

# Modèle de poutre de Timoshenko enrichi en pincement pour la formulation du contact de Nitsche

M. Schorsch<sup>1,2</sup>, Y. Renard<sup>2,3</sup>, D. Dureisseix<sup>2</sup>, T. Elguedj<sup>2</sup>, C. Pozzolini<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Framatome, Paris/Lyon, F-92400 COURBEVOIE, cedric.pozzolini@framatome.com

<sup>2</sup> INSA Lyon, CNRS, LaMCoS, UMR5259, F-69621 Villeurbanne  
{matthieu.schorsch, yves.renard, david.dureisseix, thomas.elguedj}@insa-lyon.fr

<sup>3</sup> INSA Lyon, UJM, UCBL, ECL, CNRS, Institut Camille Jordan, UMR5208, F-69621 Villeurbanne

**Résumé** — En mécanique du contact, la méthode de Nitsche comporte plusieurs avantages théoriques et numériques. Son application aux structures minces 1D et 2D reste un défi du fait de la présence du tenseur de contraintes 3D dans sa formulation. Ce travail explore l'extension de cette méthode pour les poutres, en montrant que les modèles classiques ne permettent pas de tirer parti des avantages de la méthode. Nous proposons un modèle de poutre enrichi, permettant une formulation du contact de Nitsche pertinente, illustrée par des exemples numériques comparant les résultats à ceux d'un modèle 3D.

**Mots clés** — Contact, Poutre, Nitsche.

## 1 Introduction

De nombreux travaux scientifiques académiques visent à améliorer les modèles impliquant les phénomènes d'impact. Cependant, beaucoup de problèmes théoriques et numériques restent ouverts. Dans un contexte industriel, le besoin de précision conduit souvent à des dilemmes liés aux temps de calcul prohibitifs. Le recours aux modélisations par structures minces, telles que les poutres, plaques ou coques, apparaît alors comme une solution efficace. Il faut néanmoins garantir que la cinématique simplifiée de ces modèles n'altère pas les grandeurs d'intérêt d'un problème de mécanique du contact.

Les non-linéarités et les non-régularités, causées par les contacts ayant lieu aux interfaces des structures, engendrent des problèmes numériques complexes sous la forme d'inégalités variationnelles qui nécessitent des méthodes de résolution adaptées et efficaces. Les méthodes numériques pour les problèmes de contact ont été un domaine de recherche actif depuis de nombreuses années, mais de nouvelles méthodes continuent d'émerger. L'une d'entre elles, est la méthode de Nitsche. Introduite initialement pour imposer des conditions de Dirichlet de façon "faible" par Nitsche [1], elle a depuis été appliquée à divers problèmes d'interface. Des applications à la mécanique des contacts 3D ont été présentées et des analyses mathématiques ont été publiées (voir par exemple [2, 3]). Contrairement à toutes les autres méthodes, celle de Nitsche est à la fois cohérente sur le plan variationnel (et donc converge de manière optimale) et n'introduit aucun degré de liberté supplémentaire. Malgré les avantages que présente cette méthode, les efforts de contact réalistes qu'elle délivre proviennent en partie de l'utilisation d'un tenseur de contraintes 3D. La question de l'extension de la méthode de Nitsche aux structures élancées 1D et 2D se pose donc. Un premier travail exploratoire a été réalisé pour les plaques (voir [4]). La conclusion des auteurs est que la méthode de Nitsche peut s'appliquer dans ce cadre, à condition de bien choisir la discrétisation par éléments finis et de la conjuguer à une modélisation cinématique suffisamment riche pour avoir le "souvenir de l'épaisseur" de l'objet 3D qu'elle tente de représenter.

Dans ce travail, nous étendons la méthode de Nitsche pour le contact de poutres. Nous montrons notamment que les modèles de poutre classiques d'Euler Bernoulli et de Timoshenko ont une cinématique trop "pauvre" dans l'épaisseur de la structure, pour bénéficier des avantages théoriques de la méthode de Nitsche. En effet, pour ces deux modèles, la formulation de contact de Nitsche obtenue est équivalente à celle d'un contact par pénalité. Nous proposons alors un modèle de poutre dont la cinématique est enrichie, en introduisant un terme modélisant le pincement dans l'épaisseur de la poutre, et montrons que celui-ci permet de mettre en oeuvre une formulation du contact de Nitsche pertinente. L'intérêt de la méthode est jugé en comparant ses résultats au modèle classique de Timoshenko où le contact est

implémenté avec la méthode de pénalité.

## 2 Formulation faible du problème étudié avec la méthode de Nitsche

### 2.1 Problème de contact 3D

Nous considérons un corps élastique  $\Omega^\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous faisons l'hypothèse des petites perturbations. Le bord  $\partial\Omega^\varepsilon$  est constitué de trois parties :  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$  et la zone de contact  $\Gamma_C$ . Le vecteur unitaire sortant de  $\partial\Omega^\varepsilon$  est noté  $\mathbf{n}$ . Le corps est encastré sur  $\Gamma_D$ . Il est assujéti à des forces volumiques  $\mathbf{b} \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3$  et des forces de traction  $\ell \in (L^2(\Gamma_N))^3$ . Résoudre ce problème consiste à obtenir le champ de déplacements  $\mathbf{u}$  et les densités de forces surfaciques  $\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n}$  qui vérifient les équations fortes (1) et les conditions de contact (2) (i-iii) suivantes :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{b} & \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \ell & \text{sur } \Gamma_N, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\sigma$  représente le tenseur des contraintes. En utilisant la convention de sommation d'Einstein et en notant  $\varepsilon$  le tenseur des déformations linéarisées

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i),$$

nous considérons la loi de Hooke d'un matériau isotrope :

$$\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{ij}.$$

Pour tout champ de déplacements  $\mathbf{v}$  et pour toute densité de forces surfaciques  $\sigma(\mathbf{v})\mathbf{n}$  définis sur le bord  $\partial\Omega^\varepsilon$ , on décompose les composantes normales et tangentielles :

$$\mathbf{v} = v_n \mathbf{n} + \mathbf{v}_t \quad \sigma(\mathbf{v})\mathbf{n} = \sigma_n(\mathbf{v})\mathbf{n} + \sigma_t(\mathbf{v})$$

Les conditions de contact sans frottement (ou de Signorini) s'écrivent sur le bord  $\Gamma_C$  telles que :

$$\begin{aligned} u_n &\leq 0, & (i) \\ \sigma_n(\mathbf{u}) &\leq 0, & (ii) \\ \sigma_n(\mathbf{u}) u_n &= 0, & (iii) \\ \sigma_t(\mathbf{u}) &= 0. & (iv) \end{aligned} \quad (2)$$

Chouly et Hild ont montré dans [2] qu'en introduisant un paramètre strictement positif  $r$ , les conditions de contact (2) (i-iii) écrites sur  $\Gamma_C$  sont équivalentes à

$$\sigma_n(\mathbf{u}) = [\sigma_n(\mathbf{u}) - r u_n]_{\mathbb{R}^-}, \quad (3)$$

où l'on définit  $[a]_{\mathbb{R}^-} := (a - |a|)/2$  la partie négative de  $a \in \mathbb{R}$ . C'est la formulation du contact de Nitsche.

Pour obtenir la formulation faible du problème de contact, nous introduisons des espaces fonctionnels.

Soit  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  avec  $\mathbf{V}$  l'espace des champs de déplacements admissibles tel que

$$\mathbf{V} := \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3 \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D \right\}. \quad (4)$$

En suivant la démarche classique présentée par Fabre et al. dans [4], la formulation variationnelle du problème de contact 3D, avec la méthode de Nitsche, s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \text{ tel que pour tout } \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, d\Omega^\varepsilon - \frac{\Theta}{r} \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u}) \sigma_n(\mathbf{v}) \, d\Gamma_C + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_C} [\sigma_n(\mathbf{u}) + r u_n]_{\mathbb{R}^-} (\Theta \sigma_n(\mathbf{v}) - r v_n) \, d\Gamma_C \\ = \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{b} \mathbf{v} \, d\Omega^\varepsilon + \int_{\Gamma_N} \ell \mathbf{v} \, d\Gamma_N. \end{cases} \quad (5)$$

où  $\Theta \in \mathbb{R}$  est un paramètre fixé utilisé pour obtenir les différentes variantes de la méthode de Nitsche pour laquelle plus de détails sont présentés par Chouly et al. [3].

## 2.2 Problème de contact pour une poutre de Timoshenko

Nous suivons la théorie classique des poutres de Timoshenko (voir [5]), avec un matériau élastique linéaire isotrope et une section symétrique. Le champ de déplacements se décompose en un vecteur de déplacements  $\mathbf{w}$  et un vecteur de rotations  $\boldsymbol{\theta}$ , dont les composantes ne dépendent que de  $x$ . Les équations du modèle de poutre se définissent ainsi sur un domaine  $\Omega = ]0, L[$ , où  $L$  est la longueur de la poutre.

On introduit alors

$$\mathbf{V}_T := \{ (\delta\mathbf{w}, \delta\boldsymbol{\theta}) \in (H^1(\Omega, \mathbb{R}))^6 \mid (\delta\mathbf{w}, \delta\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ on } \Gamma_D \},$$

En prenant le cas spécifique mais fréquent d'un obstacle plan de normale  $\bar{n} = -y$ , il peut être montré que la formulation variationnelle du problème de contact devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbf{V}_T \text{ tel que pour tout } (\delta\mathbf{w}, \delta\boldsymbol{\theta}) \in \mathbf{V}_T \\ \int_0^L \left( N(\mathbf{w}) \frac{d\delta w_x}{dx} + M_z(\boldsymbol{\theta}) \frac{d\delta\theta_z}{dx} + M_y(\boldsymbol{\theta}) \frac{d\delta\theta_y}{dx} + M_x(\boldsymbol{\theta}) \frac{d\delta\theta_x}{dx} \right. \\ \left. + Q_y(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) \left( \frac{d\delta w_y}{dx} - \delta\theta_z \right) + Q_z(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) \left( \frac{d\delta w_z}{dx} + \delta\theta_y \right) \right) dx \\ + r \varepsilon_w \int_{\Gamma_C} [-w_y]_{\mathbb{R}^-} \cdot \delta w_y d\Gamma_C \\ = \int_0^L [q_x \delta w_x + q_y \delta w_y + q_z \delta w_z + m_y \delta\theta_y + m_z \delta\theta_z + m_x \delta\theta_x] dx \end{array} \right. \quad (6)$$

où  $N, Q_y, Q_z, M_z, M_y, M_x$  sont respectivement les quantités duales de la théorie des poutres : les efforts axiaux et tranchants, les moments de flexion et de torsion. Les variables  $q_x, q_y, q_z, m_z, m_y$  et  $m_x$  représentent les charges et moments linéiques appliqués sur la poutre.  $\varepsilon_w$  est la largeur de la poutre (dans la direction  $z$ ) et son apparition résulte de l'intégration du terme de contact dans cette direction.

Nous remarquons dans l'équation (6) que les termes spécifiquement liés au contact de Nitsche (avec  $\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{u})$  et  $\Theta$ ) ont disparu. En effet, la cinématique simplifiée des poutres de Timoshenko ne décrivent pas de déformations dans l'épaisseur. De plus, l'hypothèse formulée dans la théorie des poutres d'un tenseur de contraintes anti-plan ne permet pas de décrire de contraintes dans l'épaisseur. Or, ce sont ces contraintes qui interviennent dans le terme  $\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{u})$  de la formulation du contact de Nitsche. Plus spécifiquement, le terme de contact subsistant dans la formation variationnelle d'une poutre de Timoshenko est comparable à celui d'un contact pénalisé de raideur  $r$ . En effet, dans ce cas, on peut montrer que les conditions de contact (2) (i-iii) ont été remplacées par la condition  $\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{u}) = r[u_n]_{\mathbb{R}^-}$ , ce qui définit la méthode de pénalité, analysée en détail par Chouly et Hild dans [6].

Il peut être montré que la même observation se fait pour une poutre d'Euler-Bernoulli, où la cinématique est encore plus simplifiée. Ces conclusions sont similaires à celles faites dans les travaux de Fabre et al. (voir [4]) qui traitent de l'extension de la méthode de Nitsche aux plaques. En effet, la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli peut être comparée à la théorie des plaques de Kirchhoff et celle de Timoshenko aux plaques de Mindlin-Reissner. Dans cet article, Fabre et al. ont également montré que ces deux modèles de plaques avaient un terme de contact de Nitsche comparable à celui d'un contact pénalisé.

## 3 Modèle de poutre de Timoshenko enrichi

Pour retrouver la richesse de la formulation de Nitsche en contact, nous proposons d'enrichir la cinématique du modèle de poutre de Timoshenko en y ajoutant des déplacements dans la section :

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= w_x(x) - y\theta_z(x) + z\theta_y(x), \\ u_y(x, y, z) &= w_y(x) - z\theta_x(x) - y\alpha(x), \\ u_z(x, y, z) &= w_z(x) + y\theta_x(x) - z\beta(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Ces deux degrés de liberté supplémentaires,  $\alpha$  et  $\beta$ , permettent alors de décrire des déformations linéaires dans l'épaisseur. Pour décrire des contraintes dans l'épaisseur de la structure, essentielles au terme de

Nitsche, nous abandonnons l'hypothèse d'un tenseur de contraintes anti-plan. Après avoir appliqué le principe variationnel d'Hellinger-Reissner (voir [5]), nous obtenons les lois constitutives et les équations d'équilibre de notre nouveau modèle de Timoshenko enrichi.

Nous devons définir de nouveaux espaces fonctionnels :

$$\mathbf{V}_{PIT} := \{ (\delta \mathbf{w}, \delta \theta, \delta \mathbf{p}) \in (H^1(\Omega, \mathbb{R}))^8 \mid (\delta \mathbf{w}, \delta \theta, \delta \mathbf{p}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ on } \Gamma_D \},$$

Nous montrons que ce nouveau modèle permet de conserver la richesse du contact de Nitsche dans lequel restent présents des contraintes et des déformations de pincement. En effet, toujours pour un obstacle plan de normale  $\bar{\mathbf{n}} = -y$ , la formulation faible, pour une poutre de Timoshenko enrichie, avec une section symétrique, s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{w}, \theta, \mathbf{p}) \in \mathbf{V}_{PIT} \text{ tel que pour tout } (\delta \mathbf{w}, \delta \theta, \delta \mathbf{p}) \in \mathbf{V}_{PIT} \\ \int_0^L \left( N(\mathbf{w}) \frac{d\delta w_x}{dx} + M_z(\theta) \frac{d\delta \theta_z}{dx} + M_y(\theta) \frac{d\delta \theta_y}{dx} + M_x(\theta) \frac{d\delta \theta_x}{dx} \right. \\ \quad \left. + Q_y(\mathbf{w}, \theta) \left( \frac{d\delta w_y}{dx} - \delta \theta_z \right) + Q_z(\mathbf{w}, \theta) \left( \frac{d\delta w_z}{dx} + \delta \theta_y \right) \right. \\ \quad \left. - A\sigma_{yy}^0(\mathbf{w}, \mathbf{p})\delta\alpha - M_{pz}(\mathbf{p}) \frac{d\delta\alpha}{dx} - A\sigma_{zz}^0(\mathbf{w}, \mathbf{p})\delta\beta - M_{py}(\mathbf{p}) \frac{d\delta\beta}{dx} \right) dx \\ - \frac{\Theta \varepsilon_w}{r} \int_{\Gamma_C} \sigma_{yy}^0(\mathbf{w}, \theta, \mathbf{p}) \sigma_{yy}^0(\delta \mathbf{w}, \delta \theta, \delta \mathbf{p}) d\Gamma_C \\ + \frac{\varepsilon_w}{r} \int_{\Gamma_C} [\sigma_{yy}^0(\mathbf{w}, \theta, \mathbf{p}) + r(w_y + \frac{\varepsilon_t}{2}\alpha)]_{\mathbb{R}^-} (\Theta \sigma_{yy}(\delta \mathbf{w}, \delta \theta, \delta \mathbf{p}) + r(\delta w_y + \frac{\varepsilon_t}{2}\delta\alpha)) d\Gamma_C \\ = \int_0^L [q_x \delta w_x + q_y \delta w_y + q_z \delta w_z + m_y \delta \theta_y + m_z \delta \theta_z + m_x \delta \theta_x + m_{pz} \delta \alpha + m_{py} \delta \beta] dx \end{array} \right. \quad (8)$$

où  $\varepsilon_t$  est l'épaisseur de la poutre dans la direction  $y$  et où  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ .

$A\sigma_{yy}^0$ ,  $A\sigma_{zz}^0$ ,  $M_{py}$ ,  $M_{pz}$ ,  $m_{py}$  et  $m_{pz}$  sont de nouvelles quantités duales et charges linéiques de poutres, induites par le pincement. Nous remarquons que les termes de contact de Nitsche, liés à  $\sigma_n(\mathbf{u})$  et  $\Theta$ , sont désormais présents dans notre formulation faible de poutre. Pour évaluer la pertinence de notre modèle de poutre enrichi pour le contact de Nitsche, nous comparerons les résultats numériques du modèle avec ceux obtenus grâce à un modèle 3D de référence maillé finement.

## 4 Résultats numériques

Pour évaluer l'intérêt de la méthode de Nitsche et du nouveau modèle proposé, nous comparons les deux modèles (Timoshenko avec contact pénalisé et Timoshenko enrichi avec Nitsche) à une solution de référence calculée avec un modèle 3D d'élasticité linéaire où le contact est implémenté par un lagrangien augmenté proximal, comme décrit dans Chouly et al. [7]. Le but étant de voir quel modèle sera le plus proche des résultats de référence.

Les solutions poutres sont calculées avec des éléments P1. Le terme de cisaillement transverse est sous-intégré pour éviter au maximum les phénomènes de verrouillage numérique.

Le cas test choisi est celui d'une poutre en appui simple sur un obstacle parabolique, sur laquelle on applique une force surfacique sur sa face supérieure de normale  $y$ . La zone de contact potentielle est donc située sur la face inférieure de la structure. Nous choisissons une structure composée d'un matériau isotrope avec un module de Young de  $E = 210$  GPa et un coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ . L'obstacle choisi ici est celui décrit par la fonction  $g = 0,05x^2$ .

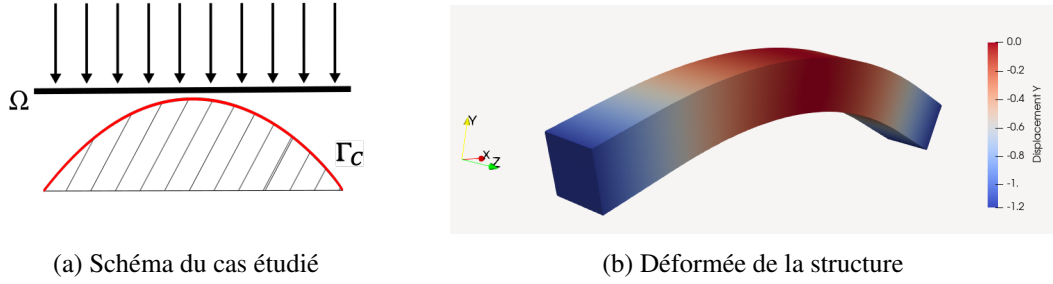


FIGURE 1 – Cas test étudié

Nous comparons les erreurs relatives sur les composantes de déformations décrites par la cinématique classique de Timoshenko, ainsi nous définissons l'erreur relative :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}^{\text{rel}} = \frac{\sqrt{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^h - \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^{\text{ref}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\left(\|\boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^h - \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^{\text{ref}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{\varepsilon}_{xz}^h - \boldsymbol{\varepsilon}_{xz}^{\text{ref}}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)}}{\sqrt{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^{\text{ref}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\left(\|\boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^{\text{ref}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{\varepsilon}_{xz}^{\text{ref}}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)}} \quad (9)$$

Après l'implémentation du modèle sur Getfem (voir [8]), nous obtenons les courbes de la figure 2.

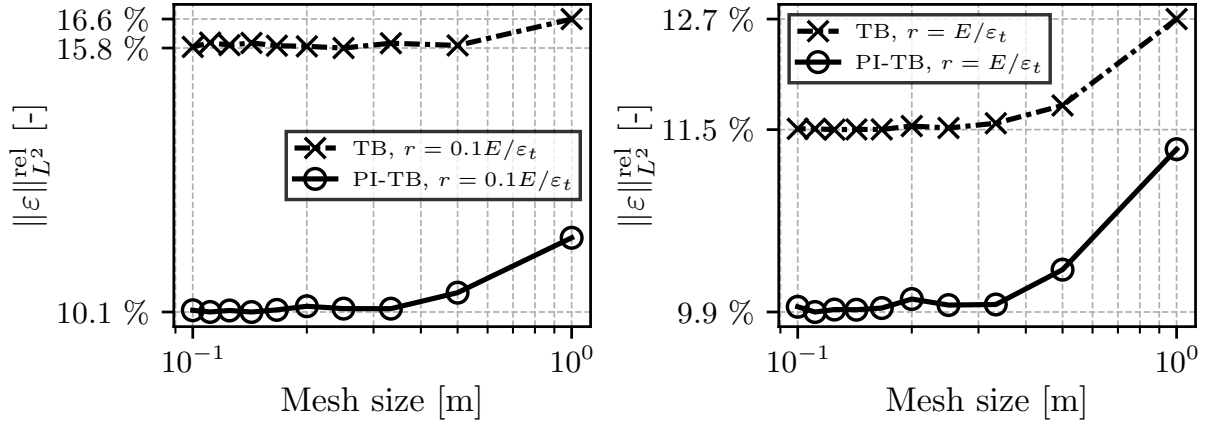


FIGURE 2 – Evolution de l'erreur relative sur les déformations linéarisées en fonction de la taille de maille, pour différentes valeurs de  $r$ . PI-TB : modèle de Timoshenko enrichi / TB : modèle de Timoshenko. Eléments P1 et  $\Theta = -1$ .

Nous pouvons voir sur la figure 2 que les résultats pour la poutre de Timoshenko-enrichi (PI-TB) dépendent peu de la valeur du paramètre de Nitsche  $r$ , quand la variante de Nitsche est celle avec  $\Theta = -1$ . Ce n'est pas le cas pour la poutre classique de Timoshenko (TB) avec contact pénalisé. Ses résultats dépendent beaucoup de la valeur de  $r$  qui, dans ce cas, représente le paramètre de pénalité. Ces observations sont en accord avec les résultats théoriques de la méthode de Nitsche et ceux sur la méthode de la pénalité [3, 6].

Il est à noter que lorsque le pincement est davantage sollicité, l'écart entre les deux modèles augmente et l'intérêt du modèle enrichi devient plus visible. Nous pouvons voir cela sur la figure 3 où la force surfacique est 10 fois supérieure à celle du cas de la figure 2.

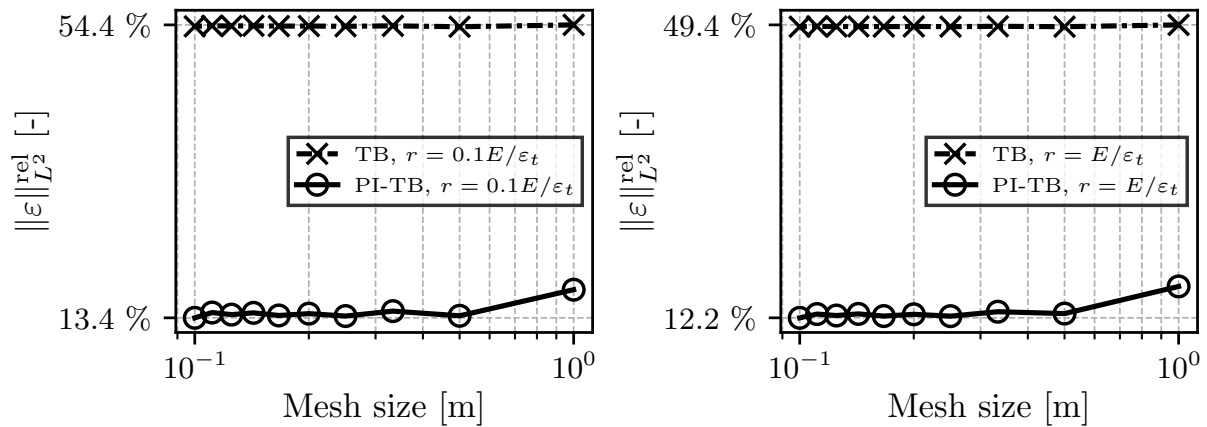


FIGURE 3 – Evolution de l’erreur relative sur les déformations linéarisées en fonction de la taille de maille, pour différentes valeurs de  $r$ . PI-TB : modèle de Timoshenko enrichi / TB : modèle de Timoshenko. Eléments P1 et  $\Theta = -1$ .

Nous observons toujours une faible dépendance des résultats à la valeur de  $r$  pour la méthode de Nitsche. L’analyse mathématique de notre modèle, avec l’utilisation de la méthode de Nitsche pour le contact, est un travail en cours.

## 5 Conclusions et perspectives

Nous présentons un modèle de poutre de Timoshenko enrichi car nous avons vu que les modèles classiques de poutre n’étaient pas assez riches cinématiquement pour le contact de Nitsche. En effet, leurs formulations deviennent celles d’un contact pénalisé. Nous comparons le modèle enrichi avec méthode de Nitsche avec le modèle classique de Timoshenko avec contact pénalisé. Les premiers résultats obtenus sont en accord avec les résultats théoriques obtenus pour les deux méthodes.

## Références

- [1] J. Nitsche. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 36(1) :9–15, July 1971.
- [2] Franz Chouly and Patrick Hild. A Nitsche-Based Method for Unilateral Contact Problems : Numerical Analysis. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51(2) :1295–1307, January 2013.
- [3] Franz Chouly, Mathieu Fabre, Patrick Hild, Rabii Mlika, Jérôme Pousin, and Yves Renard. An Overview of Recent Results on Nitsche’s Method for Contact Problems. In Stéphane P. A. Bordas, Erik Burman, Mats G. Larson, and Maxim A. Olshanskii, editors, *Geometrically Unfitted Finite Element Methods and Applications*, volume 121, pages 93–141. Springer International Publishing, Cham, 2017. Series Title : Lecture Notes in Computational Science and Engineering.
- [4] Mathieu Fabre, Cédric Pozzolini, and Yves Renard. Nitsche-based models for the unilateral contact of plates. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 55 :S941–S967, 2021.
- [5] S.P. Timoshenko. LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245) :744–746, May 1921.
- [6] Franz Chouly and Patrick Hild. On convergence of the penalty method for unilateral contact problems. *Applied Numerical Mathematics*, 65 :27–40, March 2013.
- [7] Franz Chouly, Patrick Hild, and Yves Renard. Lagrangian and Nitsche methods for frictional contact. In *Numerical Methods for Strong Nonlinearities in Mechanics : Contact and Fracture*, pages 1–46. Wiley, 2023.
- [8] Yves Renard and Konstantinos Poullos. GetFEM : Automated FE Modeling of Multiphysics Problems Based on a Generic Weak Form Language. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 47(1) :1–31, March 2021.