure 8 montre l’évolution du maillage au cours du temps, ainsi que la solution associée. On observe que le raffinement et la coalescence des éléments suivent naturellement le champ de taille prescrit, sans nécessiter de projection de la solution.

En 2.5D, nous avons déjà obtenus des résultats positifs concernant la nucléation de quadrilatères, comme indiqué à la figure 9. Des cubes dégénérés ont donc été nécessaires pour construire le maillage espace-temps correspondant. Il ne fait aucun doute que les prismes dégénérés nécessaires pour les maillages triangulaires produiront des résultats tout aussi convaincants.

5 Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons introduit une approche d’adaptation de maillage espace-temps permettant des changements topologiques locaux sans projection de la solution. Les résultats en 1.5D confirment la robustesse du schéma DG espace-temps face aux éléments dégénérés. Les premiers développements en 2.5D attestent de la faisabilité de l’approche, en particulier grâce à l’heuristique de choix du nœud nucléé. Les prochaines étapes porteront sur l’intégration complète des opérations de *collapse* en 2.5D et l’étude systématique de la validité géométrique des éléments espace-temps.

Références

- [1] J.J.W. van der Vegt, H. van der Ven, *Space–Time Discontinuous Galerkin Finite Element Method with Dynamic Grid Motion for Inviscid Compressible Flows*, Journal of Computational Physics, vol. 182, 546-585, 2002.
- [2] Ch. J. Naudet, M. J. Zahr, *A space-time high-order implicit shock tracking method for shock-dominated unsteady flows*, Journal of Computational Physics, vol. 501, 2024.
- [3] F. Alauzet, A. Loseille. *A decade of progress on anisotropic mesh adaptation for computational fluid dynamics*, 23rd International Meshing Roundtable Special Issue : Advances in Mesh Generation, vol. 72, 13-39, 2016.

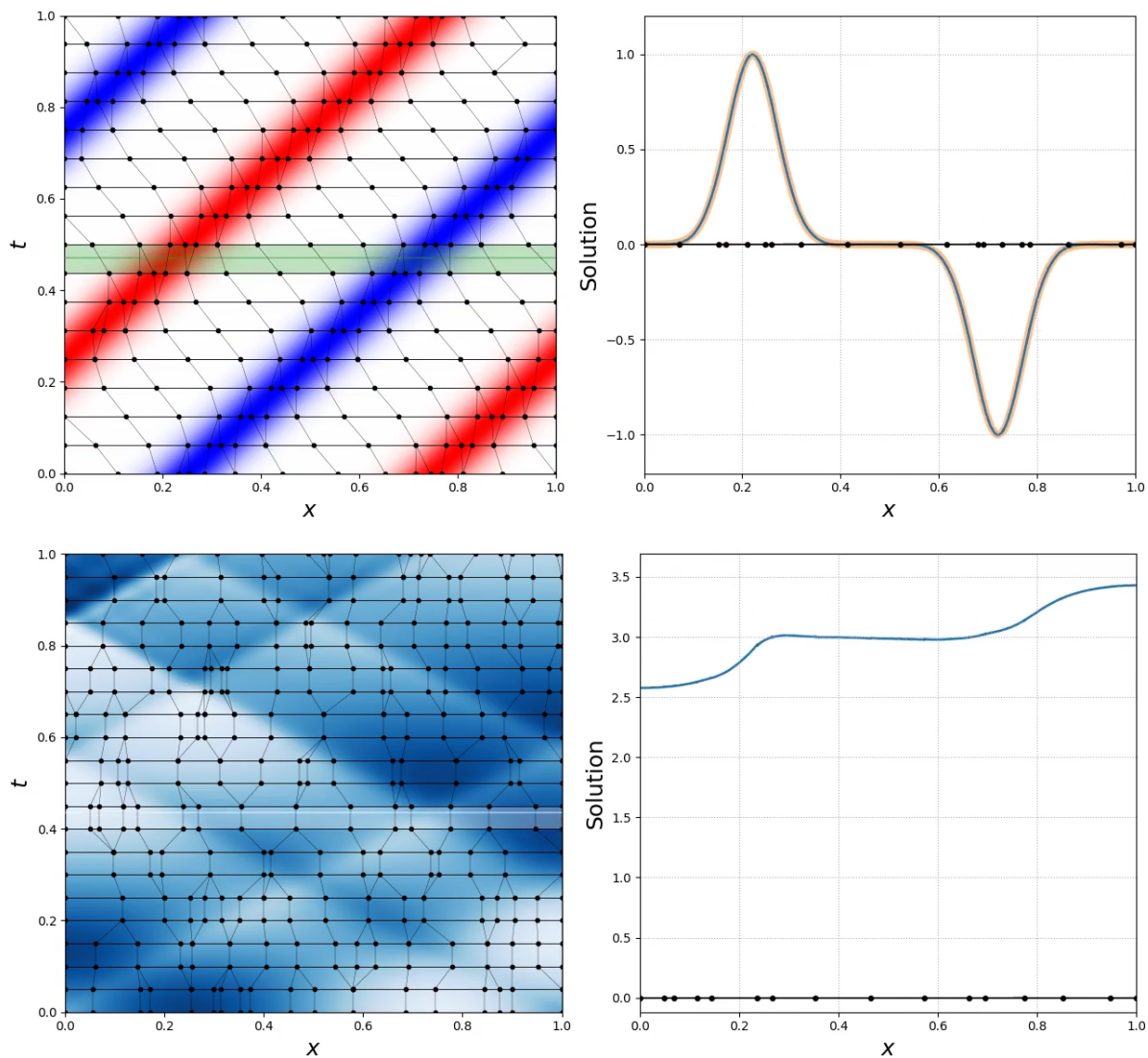


FIGURE 8 – Solution d’une équation de transport (en haut) et des équations d’eaux peu profondes (en bas) en 1.5D. À gauche, évolution du maillage espace-temps. À droite, solution numérique à l’instant indiqué par la ligne verte à gauche, dans la tranche de temps correspondante. Pour l’équation de transport, la solution analytique est également représentée trait épais orange transparent.

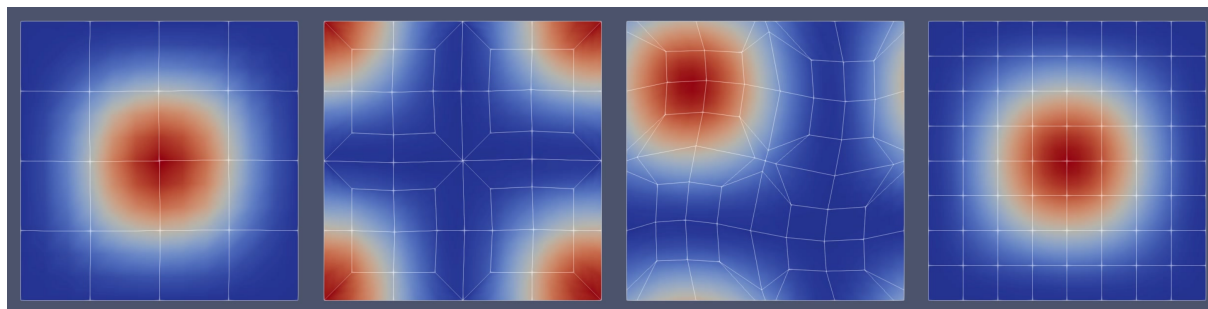


FIGURE 9 – Vue à différents temps de la solution d’une équation de transport en 2.5D sur un domaine carré périodique.