

Mesure conjointe de champs de déplacements et de propriétés matériaux à partir d'images et de réseaux de neurones informés par la physique

R. Bonnet-Eymard^{1,2}, P. Escande², R. Bouclier^{1,2,3}

¹ Univ. Toulouse, INSA-Toulouse, IMT-Albi, ISAE-SUPAERO, CNRS UMR 5312, ICA, Toulouse

² Univ. Toulouse, INSA-Toulouse, CNRS UMR 5219, IMT (Institut des Mathématiques de Toulouse), Toulouse

³ Institut Universitaire de France (IUF), France

Résumé — Cette contribution présente une méthode de mesure de champs de déplacements et de propriétés matériaux qui combine réseaux de neurones informés par la physique et corrélation d'image non supervisée. Il s'agit d'une formulation mixte (le déplacement et la contrainte sont approchés par des réseaux de neurones distincts) enrichie de plusieurs innovations clés dans sa formulation, son architecture et son implémentation. L'approche proposée ne nécessite pas de phase d'entraînement "offline" : la mesure du déplacement et des paramètres se fait à la volée, directement à partir des images expérimentales.

Mots clés — Assimilation de données expérimentales, Corrélation d'Images, Problèmes inverses, Approches guidées par les données, Réseaux de neurones informés par la physique.

1 Introduction

La mesure de champs de déplacements ("full-field measure"), notamment par corrélation d'image (DIC), a permis de mettre au point de nouvelles méthodes d'identification de propriétés matériaux. Nous pouvons citer entre autre la méthode FEMU (Finite Element Model Updating) [1, 2] qui optimise les propriétés matériaux afin de faire correspondre au mieux les champs de déplacements mesurés et simulés; la Constitutive Gap method (CG) [3, 2] qui s'appuie sur la construction de champs de contraintes admissibles pour la comparaison données/modèle ou encore la Virtual Fields Method (VFM) [4, 2] et l'Equilibrium Gap Method (EGM) [5, 2] qui appliquent le principe des travaux virtuels sur le champ de déplacements mesuré. Avec des données dont la quantité et la qualité ne cesse de croître, il semble envisageable d'identifier un grand nombre de paramètres, comme par exemple un champ de propriétés matériaux, qui pourraient rendre compte d'effets mécaniques locaux induits par une microstructure hétérogène. Toutefois, cette perspective se révèle complexe et particulièrement ambitieuse pour les méthodes classiques, puisqu'il s'agit de résoudre un problème inverse en grande dimension (de l'ordre 100-1000 paramètres). Celui-ci est usuellement résolu numériquement par des algorithmes de type Gauss-Newton dont l'évaluation des gradients se fait par différences finies, rendant le coût de calcul rapidement prohibitif à mesure que le nombre de paramètres croît.

Pour pallier ces difficultés, une approche basée sur les réseaux de neurones (RNs) cherche à tirer profit des récentes avancées dans le domaine de l'apprentissage machine, en particulier la différentiation automatique. Plus spécifiquement, les réseaux de neurones informés par la physique (PINNs) semblent prometteurs puisqu'ils s'appuient sur des a priori physiques (équations d'équilibres, conditions limites, conditions initiales...) pour que l'apprentissage du réseau se fasse de façon non supervisée. Pour la résolution de problèmes inverses, une méthode basée sur les PINNs consiste en l'apprentissage conjoint, à partir de données mesurées, de la solution du problème physique (simulée par un RN) ainsi que des paramètres associés au modèle. Cette approche se révèle d'autant plus pertinente pour les problèmes inverses en grande dimension, comme démontré dans [6], puisque le nombre de paramètres à identifier est généralement plus petit que le nombre de paramètres d'entraînement des RNs. Au cours des dernières années, plusieurs études ont appliqué l'approche basée sur les PINNs pour identifier des propriétés matériaux en grande dimension. Les travaux pionniers semblent être [7, 8] en proposant de représenter les champs de propriétés matériaux à identifier par des RNs dédiés et ils ont appliqué ces formulations respectivement dans le cadre de l'hyperélasticité et de la propagation d'ondes. Par la suite, différents travaux ont

développé la méthode pour des modèles poutres [9], ou des modèles 2D en biomécanique [10] et mécanique des matériaux [11]. Toutefois, peu de travaux en mécanique du solide propose une formulation directement applicable à des cas expérimentaux réels, sans avoir recours à des scénarios simplifiés.

Cette contribution propose une méthode basée sur les PINNs pour la mesure de champs de déplacements et l'identification de paramètres matériaux en grande dimension et adaptée à des contextes expérimentaux. Notre méthode est une version enrichie de la formulation mixte classiquement utilisée en mécanique du solide, c'est à dire que le champ de déplacements et le champ de contraintes sont simulés par des RNs distincts. Elle incorpore des innovations clés comme i) une métrique de corrélation d'image pour travailler directement sur les images comme données d'entrée ii) l'ajout d'un terme traduisant l'équilibre global pour exploiter au mieux les mesures d'efforts disponibles expérimentalement, iii) l'intégration de Fourier Features dans l'architecture des RNs pour capturer des comportements hautes fréquences, iv) la représentation des propriétés matériaux à identifier par un champ éléments finis et v) un algorithme de minimisation alternée affiné et dédié au problème étudié pour assurer la convergence dans des espaces de paramètres en grande dimension. A notre connaissance, aucuns travaux n'ont proposé une telle méthode PINN-DIC intégrée pour la mesure conjointe de champs de déplacements et de propriétés matériaux en grande dimension.

2 Problème inverse de référence à résoudre

Considérons un essai de traction 2D d'une plaque, puisqu'il s'agit d'un cas d'étude typique en mécanique expérimentale. La méthode présentée est toutefois très générale dans sa formulation et peut être appliquée à différents types de chargements, de géométries ainsi qu'en 3D. L'échantillon occupe le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, les frontières extérieures sont notées $\Gamma_{\text{left}} \cup \Gamma_{\text{right}} \cup \Gamma_{\text{top}} \cup \Gamma_{\text{bot}}$ et correspondent respectivement aux bords gauche, droite, haut et bas. Les frontières intérieures sont notées Γ_{int} . Typiquement, lors d'un essai de traction, un déplacement est imposé au mord supérieur tandis que le mord inférieur est maintenu fixé, ce qui génère un effort à travers les bords haut et bas (Γ_{top} et Γ_{bot}) tandis que les autres bords (Γ_{left} , Γ_{right} et Γ_{int}) restent libres d'efforts. Expérimentalement, la quantité statique mesurable sur une machine de traction standard est la composante verticale de la résultante de l'effort de réaction généré par le déplacement du mord supérieur. Nous notons cette quantité F_{obs} . En termes de données cinématiques, il est possible de distinguer deux cas. Ou bien nous pouvons considérer un champ de déplacements, noté \mathbf{u}_{obs} , sur la surface de l'éprouvette et évalué aux points \mathbf{x}_{obs} de Ω . Sinon, notre méthode intègre naturellement une formulation de corrélation d'image, ce qui permet de travailler directement sur les cartes en niveau de gris des images de référence et déformée de l'éprouvette. Une illustration de l'essai de traction ainsi que des données cinématiques et statiques sont présentées en Fig. 1 (gauche).

Une fois les données cinématiques et statiques précisées, il est possible d'écrire formellement le problème d'identification qu'il s'agit de résoudre. Nous notons $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ le vecteur qui collecte les m paramètres matériaux à identifier à partir de \mathbf{u}_{obs} et F_{obs} . Pour ce faire, la méthode classique FEMU consiste à optimiser \mathbf{p} de telle sorte que le champ de déplacements simulé \mathbf{v} associé - c'est à dire le champ obtenu par résolution du problème mécanique sous-jacent par méthode des éléments finis - corresponde au mieux à \mathbf{u}_{obs} . En ce sens, FEMU est une méthode d'assimilation de données du point de vue mathématiques. Un point clé est la définition de conditions aux limites appropriées. Puisque seule une composante de la réaction est connue sur Γ_{top} et Γ_{bot} , il n'est pas possible de guider le problème en effort. Par conséquent, il est d'usage de prescrire des conditions aux limites cinématiques sur Γ_{top} et Γ_{bot} à partir du champ de déplacements mesuré. Nous notons respectivement $\mathbf{u}_{\text{obs}}^{\text{top}} = \mathbf{u}_{\text{obs}}|_{\Gamma_{\text{top}}}$ et $\mathbf{u}_{\text{obs}}^{\text{bot}} = \mathbf{u}_{\text{obs}}|_{\Gamma_{\text{bot}}}$. Ainsi il est possible d'écrire le problème mécanique. Nous nous plaçons dans le cadre de l'élasticité linéaire, sous l'hypothèse de petits déplacements et petites perturbations. On cherche à trouver le champ de déplacements simulé $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui vérifie :

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega ; \quad (1a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = C(\mathbf{p}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = C(\mathbf{p}) \nabla_s \mathbf{v} = \frac{1}{2} C(\mathbf{p}) \left(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \right) \quad \text{dans} \quad \Omega ; \quad (1b)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_{\text{obs}}^{\text{top}} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\text{top}} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = \mathbf{u}_{\text{obs}}^{\text{bot}} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\text{bot}} ; \quad (1c)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\text{left}} \cup \Gamma_{\text{right}} \cup \Gamma_{\text{in}} ; \quad (1d)$$

où σ correspond au tenseur des contraintes de Cauchy, $\varepsilon(v)$ au tenseur des déformations linéarisé, $C(\mathbf{p})$ au tenseur d'Hooke, ∇v au gradient du champ de déplacements et $\nabla_s v$ à sa partie symétrique. Notons à ce stade que les variables écrites de façon standard (non grasses) symbolisent une quantité continue tandis que celles en gras dénotent des quantités discontinues, discrétisées. Une fois la solution v connue, il est possible de calculer la composante verticale de l'effort résultant du déplacement du mord supérieur, et qui peut être alors comparée à F_{obs} :

$$R(v(\mathbf{p})) = \int_{\Gamma_{\text{top}}} [C(\mathbf{p}) \nabla_s v \mathbf{e}_y] \cdot \mathbf{e}_y d\Gamma. \quad (2)$$

Finalement, dans le formalisme FEMU, le problème d'identification revient à trouver \mathbf{p}^* solution du problème de minimisation :

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m} \underbrace{\lambda_{\text{obs}}^u \|\mathbf{u}_{\text{obs}} - \mathbf{v}(\mathbf{x}_{\text{obs}}; \mathbf{p})\|_2^2}_{=J_{\text{obs}}^u} + \lambda_{\text{obs}}^F \underbrace{\|F_{\text{obs}} - R(\mathbf{v}(\mathbf{p}))\|_2^2}_{=J_{\text{obs}}^F}, \quad (3)$$

où $\mathbf{v}(\mathbf{p})$ est la solution du problème éléments finis dérivé des équations (1a)-(1d) et associée au jeu de paramètres \mathbf{p} . Les scalaires λ_{obs}^u et λ_{obs}^F sont des poids qui ajustent l'importance accordée à chaque terme J_{obs}^u et J_{obs}^F (respectivement) lors de l'optimisation de \mathbf{p} . Dans la méthode FEMU, λ_{obs}^u et λ_{obs}^F sont définis classiquement à partir des caractéristiques du bruit qui entache \mathbf{u}_{obs} et F_{obs} .

Le problème d'optimisation (3) est résolu en pratique par un algorithme de Gauss-Newton, dont chaque itération requiert le calcul du Jacobien de \mathbf{v} par rapport à \mathbf{p} . Puisqu'une expression analytique du Jacobien n'est généralement pas connue, il convient de l'évaluer par différences finies, ce qui nécessite la résolution de $m + 1$ problèmes éléments finis au total. Par conséquent cette approche est peu adaptée pour des problèmes en grande dimension ou non linéaires. Une approche basée sur les PINNs permet de s'affranchir de cette malédiction de la dimension puisque les paramètres matériaux sont appris à la volée, en même temps que les poids des réseaux de neurones qui simulent le déplacement et la contrainte. Ainsi, le problème direct est résolu une seule fois et non plus plusieurs fois à chaque itération.

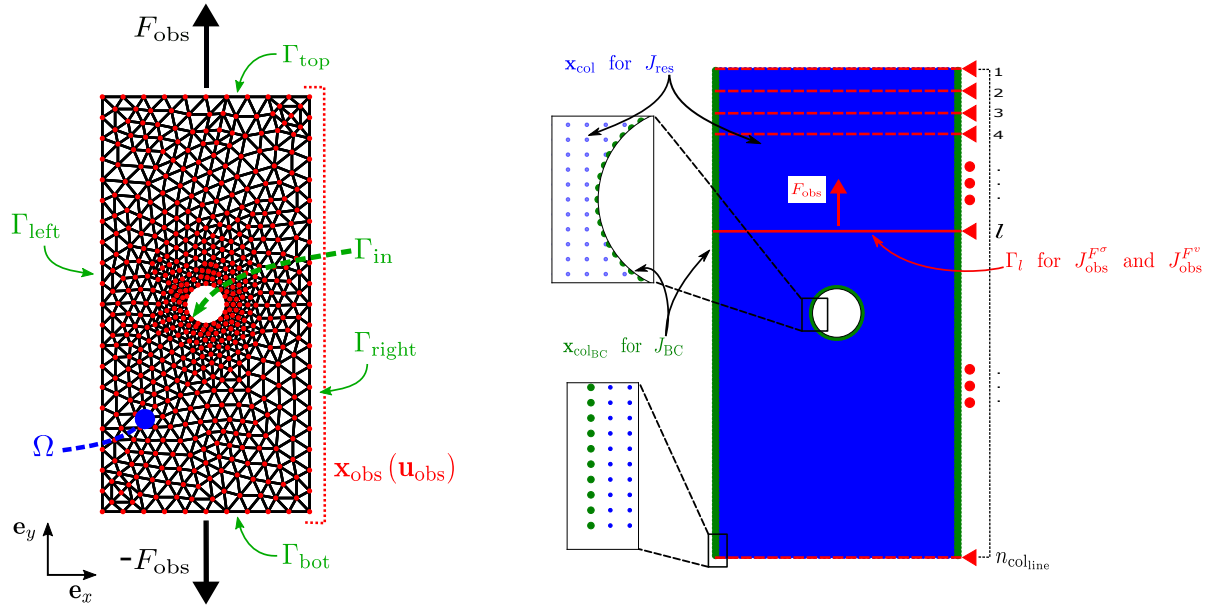


FIGURE 1 – Schéma d'un essai de traction standard. Une plaque perforée est soumise à un effort de traction de résultante F_{obs} sur Γ_{top} et Γ_{bot} tandis que Γ_{left} , Γ_{right} , Γ_{in} restent libres d'efforts. Dans le cadre de l'approche PINN, les fonctionnelles sont évaluées en des points de collocation $x_{\text{col}} \in \Omega$ et $x_{\text{col}_{\text{BC}}} \in \partial\Omega$. Enfin, les termes $J_{\text{obs}}^{F^\sigma}$ et $J_{\text{obs}}^{F^\nu}$ imposent que chaque ligne horizontale Γ_l , $l = 1, \dots, n_{\text{colline}}$ transmettent le même effort vertical F_{obs} .

3 Résolution par les PINNs

Nous détaillons dans cette partie une formulation mixte basée sur les PINNs pour résoudre le problème (1a)-(1d), dans le cas particulier de l'identification d'un champ de modules d'Young. Cette partie s'appuie sur le travail développé dans [12] et permet de détailler les différentes innovations clés apportées.

3.1 Formulation mixte enrichie

Le principe de l'approche mixte basée sur les PINNs est de simuler le champ de déplacements et le champ de contraintes par des RNs, notés respectivement \hat{v}_{θ_v} et $\hat{\sigma}_{\theta_\sigma}$ et définis comme suit :

$$\hat{v}_{\theta_v} : \quad \Omega \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ x = (x_x, x_y) \mapsto \hat{v}_{\theta_v}(x) = (\hat{v}_{\theta_v x}(x_x, x_y), \hat{v}_{\theta_v y}(x_x, x_y)) = \mathcal{NN}(\theta_v; x) \quad ; \quad (4a)$$

$$\hat{\sigma}_{\theta_\sigma} : \quad \Omega \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ x = (x_x, x_y) \mapsto \hat{\sigma}_{\theta_\sigma}(x) = (\hat{\sigma}_{\theta_\sigma x}(x_x, x_y), \hat{\sigma}_{\theta_\sigma y}(x_x, x_y)) = \mathcal{NN}(\theta_\sigma; x) \quad ; \quad (4b)$$

où \mathcal{NN} désigne un réseau de neurones dense et dont les poids d'entraînement sont regroupés dans les vecteurs $\theta_v \in \mathbb{R}^{n_{\theta_v}}$ et $\theta_\sigma \in \mathbb{R}^{n_{\theta_\sigma}}$ pour le déplacement et la contrainte respectivement. Nous souhaitons identifier un champ de modules élastiques, noté $E_h : x \in \Omega \rightarrow E_h(x)$, et nous supposons que le coefficient de Poisson est scalaire et connu. Une première innovation apportée par ce travail est de représenter E_h par un champ éléments finis et non par un réseau de neurones comme il est d'usage dans la littérature. Ce choix est justifié par le fait que des éléments de bas ordres suffisent à capturer des variations mêmes très localisées du module d'Young, qu'aucune régularité supplémentaire n'est nécessaire puisque notre formulation ne fait intervenir aucune dérivée spatiale de E_h et que cette représentation permet une meilleure interprétabilité des résultats puisque le vecteur \mathbf{p} représente les valeurs nodales de E_h . De plus, cette représentation nécessite l'ajustement de moins d'hyperparamètres que dans le cas d'un RN, ce qui rend son utilisation plus simple. Ainsi, on écrit :

$$E_h(x) = \sum_{i=1}^m \Phi_i(x) E_i = \Phi(x) \mathbf{e}, \quad (5)$$

où $\Phi(x)$ est le vecteur des fonctions de forme éléments finis $\Phi(x)$, et \mathbf{e} est le vecteur des inconnues nodales, regroupant les valeurs E_i du module d'Young associées à chaque nœud du maillage éléments finis. Puisque le coefficient de Poisson est supposé connu, on a $\mathbf{p} = \mathbf{e}$ et les deux notations sont confondues par la suite.

Dans le cadre des PINNs, les équations du problème (1a)-(1d) sont imposées faiblement à travers des termes de pénalisation. Le problème inverse revient donc à résoudre :

$$\left(\hat{v}_{\theta_v}^*, \hat{\sigma}_{\theta_\sigma}^*, E_h^* \right) = \arg \min_{\hat{v}_{\theta_v}, \hat{\sigma}_{\theta_\sigma}, E_h} J_{\text{PINN}}^{\text{mixed}} \left(E_h; \hat{v}_{\theta_v}, \hat{\sigma}_{\theta_\sigma} \right), \quad (6)$$

où la fonctionnelle $J_{\text{PINN}}^{\text{mixed}}$ est définie comme suit :

$$J_{\text{PINN}}^{\text{mixed}} \left(E_h; \hat{v}_{\theta_v}, \hat{\sigma}_{\theta_\sigma} \right) = \lambda_u J_{\text{obs}}^u \left(\hat{v}_{\theta_v} \right) + \lambda_F^\sigma J_{\text{obs}}^{F^\sigma} \left(\hat{\sigma}_{\theta_\sigma} \right) + \lambda_F^v J_{\text{obs}}^{F^v} \left(E_h; \hat{v}_{\theta_v} \right) \quad (7a)$$

$$+ \lambda_{\text{res}} J_{\text{res}} \left(\hat{\sigma}_{\theta_\sigma} \right) + \lambda_{\text{BC}} J_{\text{BC}} \left(\hat{\sigma}_{\theta_\sigma} \right) \quad (7b)$$

$$+ \lambda_{\text{const}} J_{\text{const}} \left(E_h; \hat{v}_{\theta_v}, \hat{\sigma}_{\theta_\sigma} \right). \quad (7c)$$

Dans la définition de $J_{\text{PINN}}^{\text{mixed}}$, le terme J_{obs}^u correspond à l'attache aux données cinématiques. Celui-ci peut être défini de façon analogue à ce qui est fait dans l'Eq. (3) si les données d'entrée sont un champ de déplacements obtenu par corrélation d'image. Autrement, en disposant de l'image en niveaux de gris de référence I_0 et déformée I_t de l'éprouvette, ce terme d'observation cinématique peut être défini comme la conservation des niveaux de gris :

$$J_{\text{obs}}^u = \|I_0 - I_t \circ \varphi\|_2^2, \text{ avec } \varphi : x \mapsto x + v(x) \quad (8)$$

Il apparait ainsi clairement que cette formulation est naturellement adaptée à la mesure de champ de déplacements, conjointement à l’identification de propriétés matériaux, dans une méthode PINN-DIC intégrée.

Les termes J_{res} et J_{BC} traduisent respectivement l’équation d’équilibre locale (cf Eq. (1a)) et les conditions aux limites de bords libres (cf Eq. (1d)). Le terme J_{const} correspond à la relation de comportement et permet de coupler l’apprentissage de \hat{v}_{θ_v} et $\hat{\sigma}_{\theta_\sigma}$. Enfin, $J_{\text{obs}}^{F_\sigma}$ est un terme d’attache aux données statiques, inspiré de la définition de J_{obs}^F (cf Eq. (3)) mais étendu à plusieurs tranches horizontales $\{\Gamma_l\}_{l=1}^{n_{\text{col}}^{\text{line}}}$ de l’éprouvette (représentées en Fig. 1), pour imposer un équilibre global de la structure. Ce terme se révèle moins contraignant que J_{res} , ce qui facilite la convergence de $\hat{\sigma}_{\theta_\sigma}$, notamment puisqu’il permet de capturer la bonne échelle de valeurs de contraintes. Une autre innovation de la formulation consiste à exprimer ce terme d’équilibre global en fonction du déplacement dans une fonctionnelle notée $J_{\text{obs}}^{F_v}$. Celle-ci se révèle particulièrement sensible aux paramètres matériaux \mathbf{e} et facilite leur identification. Ces deux termes constituent des contributions clés de la méthode proposée.

De plus, un autre apport du point de vue numérique est d’intégrer une couche de Fourier Features dans les RNs \hat{v}_{θ_v} et $\hat{\sigma}_{\theta_\sigma}$ afin de faciliter l’apprentissage de comportements locaux (voir [13] pour plus de détails). Ces comportements hautes fréquences sont liés à des variations localisées des propriétés matériaux et il est donc nécessaire de les capter pour identifier avec finesse les paramètres. Ces différents points sont développés dans [12].

Enfin, les poids λ_u , λ_F^σ , λ_F^v , λ_{res} , et λ_{const} permettent de pondérer la contribution de chaque terme dans l’entraînement des RNs et dans l’identification de E_h . Précisons également que les différentes fonctionnelles sont évaluées en des points dits de collocation, répartis uniformément dans le domaine Ω et sur ses bords libres (cf Fig. 1 (droite)). De plus, certaines fonctionnelles requièrent l’évaluation de dérivées spatiales des différentes quantités d’intérêt, qui sont calculées de façon exacte et efficace par différentiation automatique.

3.2 Stratégie d’entraînement

La résolution du problème (6) se révèle difficile puisqu’il nécessite la minimisation de plusieurs fonctionnelles (potentiellement non convexes), par rapport à différents ensembles de paramètres en grande dimension. Une autre contribution importante de ce travail fut donc de concevoir une stratégie de résolution dédiée afin de garantir sa convergence et sa robustesse. Les différentes étapes sont résumées dans cette partie.

Une première partie consiste en une initialisation convenable des différents paramètres. Le module d’Young E_h est initialisé à sa valeur nominale constante E_{nom} . Les poids des RNs \hat{v}_{θ_v} et $\hat{\sigma}_{\theta_\sigma}$ sont quant à eux initialisés par méthode de Xavier. Toutefois, les champs de déplacements et de contraintes résultants manquent d’a priori mécaniques et n’ont donc pas les bonnes échelles de valeurs. Nous proposons une deuxième étape d’initialisation pour ces RNs, afin de les rendre plus consistants avec la mécanique. Dans un premier temps, \hat{v}_{θ_v} est entraîné uniquement sur les données cinématiques, par la minimisation de J_{obs}^u . Cette apprentissage permet d’obtenir une bonne approximation du champ de déplacements sans faire intervenir de comportement mécanique. Ensuite, $\hat{\sigma}_{\theta_\sigma}$ est affiné à la fois en minimisant $J_{\text{obs}}^{F_\sigma}$ pour capturer la bonne échelle de valeurs, ainsi que J_{const} qui joue le rôle d’attache aux données et qui, conjointement avec J_{res} , J_{BC} et $J_{\text{obs}}^{F_\sigma}$, permet d’obtenir un champ qui se rapproche de l’admissibilité statique.

Une fois les différentes grandeurs convenablement initialisées, la minimisation de $J_{\text{PINN}}^{\text{mixed}}$ est réalisée par une minimisation alternée de cette même fonctionnelle par rapport aux différents ensembles de paramètres (\mathbf{e} , θ_v et θ_σ). Cette étape, qui peut être également vue comme un point fixe, permet de pallier les différences de sensibilités de $J_{\text{PINN}}^{\text{mixed}}$ (et des fonctionnelles la constituant) par rapport aux paramètres.

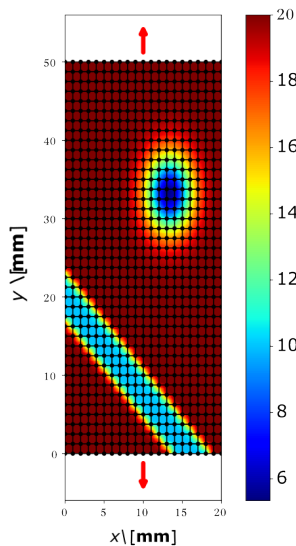
4 Exemple synthétique : plaque en traction avec une distribution de module Young complexe

4.1 Modélisation

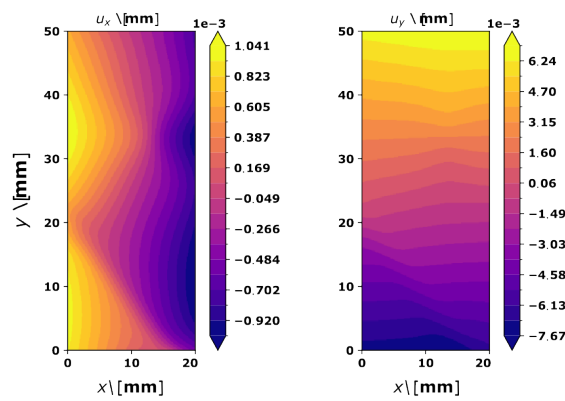
Nous considérons une plaque rectangulaire de longueur $L = 20$ mm et de hauteur $H = 50$ mm chargée en traction (cf Fig. 2). L'effort de traction vertical, de résultante $F_{\text{obs}} = 100$ N, est appliquée uniformément le long du bord haut et bas de l'éprouvette. Pour la modélisation du problème, nous faisons l'hypothèse de contrainte plane. Le matériau est caractérisé par un coefficient de Poisson uniforme et de valeur $\nu = 0.3$ ainsi que par une distribution de modules d'Young $E(x, y)$ à identifier. Cette dernière est caractérisée par deux affaiblissements par rapport à la valeur nominale E_{nom} fixée à 20 GPa. Le premier affaiblissement est de 15 GPa et est en forme de Gaussienne (en haut à droite de l'éprouvette), tandis que le deuxième est en forme de créneau et représente une perte de rigidité de 10 GPa. La distribution de module d'Young de référence, ainsi que le maillage éléments finis sur lequel est discrétisé E_h , sont représentés sur la Fig. 2. Le nombre de degrés de liberté de ce maillage, soit le nombre total de paramètres matériaux à identifier, est $m = 861$.

Les données synthétiques sont générées à partir d'une simulation éléments finis du problème de mécanique associé, calculée avec FEniCS ([14, 15, 16, 17]), sur un maillage plus fin que celui définissant E_h (1236 nœuds contre 861). Le champ de déplacements ainsi obtenu est également présenté en Fig. 2.

$E(x, y)$ reference



Observations



L	$=$	20 mm
H	$=$	50 mm
E_{nom}	$=$	20 GPa
ν	$=$	0.3 (fixed)
F_{obs}	$=$	100 N.mm ⁻¹
γ_u	$=$	0%
n_{obs}	$=$	1236
n_{col}	$=$	$40 \times 100 = 4,000$
n_{colBC}	$=$	$500 + 500 = 1000$
n_{colline}	$=$	500

FIGURE 2 – Configuration du cas test synthétique. De gauche à droite : le module d'Young de référence avec le maillage éléments finis sur lequel il est discrétisé ; le champ de déplacements obtenu à partir d'une simulation éléments finis avec FEniCS et qui sert de données cinématiques ; les paramètres du modèle.

Enfin, les réseaux de neurones $\hat{\nu}_{\theta_\nu}$ et $\hat{\sigma}_{\theta_\sigma}$ sont constitués, dans l'ordre, de :

- Une première couche de normalisation (pratique classique en apprentissage machine) ;
- Une couche de Fourier Features (voir [13]) afin de faciliter l'apprentissage des comportements hautes fréquences (locaux) ;
- Un réseau de neurones dense de 3 couches cachées, chacune contenant 50 neurones ;
- Une couche de régression linéaire (pratique classique en apprentissage machine).

Au total, $\hat{\nu}_{\theta_\nu}$ et $\hat{\sigma}_{\theta_\sigma}$ sont relativement petits puisqu'ils comptent respectivement 6350 et 6400 paramètres, ce qui est à la fois une caractéristique et la force des PINNs.

4.2 Résultats

Les résultats présentés ci-dessous ont été obtenus en prenant comme données d'entrée le champ de déplacements synthétique obtenu par éléments finis. Par conséquent, le terme d'attache aux données cinématiques J_{obs}^u est défini, dans ce cas, par l'Eq. (3) et non par la fonctionnelle de corrélation d'image définie par l'Eq. (8).

En suivant la stratégie de résolution développée dans la Section 3.2, il a été possible d'identifier précisément la distribution de modules d'Young. La Fig. 3 compare la distribution de modules d'Young de référence, celle identifiée par notre méthode et l'erreur relative moyenne entre les deux distributions. Afin de quantifier la précision de la méthode, nous proposons d'utiliser une métrique calculant l'erreur relative moyenne entre les deux distributions et définie comme suit :

$$\text{ERM}(E_h) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{|E_i - E_i^{\text{sol}}|}{E_i^{\text{sol}}}, \quad (9)$$

A l'issue de l'entraînement, l'ERM est de 7% avec un écart type de 3.8%, ce qui montre que notre méthode atteint un bon niveau de précision sur cet exemple. De plus, la Fig. 3 propose une visualisation de la distribution identifiée le long d'une droite passant par les deux types d'affaiblissement. Il peut être observé que ces deux types d'affaiblissements sont capturés avec précision.

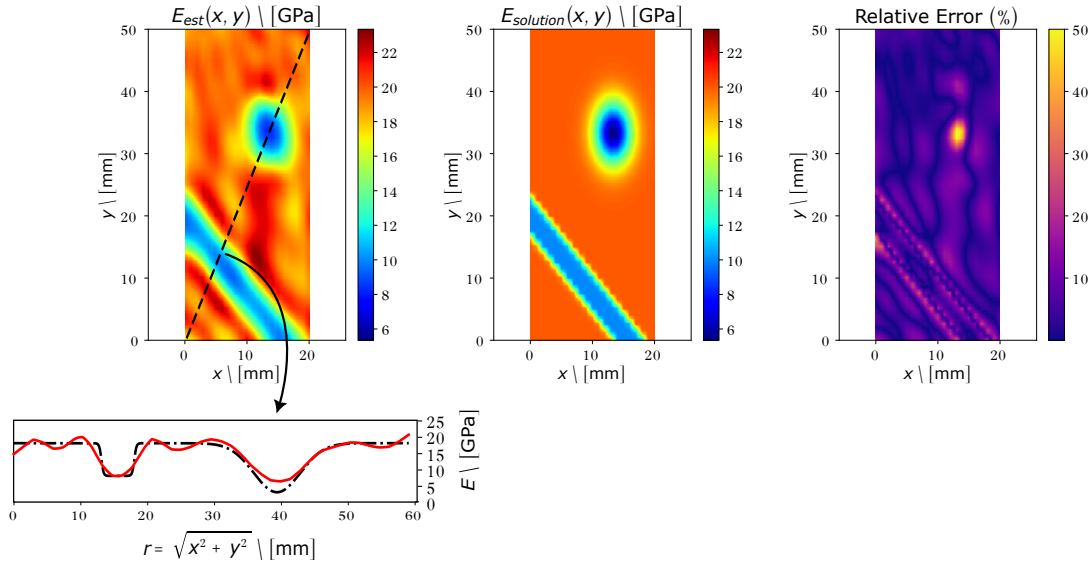


FIGURE 3 – De gauche à droite : le module d'Young identifié, avec un agrandissement sur la section transversale indiquée par la ligne noire pointillée; le module d'Young de référence; la carte d'erreur relative entre la distribution de référence et celle identifiée. La méthode proposée permet d'identifier avec précision la distribution plutôt complexe. A la fin de l'entraînement, l'ERM (cf Eq. (9)) est de 7% avec un écart-type de 3.8%.

Du point de vue de la complexité algorithmique, le temps de calcul total est de l'ordre de l'heure en utilisant seulement le processeur d'un ordinateur portable standard (sans avoir recours à un GPU). De plus, il est intéressant de vérifier que le temps de calcul d'une itération du point fixe varie très peu (voire pas du tout) en fonction du nombre de paramètres à identifier. Ceci tient du fait que le nombre de paramètres des réseaux de neurones est bien plus grand que le nombre de paramètres matériaux à identifier.

5 Conclusion et perspective

Une méthode PINN-DIC intégrée pour la mesure de champ de déplacements et de propriétés matériaux, adaptée à des contextes de mécanique expérimentale, a été présentée et mise en application sur

un cas synthétique. Ce cas test a permis de montrer la précision et la pertinence de l’approche pour des problèmes inverses en grande dimension (de l’ordre de 1000 paramètres). La méthode s’appuie sur une formulation mixte qui a été enrichie de plusieurs développements clés pour garantir sa robustesse et sa convergence.

De surcroît, plusieurs extensions de ces résultats seront présentées. D’une part, un cas réel d’essai de traction d’une plaque trouée, jusqu’à sa ruine, sera étudié pour identifier l’endommagement progressif de l’éprouvette. D’autre part, pour le cas synthétique et réel, nous montrerons les résultats de la méthode PINN-DIC intégrée. C’est à dire que les données d’entrée seront les images expérimentales et non plus un champ de déplacements. Enfin, un cas d’application pour l’identification de loi de comportement hyperélastique sera détaillé.

Références

- [1] D. Lecompte, A. Smith, H. Sol, J. Vantomme, D. Van Hemelrijck. *Mixed numerical-experimental technique for orthotropic parameter identification using biaxial tensile tests on cruciform specimens*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 44(5) :1643-1656, 2007.
- [2] S. Avril, M. Bonnet, A.-S. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco, et al. *Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements*, Experimental Mechanics, Springer, 48 :381-402, 2008.
- [3] P. Ladevèze, A. Chouaki. *Application of a posteriori error estimation for structural model updating*, Inverse Problems, IOP Publishing, 15(1) :49, 1999.
- [4] F. Pierron, M. Grédiac. *The virtual fields method : extracting constitutive mechanical parameters from full-field deformation measurements*, Springer Science & Business Medi, 2012.
- [5] D. Claire, F. Hild, S. Roux. *A finite element formulation to identify damage fields : the equilibrium gap method.*, International journal for numerical methods in engineering, Springer, 61(2) :189-208, Wiley Online Library, 2004.
- [6] H. Boulenc, R. Bouclier, P.-A. Garambois, J. Monnier. *Spatially-distributed parameter identification by physics-informed neural networks illustrated on 2D shallow-water equations.*, Inverse Problems, IOP Publishing, 41(3), 2025.
- [7] E. Zhang, M. Yin, G.E., Karniadakis. *Physics-informed neural networks for nonhomogeneous material identification in elasticity imaging.*, ArXiv preprint, arXiv :2009.04525, 2009.
- [8] K. Shukla, P.C. Di Leoni, J. Blackshire, D. Sparkman, G.E. Karniadakis. *Physics-informed neural network for ultrasound nondestructive quantification of surface breaking cracks*, Journal of Nondestructive Evaluation, Springer, 39 :1-20, 2020.
- [9] T. Kapoor, H. Wang, A. Núñez, R. Dollevoet. *Physics-informed neural networks for solving forward and inverse problems in complex beam systems*, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, IEEE, 35(5) :5981-5995, 2023.
- [10] A. Kamali, M. Sarabian, K. Laksari. *Elasticity imaging using physics-informed neural networks : Spatial discovery of elastic modulus and poisson’s ratio*, Acta biomaterialia, Elsevier, 155 :400-409, 2023.
- [11] Y. Wei, Q. Serra, G. Lubineau, E. Florentin. *Coupling physics-informed neural networks and constitutive relation error concept to solve a parameter identification problem*, Computers & Structures, 283 :107054, 2023.
- [12] R. Bouclier, R. Bonnet-Eymard, E. Rabineau, J. Réthoré. *PINN-based Identification of Spatially Varying Elastic Moduli from Experimental Full-Field Displacement Data*, Submitted, 2025 (https://hal.science/hal-05361098v1/file/draft_rb_rbe_er_jr.pdf).
- [13] S. Wang, H. Wang, P. Perdikaris. *On the eigenvector bias of Fourier feature networks : From regression to solving multi-scale PDEs with physics-informed neural networks*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 384 : 113938, 2021.
- [14] I. A. Baratta, J. P. Dean, J. S. Dokken, M. Habera, J. S. Hale, C. N. Richardson, M. E. Rognes, M. W. Scroggs, N. Sime, and G. N. Wells. *DOLFINx : The next generation FEniCS problem solving environment*, preprint (2023).
- [15] M. W. Scroggs, J. S. Dokken, C. N. Richardson, and G. N. Wells. *Construction of arbitrary order finite element degree-of-freedom maps on polygonal and polyhedral cell meshes*, ACM Transactions on Mathematical Software, 48(2) : 18 :1-18 :23, 2022.
- [16] M. W. Scroggs, I. A. Baratta, C. N. Richardson, and G. N. Wells. *Basix : a runtime finite element basis evaluation library*, Journal of Open Source Software, 7(73) :3982, 2022.

- [17] M. S. Alnaes, A. Logg, K. B. Ølgaard, M. E. Rognes and G. N. Wells. *Unified Form Language : A domain-specific language for weak formulations of partial differential equations*, ACM Transactions on Mathematical Software, 40, 2014.
-