

# Une modélisation semi-analytique du contact viscoélastique multi-couche périodique

N. Durand<sup>1,2</sup>, A. Platzer<sup>1</sup>, A. Duval<sup>1</sup>, D. Nelias<sup>1</sup>, T. Chaise<sup>1</sup>

<sup>1</sup> INSA Lyon, CNRS, LaMCoS, UMR5259, 69621 Villeurbanne, France

<sup>2</sup> Manufacture Française de Pneumatiques Michelin, 63040 Cedex 9 Clermont-Ferrand, France

**Résumé** — Le contact pneu-chaussée est un problème complexe à modéliser. Le comportement viscoélastique du pneumatique ainsi que l'aspect multi-échelle de la surface routière rendent la modélisation coûteuse à mettre en place par des modèles éléments finis. Des méthodes alternatives parviennent à accélérer ces temps de calculs, en ne discrétisant que la surface. Cependant, ces dernières se cantonnent à de la viscoélasticité linéaire, éloignée du comportement réel d'un pneumatique. Le présent travail propose un modèle semi-analytique en couches, dont le but est de complexifier les comportements matériaux.

**Mots clés** — contact, viscoélasticité, multi-couche.

## 1 Introduction

Les modèles de contact par méthodes des éléments de frontières (BEM) ou semi-analytique (SAM) ont l'avantage d'être rapides en temps de calcul par rapport aux éléments finis [7] [9], notamment pour la modélisation du contact viscoélastique [2] [8]. Cependant, ces méthodes ne proposent généralement que des modèles de viscoélasticité linéaire. Une littérature existe quant à la modélisation en bi-couche de contact élastique à l'aide de potentiels de Papkovic-Neuber [11]. Et certains travaux parviennent à modéliser du contact en bi-couche en intégrant une couche viscoélastique dans ce binôme [15] [13], voire même étendent ces modélisations en multi-couche [14]. Le présent papier propose une formulation en multi-couche où chaque couche peut présenter un comportement viscoélastique distinct le tout en régime permanent. Elle ouvre la porte à des modélisations plus complexes du massif viscoélastique représentatif de la bande de roulement d'un pneumatique. Et permet notamment de modéliser à terme un gradient de dégradation ou d'échauffement dans la masse.

## 2 Méthode, un contact viscoélastique multi-couche

### 2.1 Problème de contact

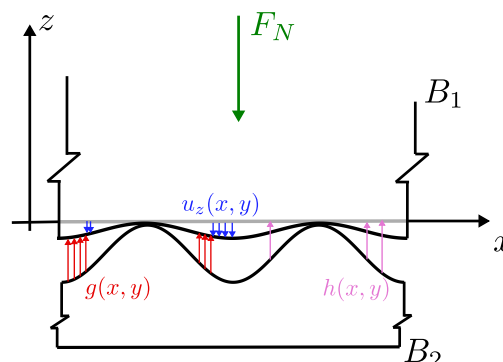


FIGURE 1 – Définition de l'espace ou "gap"  $g$  entre les corps  $B_1$  et  $B_2$ .

Considérons deux corps semi-infinis  $B_1$  et  $B_2$  mis en contact sous l'effet d'un effort  $F_N$ . Nous pouvons définir l'espace ou le "gap"  $g(x, y)$ , tel que :

$$g(x, y) = h(x, y) + u_z(x, y) + \delta_z \quad (1)$$

où  $h(x, y)$  est l'espacement initial entre les deux corps  $B_1$  et  $B_2$ ,  $\delta_z$  le déplacement de corps rigide et  $u_z(x, y)$  le déplacement élastique vertical, l'inconnue du problème.

Étant donné que les deux corps ne peuvent pas s'interpénétrer, le gap est toujours nul (lorsque les corps sont en contact) ou positif (dans le cas contraire). Les zones d'espacement nul correspondent à la zone de contact  $S_c$ . Dans les zones où les deux corps sont en contact, la pression interfaciale  $p(x, y)$  est positive et égale à zéro ailleurs. Les conditions complémentaires classiques du problème de contact s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \text{si } g(x, y) = 0, \text{ alors } p(x, y) > 0 \\ \text{si } g(x, y) > 0, \text{ alors } p(x, y) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Résoudre le problème consiste donc à respecter ces conditions de contact, et à déterminer analytiquement l'inconnue  $u_z(x, y)$ . Les conditions de contact seront respectées à l'aide d'un algorithme de gradient conjugué [12] [1] (CGM). Quant à la détermination du déplacement vertical  $u_z$ , la partie suivante propose un modèle pour résoudre un déplacement élastique bi-couche à l'aide de potentiels de Papkovic-Neuber [10].

## 2.2 Une formulation bi-couche, les potentiels de Papkovic-Neuber

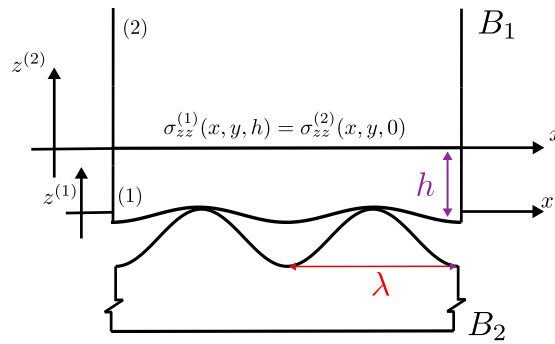


FIGURE 2 – Définition du modèle bi-couche, où le corps  $B_1$  est découpé en deux couches (1) et (2), chacune avec un comportement matériau distinct.

Lors d'un contact bi-couche, il faut respecter les conditions de bords suivantes pour imposer la continuité entre les couches (1) et (2) :

$$\begin{cases} \sigma_{zx}^{(1)}(x, y, h) = \sigma_{zx}^{(2)}(x, y, 0) \\ \sigma_{zy}^{(1)}(x, y, h) = \sigma_{zy}^{(2)}(x, y, 0) \\ \sigma_{zz}^{(1)}(x, y, h) = \sigma_{zz}^{(2)}(x, y, 0) \\ u_x^{(1)}(x, y, h) = u_x^{(2)}(x, y, 0) \\ u_y^{(1)}(x, y, h) = u_y^{(2)}(x, y, 0) \\ u_z^{(1)}(x, y, h) = u_z^{(2)}(x, y, 0) \end{cases} \quad (3)$$

$\sigma$  représente les contraintes et  $u$  les déplacements.

Pour résoudre ce problème, Malvern [10] pose les potentiels de Papkovich-Neuber  $\phi$  et  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ , comme des fonctions harmoniques, solutions de l'équation de Laplace, où  $\phi$  est la composante irrotationnelle du champ vectoriel  $u$ , et  $\psi$  sa composante incompressible.

Selon Malvern, pour des solides convexes, un de ses quatre potentiels peut être défini comme nul car le problème dispose de plus d'équations que d'inconnues. O'Sullivan [11] note que dans le cas d'un contact glissant selon  $x$ ,  $\psi_2$  est le potentiel qui s'annule le plus naturellement. Nous pouvons alors

exprimer les déplacements  $u_i^{(l)}$  d'un solide en contact bi-couche élastique à l'aide de sa décomposition de Hodge-Helmholtz [10] tel que :

$$2\mu u_i^{(l)} = \phi_{,i}^{(l)} + x^{(l)}\psi_{1,i}^{(l)} + z^{(l)}\psi_{3,i}^{(l)} - (3 - 4\nu^{(l)})\psi_i^{(l)} \quad (4)$$

où l'indice  $(l)$  désigne la couche considérée  $(l) = [(1), (2)]$ . Et les indices  $i$  et  $j$  allant de 1 à 3, correspondent respectivement aux directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ .  $\mu^{(l)}$  désigne le module de cisaillement,  $\nu^{(l)}$  le coefficient de Poisson  $x^{(l)}$  et  $z^{(l)}$  les coordonnées relatives à la couche  $(l)$ . La notation  $\phi_{,i}$  est employé pour noter les dérivées partielles, par exemple  $\phi_{,1} = \frac{\partial\phi}{\partial x}$  et,  $\phi_{,23} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}$ .

Pour résoudre le problème de contact et déterminer le gap  $g$  seul le déplacement vertical  $u_3^{(1)} = u_z(x, y)$  de la couche (1) à besoin d'être déterminé. Il est donc possible de simplifier l'expression de l'équation 4 comme :

$$2\mu^{(1)}u_3^{(1)} = \phi_{,3}^{(1)} + z^{(1)}\psi_{3,3}^{(1)} - (3 - 4\nu^{(1)})\psi_3^{(1)}. \quad (5)$$

$\phi$  et  $\psi$  sont alors les inconnues du problème. Dans le cas général, leur expression dans le domaine de Fourier s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}^{(1)} &= A^{(1)}e^{-\alpha z_1} + \underline{A}^{(1)}e^{\alpha z_1} \\ \tilde{\psi}_1^{(1)} &= B^{(1)}e^{-\alpha z_1} + \underline{B}^{(1)}e^{\alpha z_1} \\ \tilde{\psi}_3^{(1)} &= C^{(1)}e^{-\alpha z_1} + \underline{C}^{(1)}e^{\alpha z_1}, \end{cases} \quad (6)$$

où  $\tilde{\phi}(m, n) = \iint_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y)e^{-2\pi i(mx+ny)} dx dy$ , désigne la transformée de Fourier 2D spatiale. Dans le cas particulier d'un chargement simplement normal, sans effort de cisaillement, les coefficients  $B^{(1)}$  et  $\underline{B}^{(1)}$  s'annulent. Enfin les coefficients  $A^{(1)}$  et  $\underline{A}^{(1)}$  s'expriment tous deux en fonction de  $C^{(1)}$  et  $\underline{C}^{(1)}$ . A partir de ces simplifications, les équations 5 et 6 permettent d'écrire le déplacement vertical au contact ( $u_3^{(1)} = u_z$ ) dans le domaine de Fourier spatial ( $\tilde{\bullet}$ ) tel que :

$$\tilde{u}_3^{(1)}(m, n) = \frac{2(\nu^{(1)^2} - 1)}{E^{(1)}} (C^{(1)}(E_r, \tilde{p}(m, n)) + \underline{C}^{(1)}(E_r, \tilde{p}(m, n))) \quad (7)$$

avec  $E^{(1)}$  le module de Young de la couche (1) et  $\nu^{(1)}$  son coefficient de Poisson.  $E_r$  est le ratio des modules entre deux couches tel que  $E_r = \frac{E^{(1)}}{E^{(2)}}$ , et  $\tilde{p}$  la pression dans le domaine de Fourier 2D spatiale. Il est possible de déterminer  $C^{(1)}$  et  $\underline{C}^{(1)}$  dans le domaine de Fourier en respectant les conditions à l'interface posées dans le système 3. Leurs expressions ne sont pas écrites dans le présent papier mais peuvent se retrouver dans [11] ou dans [13].

Enfin il est possible de réécrire l'équation 7 comme le produit de convolution entre une fonction de Green  $\tilde{G}^{(1)}$  constitutive du problème de contact bi-couche élastique, construite à partir des coefficients  $C^{(1)}$  et  $\underline{C}^{(1)}$ , et la pression  $\tilde{p}$  :

$$\tilde{u}_3^{(1)} = \tilde{G}^{(1)}(E_r) \times \tilde{p}. \quad (8)$$

Ce produit de convolution est commun dans les méthodes semi-analytiques, et est défini directement dans le domaine de Fourier spatial. Il est donc possible de le résoudre par la méthode CC-FFT [5] afin de modéliser un contact bi-couche périodique.

Nous pouvons enfin exprimer toutes les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma^l$  tel que [11] :

$$\sigma_{ij}^{(l)} = \phi_{,ij}^{(l)} - 2\nu^{(l)}\psi_{3,3}^{(l)}\delta_{ij} - (1 - 2\nu^{(l)})(\psi_{i,j}^{(l)} + \psi_{j,i}^{(l)}) + z^{(l)}\psi_{3,ij}^{(l)} \quad (9)$$

Les contraintes dépendent de la pression ( $\sigma^{(l)} = \sigma^{(l)}(\tilde{p})$ ) mais elles peuvent être calculés en post-traitement une fois la pression connue - le maillage du volume n'est pas nécessaire à la résolution du problème.

## 2.3 Correspondance élastique/viscoélastique

Finalement, afin de résoudre un problème bi-couche viscoélastique linéaire et non plus simplement élastique linéaire, procédons à une correspondance élastique/viscoélastique à la manière de Christensen [4] ou Carbone [2]. Le déplacement bi-couche viscoélastique en régime permanent se définit à partir de l'équation 7 comme :

$$\tilde{u}_3^{(1)}(m, n, \omega) = \frac{2(\nu^{(1)^2} - 1)}{\bar{E}^{(1)}(\omega)} \left( C^{*(1)}(E_r(\omega), \tilde{p}(m, n, \omega)) + \underline{C}^{*(1)}(E_r(\omega), \tilde{p}(m, n, \omega)) \right) \quad (10)$$

où  $\bar{\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$  est la transformée de Fourier temporelle.  $C^{*(1)}$  et  $\underline{C}^{*(1)}$  sont les coefficients viscoélastique associés aux potentiels de Papkovic-Neuber.  $\bar{E}(\omega)$  est le module complexe viscoélastique dans le domaine de Fourier temporel ( $\bar{\bullet}$ ) associé à un modèle rhéologique de Zener tel que :

$$\frac{1}{\bar{E}(\omega)} = \left[ \frac{1}{E_\infty} + \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_\infty} \right) \frac{1}{1 + i\omega\tau} d\tau \right], \quad (11)$$

$E_0$  (respectivement.  $E_\infty$ ) est le module d'élasticité à fréquence nulle (resp. haute fréquence) au temps  $t = 0$  (resp.  $t = +\infty$ ) du matériau viscoélastique,  $\tau$  est le temps de relaxation du matériau viscoélastique.

De plus dans l'équation 10,

$$E_r(\omega) = \frac{\bar{E}^{(1)}(\omega)}{\bar{E}^{(2)}(\omega)}. \quad (12)$$

Il est une nouvelle fois possible de décomposer cette formulation comme le produit de convolution entre une fonction de Green et la pression à la manière de Zhang et al. [15] ou Durand et al. [5] pour des résolutions en régime permanent :

$$\tilde{u}_3^{(1)}(\omega) = \tilde{G}^{*(1)}(E_r(\omega), \omega) \times \tilde{p}(\omega) \quad (13)$$

Où  $\tilde{G}^{*(1)}$  représente la fonction de Green constitutive du problème de contact bi-couche viscoélastique dans le domaine de Fourier spatial 2D ( $\tilde{\bullet}$ ) et dans le domaine de Fourier temporel ( $\bar{\bullet}$ ).

Cette formulation est finalement peu coûteuse en temps de calcul dans la mesure où il est possible d'évaluer directement le comportement viscoélastique en régime permanent et donc en un seul pas de temps [15] [5].

Cette formulation en bi-couche viscoélastique peut aisément se généraliser en formulation à  $N$  couches en modifiant la définition des coefficients  $C^{*(1)}$  et  $\underline{C}^{*(1)}$  [14]. Chaque couche ( $l$ ) dispose de son comportement viscoélastique singulier défini par un  $\bar{E}^{(l)}(\omega)$  associé. Ici relatif à un modèle de Zener, mais qui pourrait être défini par n'importe quel modèle rhéologique linéaire.

## 3 Résultat, un contact viscoélastique multi-couche

La figure 3 représente une simulation effectuée à l'aide du développement précédemment proposé. Nous simulons un contact glissant entre un massif viscoélastique découpé en 4 couches et une surface rigide périodique, qui ici est un bi-sinus de longueur d'onde caractéristique  $\lambda$ , mais qui pourrait être n'importe quelle surface rugueuse représentative d'un sol routier. Cette surface rigide glisse de gauche à droite et excite le massif viscoélastique sur son passage. Dans cette étude, le massif comporte 4 couches dont les propriétés sont données dans la Table 1.

Couche	(1)	(2)	(3)	(4)
$E_\infty/E_0$	5	10	15	20
$\tau$ (s)	1	1	1	1

TABLE 1 – Tableau des paramètres de couches

Le module à basse fréquence  $E_0$  est identique pour toutes les couches alors que le ratio  $E_\infty/E_0$  augmente d'une couche à l'autre en s'éloignant du contact. Plus ce ratio est élevé plus la dissipation est importante. En effet, si l'on définit  $E''$  le module de dissipation d'un matériau viscoélastique, son expression dans le cas d'un modèle de Zener est :

$$E''(\omega) = E_\infty \left( \frac{\tau\omega}{1 + (\tau\omega)^2} \right). \quad (14)$$

Ainsi dans notre cas,  $E''_{(1)} < E''_{(2)} < E''_{(3)} < E''_{(4)}$ . La couche (4) est la plus dissipative.

La partie haute de la figure 3 représente le champ de pression. Ce dernier présente une asymétrie entre l'avant et l'arrière du contact, la partie droite de ce dernier est plus chargée que la partie gauche. En effet, à cause de la dissipation, un retard se crée entre l'avant et l'arrière du contact. La partie basse de la figure 3 représente, une coupe dans la section  $xz$  du déplacement  $u_z(x, y)$ . Il est superposé à la géométrie de la surface rigide bi-sinusoidale. L'ouverture d'un bord de fuite est observable sur la partie gauche du déplacement  $u_z$  qui n'est pas présent à droite du contact, et qui caractérise, une fois de plus l'asymétrie issue d'un contact viscoélastique glissant.

Par ailleurs, la périodicité des simulations induit un changement de forme du champ de pression du bi-sinus considéré. En effet, chaque proche voisin périodique (visible dans les coins du champ de pression) participe à l'encapsulation d'un bi-sinus central : ils l'empêchent de se relaxer normalement ce qui provoque une forme légèrement carrée du champ de pression - caractéristique des modélisations périodiques.

Enfin, la partie centrale de la figure 3 représente une coupe dans la section  $xz$  de la contrainte équivalente de von Mises. Cette représentation nous permet d'observer l'influence des couches dans le massif. Pour aider à la visualisation, la séparation des couches est soulignée par des lignes blanches. Le champ de contraintes, à la manière du champ de pression, est asymétrique. Entre la couche (1) et (2) nous pouvons observer une discontinuité claire de la zone la plus élevée en jaune. Cette zone jaune est plus grande et plus étalée dans la couche (2) que dans la couche (1). C'est une conséquence d'un résultat classique en mécanique du contact : le maximum de la contrainte de von Mises se trouve toujours en sous-couche et pas au contact, en l'absence de frottement de Coulomb. C'est aussi une conséquence de la plus grande dissipation viscoélastique du matériau dans la couche (2), devant celui de la couche (1) ( $E''_{(2)} > E''_{(1)}$ ), qui explique l'asymétrie plus importante dans cette couche (2). Finalement, l'hypothèse de périodicité est aussi visible au niveau de  $z/\lambda = 0.2$  où le champ de contrainte qui sort de la fenêtre par la gauche et le même que celui qui sort par la droite.

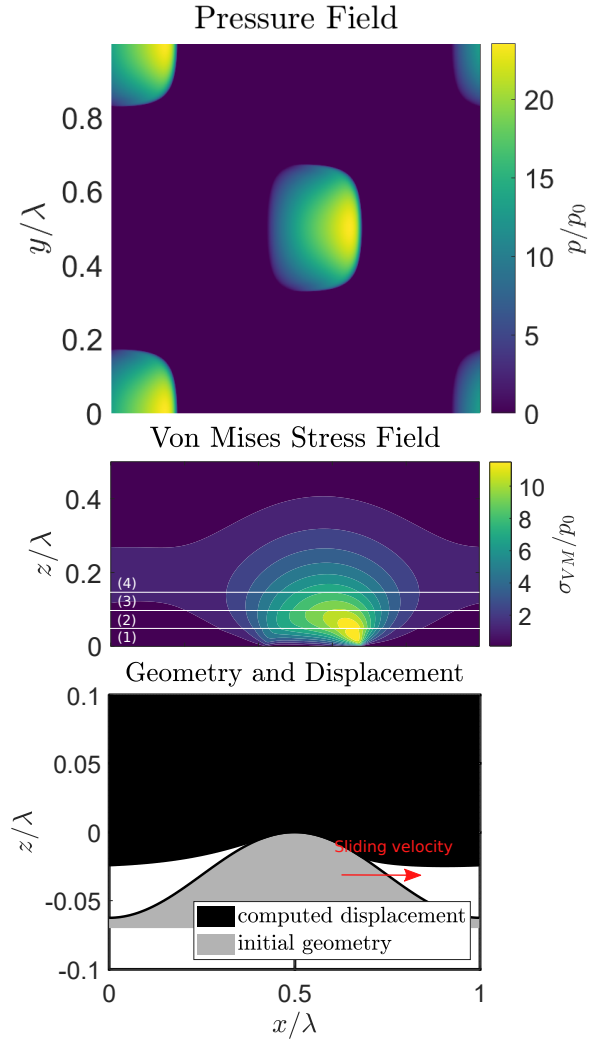


FIGURE 3 – Résultat de simulation pour un bi-sinus rigide glissant sur un massif découpé en 4 couches viscoélastiques différentes. En haut, le champ de pression est tracé dans le plan  $xy$ , la figure du milieu représente une coupe dans la section  $xz$  de la contrainte de von Mises. Enfin, la figure du bas représente le déplacement réel calculé superposé sur la géométrie du bi-sinus rigide. Les valeurs de pression et de contrainte sont normalisées par  $p_0$  la pression moyen à la surface  $p_0 = \frac{F_N}{\lambda^2}$ .

## 4 Conclusion

Le présent travail propose un modèle de contact semi-analytique [9] [6] peu coûteux en temps de calcul qui permet de simuler un contact périodique viscoélastique linéaire multi-couche glissant en régime permanent. Cette modélisation est possible grâce à une formulation reposant sur les potentiels de Papkovic-Neuber [10] [11], une minimisation du gap par gradient conjugué (CGM) [12] [1], une correspondance élastique/viscoélastique effectuée dans le domaine de Fourier [4] [2], et la détermination du déplacement périodique par CC-FFT [3] [5].

Grâce à ce modèle, il est possible d'effectuer des calculs de contact viscoélastiques multi-couche peu étudiés jusqu'à présent dans la littérature [14]. Ce nouvel outil pourrait à terme permettre d'effectuer des modélisations plus complexes qu'actuellement. Il pourrait par exemple permettre de prendre en compte l'échauffement d'un matériau viscoélastique qui frotte sur une surface rugueuse, influant ainsi sur le comportement local du matériau dans la profondeur.

## Références

- [1] J. Allwood. Survey and Performance Assessment of Solution Methods for Elastic Rough Contact Problems. *Journal of Tribology*, 127(1) :10–23, January 2005.
- [2] G. Carbone and C. Putignano. A novel methodology to predict sliding and rolling friction of viscoelastic materials : Theory and experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61(8) :1822–1834, August 2013.
- [3] W. W. Chen, S. Liu, and Q. J. Wang. Fast Fourier Transform Based Numerical Methods for Elasto-Plastic Contacts of Nominally Flat Surfaces. *Journal of Applied Mechanics*, 75(1) :011022, January 2008.
- [4] R. M. Christensen. *Theory of viscoelasticity : an introduction*. Academic Press, New York, 2nd edition, 1982.
- [5] N. Durand, A. Platzer, A. Duval, D. Nélias, and T. Chaise. Coupled effect of viscoelasticity and roughness scales on hysteretic friction in sliding periodic contact. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 205 :106261, December 2025.
- [6] C. Jacq, D. Nélias, G. Lormand, and D. Girodin. Development of a Three-Dimensional Semi-Analytical Elastic-Plastic Contact Code. *Journal of Tribology*, 124(4) :653–667, October 2002.
- [7] Y. Ju and T. N. Farris. Spectral Analysis of Two-Dimensional Contact Problems. *Journal of Tribology*, 118(2) :320–328, April 1996.
- [8] K. E. Koumi, D. Nélias, T. Chaise, and A. Duval. Modeling of the contact between a rigid indenter and a heterogeneous viscoelastic material. *Mechanics of Materials*, 77 :28–42, October 2014.
- [9] S. Liu, Q. Wang, and G. Liu. A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analyses. *Wear*, 243(1-2) :101–111, August 2000.
- [10] L. Malvern, E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. 1962.
- [11] T. C. O'Sullivan and R. B. King. Sliding Contact Stress Field Due to a Spherical Indenter on a Layered Elastic Half-Space. *Journal of Tribology*, 110(2) :235–240, April 1988.
- [12] I.A. Polonsky and L.M. Keer. A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques. *Wear*, 231(2) :206–219, July 1999.
- [13] E. R. Wallace, T. Chaise, and D. Nélias. Three-dimensional rolling/sliding contact on a viscoelastic layered half-space. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 143 :104067, October 2020.

- [14] E. R. Wallace, T. Chaise, and D. Nelias. Rolling contact on a viscoelastic multi-layered half-space. *International Journal of Solids and Structures*, 239-240 :111388, March 2022.
- [15] X. Zhang, Q. J. Wang, and T. He. Transient and steady-state viscoelastic contact responses of layer-substrate systems with interfacial imperfections. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 145 :104170, December 2020.