

# Méthode Asymptotique Numérique pour l'analyse du flambement dynamique de structures soumises à des chargements temporels complexes

M. Bogey<sup>1,2</sup>, C. Combescure<sup>1,3</sup>, G. Girault<sup>1</sup>, M. Cazuguel<sup>2</sup>, J.M. Cadou<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institut de Recherche Dupuy de Lôme, CNRS UMR 6027, IRDL, F-56100 Lorient, France. jean-marc.cadou@univ-ubs.fr

<sup>2</sup> CESMAN / S3M, Naval Group, F-44340 Bouguenais, France. mikael.cazuguel@naval-group.com

<sup>3</sup> Centre de recherche, Académie Militaire de Saint-Cyr Coëtquidan, F-56381 Guer, France. c.combescure@st-cyr.terre-net.defense.gouv.fr

**Résumé** — Une approche d'intégration temporelle explicite fondée sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) est proposée pour l'analyse du flambement dynamique de structures minces. Cette étude s'intéresse principalement à la prise en compte des pressions suiveuses et des chargements temporels présentant des singularités grâce à une étape de régularisation adaptée. Les études menées montrent l'influence de sollicitations dynamiques complexes, telles qu'une rampe, un saut de pression ou encore un chargement relatif à une explosion, sur la réponse de la structure.

**Mots clefs** — Méthode Asymptotique Numérique, Flambement dynamique, Régularisation

## 1. Introduction

En calcul de structures, la résolution des équations du mouvement est indispensable. Il existe de nombreuses stratégies d'intégration temporelle qui conduisent la plupart du temps à des solutions discrètes en temps : l'un des schémas les plus utilisés est le schéma implicite de Newmark.

Dans cette étude, il est proposé de résoudre ces équations par un intégrateur temporel explicite, reposant sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN), permettant d'obtenir des solutions continues en temps.

Dans une étude antérieure [5], il a été montré qu'un tel intégrateur permettait de modéliser fidèlement le flambement de coques minces soumises à des charges nodales conservatives évoluant dans le temps. Le travail qui suit a pour objectif d'élargir le champ d'application de la MAN, en vue de développer un outil capable de simuler le flambement d'une coque cylindrique soumise à une explosion.

Pour être représentatif d'un chargement de type explosion en champ lointain, des développements ont été réalisés pour pouvoir prendre en considération des chargements en pression suiveuse appliqués uniformément sur la structure.

Cette étude se concentre plus particulièrement sur la prise en compte des chargements en pression suiveuse uniforme pour différentes évolutions temporelles de la pression. Ce type de chargement est représentatif d'une explosion en champ lointain.

L'évolution temporelle de la pression générée par des explosions présente généralement des singularités. Ces fonctions doivent être régularisées pour pouvoir appliquer correctement la MAN. La première fonction étudiée est la rampe suivie d'un palier, permettant de vérifier que la régularisation n'a pas d'effet sur le calcul. Enfin, pour traduire la montée quasi instantanée de la pression provoquée par une explosion, l'étude s'étend aux sauts puis à des profils de type explosion (dénommés Friedlander par la suite).

## 2. Problème à résoudre

### 2.1. Équation de la dynamique

Les équations d'équilibre du solide sont définies par une approche Lagrangienne et prennent en compte les non-linéarités géométriques induites par les grands déplacements. La variable du problème est le vecteur des inconnues généralisées  $\mathbf{U} = \{\mathbf{u} \ \mathbf{S}\}^T$ , regroupant les champs de déplacement  $\mathbf{u}$  et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff  $\mathbf{S}$ . Le problème est alors formulé dans le cadre d'une approche mixte déplacement/contrainte. Ses dérivées temporelles premières et secondes sont écrites de la façon suivante (\*) et (\*\*). L'équation de la dynamique de la structure est définie par :

$$\mathcal{M}(\ddot{\mathbf{U}}) + \mathcal{C}(\dot{\mathbf{U}}) + \mathcal{L}(\mathbf{U}) + \mathcal{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) - \mathcal{F}(\mathbf{U}, \mathbf{U}, t) = 0 \quad (1)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{F}$  désignent respectivement les opérateurs de masse, d'amortissement, les termes linéaires et quadratiques de l'inconnue généralisée, ainsi que le chargement externe suiveur quadratique en déplacement et dépendant du temps.

## 2.2. Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale est réalisée à l'aide de l'élément fini coque EAS (Enhanced Assumed Strain), développé dans l'article [3], et intégré dans le code de calcul EVE [12]. Cet élément à sept paramètres permet de considérer des structures coques minces ou épaisses, tout en évitant les problèmes de verrouillage pouvant être engendrés par l'écriture de la loi de comportement tridimensionnelle [10]. Le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  est approché par  $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}$ , avec  $\mathbf{N}$  la matrice des fonctions de forme et  $\mathbf{q}$  le vecteur des déplacements nodaux.

## 2.3. Développement temporel

L'application de la MAN en utilisant le temps comme paramètre de perturbation pour étudier le flambement dynamique de structures a été mise en œuvre dans la version du code EVE dynamique [5]. Le temps est défini comme la somme du pas de temps  $\hat{t}$  et d'un temps initial connu  $t_0$  tel que :

$$t = t_0 + \hat{t} \quad (2)$$

La méthode repose sur un développement asymptotique en série tronquée d'ordre  $N$  des inconnues cinématiques nodales et des efforts nodaux :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q} = \sum_{i=0}^N \hat{t}^i \mathbf{q}_i \\ \mathbf{F} = \sum_{i=0}^N \hat{t}^i \mathbf{F}_i \end{array} \right. \quad (3)$$

Les composantes  $\mathbf{q}_0$  et  $\mathbf{q}_1$  sont supposées connues et correspondent respectivement aux déplacements et aux vitesses nodaux à l'instant  $t_0$ . En injectant ces développements dans les équations d'équilibre et en identifiant suivant les puissances de  $\hat{t}$ , cela conduit à un ensemble de systèmes linéaires pour chaque ordre de la série du type :

$$\mathbf{M}\mathbf{q}_{p+2} = \mathbf{F}_{p+1}^{sm}(\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{p+1}) \quad (4)$$

nécessitant une seule inversion de la matrice de masse  $\mathbf{M}$  pour l'ensemble du calcul.

La validité du développement en série est assurée par le calcul d'un pas de continuation maximal  $\hat{t}_{max}$ . Afin de déterminer sa valeur, une procédure de dichotomie sur  $\hat{t}$  est mise en œuvre de manière à garantir la précision de la solution en se basant sur le résidu normalisé. La normalisation par l'effort permet de limiter les variations importantes du résidu, notamment pour les calculs de flambement, où les déplacements et les contraintes sont faibles avant le flambement et deviennent importants après celui-ci.

$$R(t) = \frac{\|\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_{int}(t) - \mathbf{F}(t)\|}{\|\mathbf{F}_{ext}(t)\| + \epsilon} \quad (5)$$

La méthode consiste à faire varier  $\hat{t}$  à l'aide d'une recherche dichotomique jusqu'à ce que le résidu normalisé associé appartienne à un intervalle de tolérance prédéfini  $[R_{min}; R_{max}]$ . L'introduction d'un terme  $\epsilon$  permet d'éviter la division par un dénominateur nul. Sa valeur peut être définie par l'utilisateur. Les valeurs initiales du déplacement et de la vitesse au pas suivant sont alors calculées en introduisant la valeur de  $\hat{t}_{max}$ , tel que  $\hat{t}_0^{new} = t_0 + \hat{t}_{max}$  :

$$\mathbf{q}_0^{new} = \sum_{i=0}^N \hat{t}_{max}^i \mathbf{q}_i \quad , \quad \mathbf{q}_1^{new} = \sum_{i=0}^N i \hat{t}_{max}^{i-1} \mathbf{q}_i \quad (6)$$

À noter que pour déterminer la valeur initiale de l'effort au pas de temps suivant  $\mathbf{F}_0^{new}$  deux stratégies peuvent être adopter : soit définir  $\mathbf{F}_0^{new}$  par formulation analytique ou par continuation MAN  $\mathbf{F}_0^{new} = \sum_{i=0}^N \hat{t}_{max}^i \mathbf{F}_i$ .

## 2.4. Chargements suiveurs

Dans cette étude, les chargements suiveurs sont pris en compte, car la structure est soumise à une pression dont les efforts résultants peuvent évoluer avec la déformation. L'article [11], présente les développements permettant de prendre en compte les pressions suiveuses avec la MAN dans des calculs

quasi-statiques. Dans ce cas, une partie de l'effort est dans la matrice tangente du système et une autre dans le second membre. En dynamique, l'ensemble des termes est au second membre. Pour des pressions suivieuses, le vecteur des efforts nodaux en dynamique s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{F} = -\kappa f(t) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^T \mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{q}_{ini} + \mathbf{q}}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \mathbf{q}_{ini} + \mathbf{q}}{\partial \zeta} d\xi d\zeta = -\kappa f(t) \mathbf{Z}(\mathbf{q}_{ini} + \mathbf{q}, \mathbf{q}_{ini} + \mathbf{q}) \quad (7)$$

avec  $\mathbf{q}_{ini}$  le vecteur contenant les positions initiales nodales et des normales associées. Le paramètre  $\kappa$  définit la surface sur laquelle le chargement est appliqué :  $\kappa = +1$  pour la surface supérieure,  $\kappa = -1$  pour l'inférieure. La fonction  $f(t)$  décrit l'évolution temporelle de la pression. Les fonctions  $f(t)$  et  $\mathbf{Z}(\mathbf{q}_{ini} + \mathbf{q}, \mathbf{q}_{ini} + \mathbf{q})$ , sont développées sous la forme de séries entières tronquées d'ordre  $N$ .

$$\left\{ \begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=0}^N \hat{t}^i f_i & \mathbf{Z}(\mathbf{q}_{ini} + \mathbf{q}, \mathbf{q}_{ini} + \mathbf{q}) &= \sum_{i=0}^N \hat{t}^i \mathbf{Z}_i \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Le développement asymptotique de  $f(t)$  dépend du type de chargement considéré (rampe de pression, saut, ...). Pour les besoins du calcul l'opérateur  $\llbracket \mathbf{a}, \mathbf{b} \rrbracket = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^T \mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \zeta} d\xi d\zeta$  est introduit et permet d'exprimer les termes du développement de  $\mathbf{Z}$  sous la forme :

$$\mathbf{Z}_i = \llbracket \mathbf{q}_{ini}, \mathbf{q}_i \rrbracket + \llbracket \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{ini} \rrbracket + \sum_{j=0}^i \llbracket \mathbf{q}_j, \mathbf{q}_{i-j} \rrbracket \quad (9)$$

Enfin le produit des développements asymptotiques permet d'évaluer les termes de séries du vecteur d'effort :

$$\mathbf{F}_p = -\kappa \sum_{i=0}^p f_{p-i} \mathbf{Z}_i \quad (10)$$

A noter que les intégrales sont évaluées numériquement, dans chaque élément fini, à l'aide de la méthode de Gauss.

## 2.5. Régularisation des chargements temporels

L'utilisation de la MAN pour résoudre ces problèmes sollicités par des chargements singuliers nécessite de modifier les expressions initiales en les régularisant et en introduisant des variables supplémentaires. Dans ce travail, trois types de chargements sont étudiés (Figure 1): une rampe suivie d'un palier, un saut de pression, et un chargement d'onde de choc de type Friedlander.

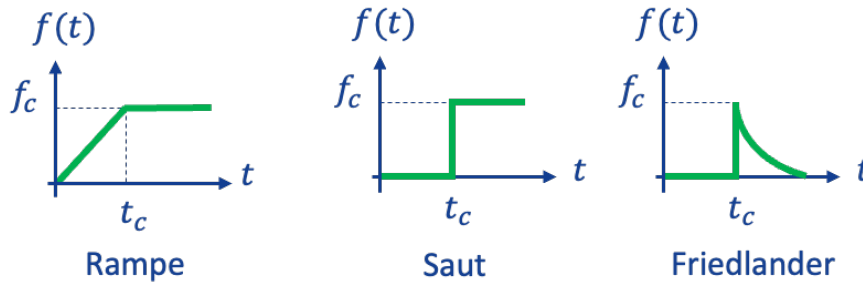


Figure 1 – Trois types de profils de chargement étudiés : rampe, saut et Friedlander.

### 2.5.1. Chargement de type rampe

Le chargement rampe modélise une montée progressive de pression à vitesse constante jusqu'à atteindre une valeur limite (Figure 1). La régularisation proposée dans [5] repose sur une équation non linéaire

dépendant d'un paramètre de régularisation  $\eta$ , permettant de lisser la transition entre la rampe et le palier.

$$\begin{cases} m \cdot t = f(t) + \eta \frac{f_c^2}{f_c^2 - g(t)} f(t) \\ g(t) = f^2(t) \end{cases} \quad (11)$$

La pente du chargement est définie par  $m = f_c/t_c$ , avec  $f_c$  l'amplitude maximale et  $t_c$  la durée caractéristique. Le développement asymptotique de  $f(t)$  est obtenu par une approche tronquée à l'ordre  $N$ , conduisant à un système de  $2(N + 1)$  équations résolues numériquement.

### 2.5.2. Chargement de type saut

Le chargement de type saut de pression, caractérisé par une montée instantanée (Figure 1), est régularisé par une fonction tangente hyperbolique :

$$f(t) = \frac{f_c}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{t - t_c}{\eta} \right) \right) \quad (12)$$

où  $f_c$  est la pression maximale,  $t_c$  le temps caractéristique du saut et  $\eta$  le paramètre de régularisation.

### 2.5.3. Chargement de type Friedlander

Le chargement induit par une explosion peut, en première approximation, être modélisé par une montée instantanée de pression suivie d'une décroissance exponentielle [2] représentant ainsi une fonction simplifiée du modèle de Friedlander [7]. Cette fonction est caractérisée par ses paramètres :  $f_c$  qui désigne la pression maximale, et par  $t_c$  qui représente le temps d'arrivée du front d'onde. Le paramètre  $\Theta$  représente un temps caractéristique de décroissance de l'onde.

Ce chargement présente une singularité en  $t = t_c$ , qui rend son traitement numérique délicat. Une fonction régularisée est donc proposée afin de lisser cette discontinuité à l'aide du paramètre de régularisation  $\eta$ , tout en conservant les principales caractéristiques physiques du chargement :

$$\begin{cases} f(t) = ag(t)h(t) \\ g(t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{t - t_c - d}{\eta} \right) \right) \\ h(t) = e^{-\frac{t - t_c - d}{\Theta}} \end{cases} \quad (13)$$

Les paramètres  $a$  et  $d$  sont introduits respectivement comme facteurs d'ajustement d'amplitude et de décalage temporel pour garantir la continuité et la cohérence avec la fonction de Friedlander non régularisée.

## 3. Résultats

### 3.1. Panneau cylindrique soumis à une pression suiveuse

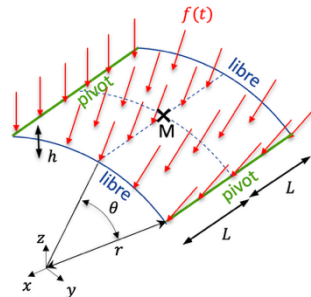


Figure 2 – Géométrie du panneau sollicité par une pression suiveuse uniformément répartie.  $r = 5$  m,  $L = 2.5$  m,  $h = 0.1$  m  $\theta = 30^\circ$ .  $E = 200$  GPa,  $\nu = 0.25$ ,  $\rho = 10^4$  kg. m<sup>-3</sup>,  $\alpha = \beta = 10^{-15}$ .

La première étude concerne un panneau cylindrique soumis à une pression suivieuse uniformément répartie sur sa surface. Les propriétés mécaniques et géométriques (Figure 2) sont celles présentées dans les travaux [1], [4], [5] et [9] présentant le flambement dynamique d'un toit soumis à une charge nodale conservative.

### 3.1.1. Chargement de type rampe

Le chargement appliqué est de type surfacique suiviseur. Son amplitude varie selon une rampe de pression croissante, allant de 0 Pa à  $50 \cdot 10^6$  Pa en 0,2 s, suivie d'un palier à pression constante Figure 3. Pour mettre en œuvre la MAN, la méthode de régularisation du chargement proposée par [5] et présentée précédemment, est reprise ici avec l'utilisation du paramètre de régularisation  $\eta$ .

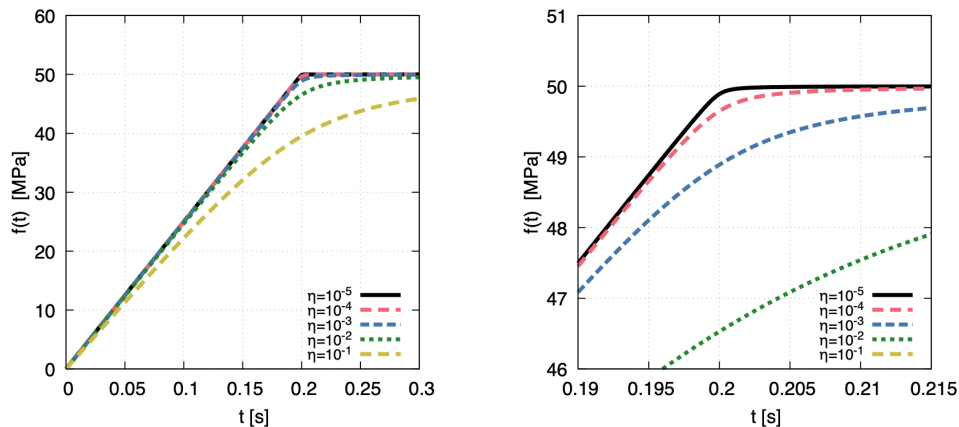


Figure 3 – Évolution temporelle du chargement régularisé (gauche) et zoom autour de  $t = 0,2$  s (droite) pour différentes valeurs du paramètre  $\eta$  :  $10^{-1}$  à  $10^{-5}$ .

Les courbes présentées Figure 3 montrent que plus le paramètre  $\eta$  est faible, plus la courbe se rapproche de la fonction singulière originale. Des calculs dynamiques ont été réalisés pour différentes valeurs de  $\eta$ , sur un maillage comportant 16 éléments, afin de définir une valeur suffisamment faible pour que la régularisation n'influence pas la réponse de la structure.

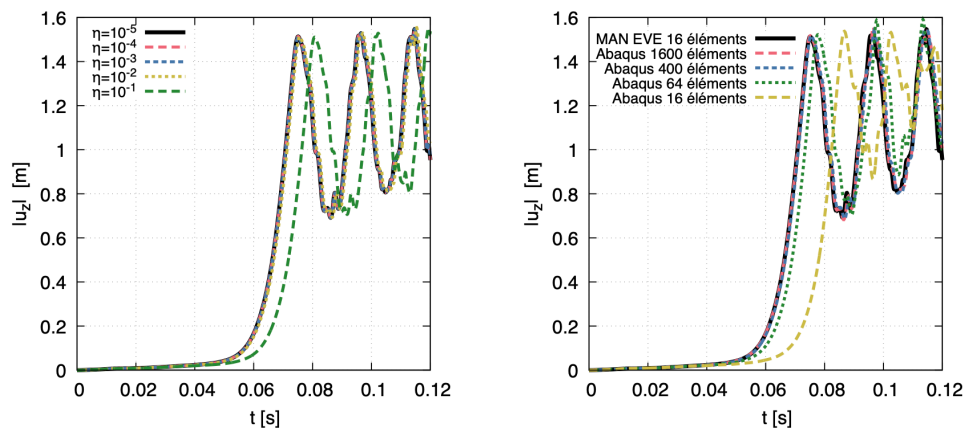


Figure 4 – Déplacement  $|u_z|$  du point M en fonction du temps pour différentes valeurs de  $\eta$  :  $10^{-1}$  à  $10^{-5}$  (gauche) et pour différents maillages Abaqus/Explicit : 16, 64, 400 et 1 600 éléments (droite). Calculs MAN avec  $N=20$ .

La Figure 4 (gauche), montre que, si  $\eta$  est trop élevé le chargement appliqué n'est pas correct et la dynamique de la structure est notablement modifiée. Pour des valeurs plus faibles,  $\eta \leq 10^{-3}$  les courbes sont confondues. L'article [5] a mis en évidence la faible dépendance au maillage des calculs réalisés avec la MAN, utilisée comme intégrateur temporel explicite, dans le cas de chargements nodaux conservatifs. Les résultats présentés Figure 4 (droite) étendent cette propriété à des chargements surfaciques suiviseurs, dont la définition dépend explicitement du domaine d'intégration.

### 3.1.2. Chargement de type Friedlander

Nous considérons maintenant le même exemple que précédemment mais en prenant un chargement de type explosion, modélisé par la fonction de Friedlander. La régularisation MAN présentée précédemment a conduit à la fonction régularisée (13) et les paramètres choisis sont :  $f_c = 50$  MPa,  $t_c = 0,01$  s, et  $\theta = 0,01$  s. La suite de l'étude porte sur l'influence du paramètre  $\eta$ .

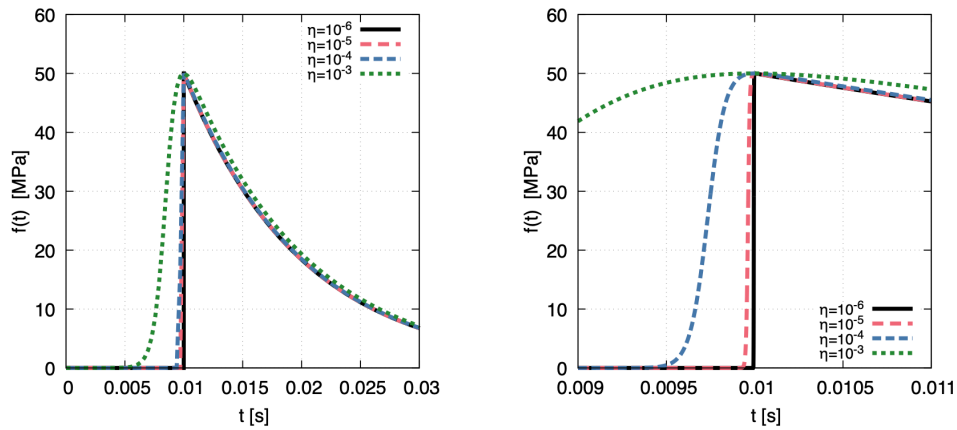


Figure 5 – Évolution temporelle du chargement avec la MAN (gauche) et zoom autour de  $t = 0,01$  s (droite) pour différentes valeurs de  $\eta$  :  $10^{-3}$  à  $10^{-6}$ .

Les courbes Figure 5 illustrent l'influence du paramètre  $\eta$  sur la forme du front d'onde : plus ce paramètre est faible, plus la montée en pression est raide et proche de la fonction singulière. Bien que régularisée, la fonction conserve une montée en pression progressive, plus conforme au comportement souhaité comme modélisation, ce qui permet d'étudier l'influence de cette régularisation sur la réponse de la structure. Des calculs MAN dynamiques sont menés afin d'identifier une valeur seuil de  $\eta$  en deçà de laquelle son influence sur la réponse de la structure devient négligeable.

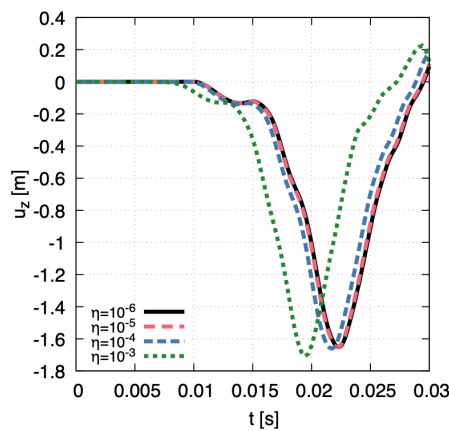


Figure 6 – Déplacement  $u_z$  du point M en fonction du temps pour différentes valeurs de  $\eta$  :  $10^{-3}$  à  $10^{-6}$ . Calculs MAN  $N = 20$ ,  $R \in [10^{-6}; 5 \times 10^{-6}]$ .

La Figure 6 montre que plus le paramètre  $\eta$  est faible, plus les réponses convergent vers la même solution. Les courbes obtenues pour  $\eta = 10^{-5}$  et  $\eta = 10^{-6}$  sont quasiment superposées, ce qui justifie le choix d'une valeur  $\eta = 10^{-6}$  pour approcher au mieux le chargement singulier. Ces résultats montrent également que pour des valeurs de  $\eta$  plus grandes, le flambement de la structure est anticipé, pouvant s'expliquer par une impulsion transmise à la structure plus importante, puisque l'aire sous courbe du chargement est plus élevée à durée égale.

### 3.2. Anneau soumis à un chargement de type saut de pression

Nous considérons maintenant un anneau soumis à un saut de pression suivieuse, dont la solution analytique faiblement non linéaire a été développée dans [8]. Toutes les grandeurs physiques qui suivent sont exprimées sous forme adimensionnelle. Pour effectuer les calculs dans le cadre de ce travail, des dimensions arbitraires ont été choisies. Ces valeurs ne sont pas spécifiées ici afin d'éviter toute coïncidence avec des dimensions pouvant être critiques dans des applications réelles. Le chargement

appliqué sur la structure est surfacique, suivieur, de type saut et défini par la fonction régularisée (12), avec les paramètres :  $t_c = 0,75$ ,  $f_c$  tel que  $P = \frac{f_c r^3 b}{B} = 8,7$  ( $B = EI$ , avec  $I$  le moment d'inertie).

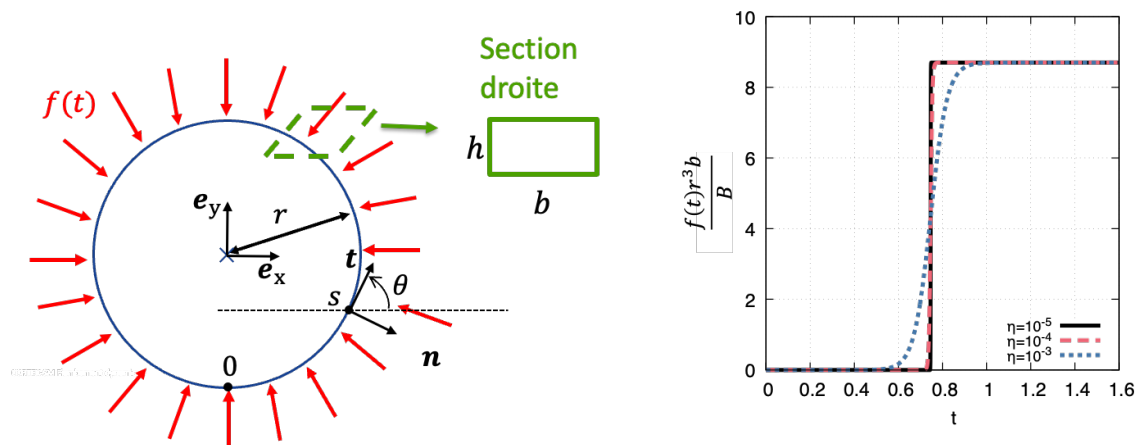


Figure 7 – Évolution temporelle de la pression surfacique  $f(t)$ , pour différents paramètres de régularisation  $\eta = 10^{-3}$  à  $10^{-5}$ . La fonction  $f(t)$  dépend des paramètres  $t_c = 0,75$  et  $\frac{f_c r^3 b}{B} = 8,7$ .

Des calculs dynamiques sont réalisés pour étudier l'influence du paramètre  $\eta$  sur le comportement de la structure. Le cas d'étude porte sur l'anneau soumis à une pression adimensionnée  $P = 8,7$  avec un défaut initial d'amplitude adimensionnée  $\alpha(0) = 0,01$  introduit à l'aide de la solution analytique faiblement non-linéaire permettant de favoriser un mode à 3 lobes.

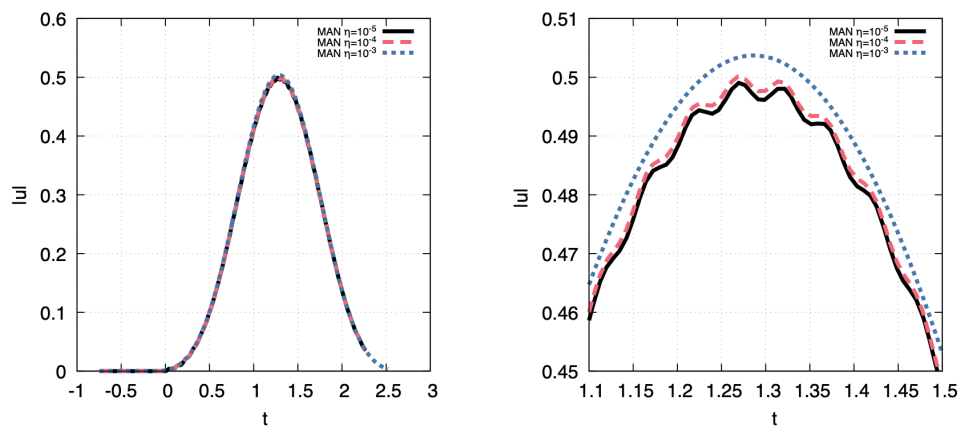


Figure 8 – Déplacement  $|u|$  du nœud subissant le plus grand déplacement au premier extremum en fonction du temps (**gauche**) et zoom sur l'extremum (**droite**), pour  $P = 8,7$ ,  $n = 3$  et pour différentes valeurs du paramètre de régularisation  $\eta = 10^{-3}$  à  $10^{-5}$ . Calculs réalisés avec la MAN ( $N = 20$ ,  $R \in [10^{-6}; 5 \times 10^{-6}]$ ).

Les résultats Figure 8 montrent que les solutions obtenues sont globalement superposées, malgré une légère différence observée pour  $\eta = 10^{-3}$  par rapport aux autres valeurs. Pour des paramètres plus faibles, correspondant à une pente plus raide du front de pression, la réponse présente de faibles oscillations. Pour la suite des calculs, le choix s'est porté sur le paramètre  $\eta = 10^{-3}$ , en raison des écarts très faibles observés avec les autres solutions et de l'absence d'oscillations pour cette valeur de  $\eta$ .

#### 4. Conclusion

Cette étude montre que la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) utilisée comme intégrateur temporel explicite constitue un outil efficace pour modéliser le flambement dynamique de structures minces soumises à des chargements temporels complexes, incluant des pressions suivieuses et des profils

présentant des singularités. La régularisation des chargements via le paramètre  $\eta$  permet de contrôler la précision et la stabilité des simulations tout en conservant la fidélité des fronts de pression. Les résultats mettent en évidence l'influence des charges dynamiques sur la réponse des structures et confirment qu'un choix approprié de  $\eta$  permet de représenter avec fiabilité différents types de sollicitations. Ces développements ouvrent la voie à des simulations plus réalistes de structures soumises à des conditions de chargement extrêmes, comme celles rencontrées sous sollicitations explosives.

## 5. Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier la DGA (Direction Générale de l'Armement) et l'ANRT (Association Nationale de la Recherche et de la Technologie) pour le soutien financier de cette thèse.

## 6. Références bibliographiques

- [1] S. Baguet, B. Cochelin. Méthode Asymptotique Numérique adaptative pour la dynamique transitoire non-linéaire, CSMA 2011.
- [2] G. Barras. Interaction fluide structure - Application aux explosions sous-marines en champ proche. Thèse de l'Université des Sciences et Technologies de Lille 1, 2012
- [3] N. Büchter, E. Ramm, D. Roehl. Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 37, 2551–2568, 1994
- [4] A.-K. Chau, M. Brun, P. Ventura, H. Zahrouni, M. Pottier-Ferry. Asymptotic Numerical Method for dynamic buckling of shell structures with follower pressure, *International Journal of Solids and Structures*, 2025.
- [5] B. Claude, G. Girault, B. Leblé, J.-M. Cadou. On the use of an high order perturbation method for numerical time integration in structural dynamics. *Comptes Rendus Mécanique* 351, 227–245, 2023
- [6] B. Cochelin. A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers and Structures*, 53 (5), 1181 – 1192 1994
- [7] F.G. Friedlander. The diffraction of sound pulses I. Diffraction by a semi-infinite plane. *Mathematical and Physical Sciences*, 1940
- [8] O. Kodio, A. Goriely, D. Vella. Dynamic buckling of an inextensible elastic ring: Linear and nonlinear analyses. *Phys. Rev. E* 101, 053002, 2020
- [9] D. Kuhl, E. Ramm. Generalized Energy-Momentum Method for non-linear adaptative shell dynamics, 1999
- [10] J.C. Simo, M.S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 29, 1595–1638, 1990
- [11] P. Ventura, H. Azzayani, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry. Buckling of pressurized cylindrical shells using the Asymptotic Numerical Method. *Thin-Walled Struct.* 188, 110835, 2023
- [12] H. Zahrouni. Méthode asymptotique numérique pour les coques en grandes rotations, Thèse de l'Université de Metz, 1998