

Résidus pondérés en temps-fréquence pour les systèmes vibrants avec frottement de Stribeck

Christophe Pierre¹, Mathias Legrand², Arash Hashemi³, Jonathan Hood⁴

¹ Department of Mechanical Engineering, Stevens Institute of Technology, USA, cpierre@stevens.edu

² Nantes Université, Ecole Centrale Nantes, CNRS, GeM, UMR 6183, France, mathias.legrand@ec-nantes.fr

³ Department of Mechanical Engineering, Stevens Institute of Technology, USA, ahashemi1@stevens.edu

⁴ Department of Mechanical Engineering, Stevens Institute of Technology, USA, jhood@stevens.edu

Résumé — Une formulation par résidus pondérés en temps-fréquence est proposée pour des oscillateurs sujets à du frottement sec décrit par la loi de Stribeck. Exprimée sous la forme d'une équation différentielle algébrique non-régulière et intégrée dans un cadre d'équilibrage harmonique, cette loi permet de généraliser une formulation introduite précédemment pour le frottement de Coulomb. Le calcul précis de réponses périodiques avec des transitions collement-glisement détaillées est rendu possible sans recours à une technique de régularisation ou d'hypothèse de masse nulle à l'interface de contact.

Mots clés — Frottement de Stribeck, équation différentielle algébrique non-régulière, solutions périodiques, vibrations non-linéaires

1 Introduction

Le frottement sec est une non-linéarité omniprésente dans les structures en ingénierie, telles que les arbres de turbomachine [9]. La prédiction de la réponse dynamique de tels systèmes est délicate car le frottement sec est classiquement modélisé par la loi de Coulomb reliant force et vitesse de manière non lisse et multivaluée [10]. Ce modèle fondamental s'écrit comme une inclusion différentielle dans laquelle les parties positives et négatives de la force de frottement et de la vitesse relative sont des variables complémentaires. En phase de glissement (vitesse non nulle), la force de frottement est constante, tandis qu'en phase de collement (vitesse nulle), elle devient une relation multivaluée.

Des modèles plus sophistiqués sont aussi employés car ils rendent compte avec plus de fidélité du comportement de frottement. Parmi eux, le modèle de Stribeck [22] et le cas limite de stiction. Le premier associe une force de frottement statique à une force dynamique dépendant de la vitesse lors du glissement. Une variante inclut un terme visqueux. On peut également citer le modèle de Dahl, qui rend compte d'effets de micro-glisement (par exemple le glissement partiel entre surfaces en contact) [6, 23], et le modèle LuGre [7] incorporant des effets de mémoire tels que l'hystérésis et le glissement partiel.

Les premiers travaux sur la réponse vibratoire de systèmes avec frottement remontent à près d'un siècle [8]. Dans le domaine temporel, la détection précise des transitions entre phases de glissement et de collement requiert des schémas sophistiqués [2]. Contact unilatéral et frottement entre corps déformables sont couramment traités par des méthodes de type Lagrangien augmenté [15] au sein d'une discrétisation par éléments finis. Cependant, les approches temporelles nécessitent des simulations coûteuses en temps de calcul, et les traitements dans le domaine fréquentiel, comme la méthode d'équilibrage harmonique [14], sont mieux adaptés aux problèmes de vibration. Étant donné la nature non lisse de la loi de Coulomb, les implémentations par équilibrage harmonique exigent généralement l'évaluation en temps réel des forces non linéaires à chaque itération. Les méthodes mixtes fréquence-temps, telles que la méthode alternée fréquence/temps [5] ou la méthode dynamique Lagrangienne fréquence/temps [25], permettent de traiter plusieurs points de frottement et un grand nombre d'harmoniques, mais peuvent souffrir de problèmes de convergence ou d'une complexité d'implémentation. Des techniques de régularisation sont aussi fréquemment employées pour contourner la nature multivaluée de la loi de Coulomb, en utilisant des approximations régularisées et/ou monovaluées [16, 12, 4].

Dans le domaine des méthodes numériques pour la mécanique du contact de systèmes non lisses [24, 2, 1], une stratégie alternative consiste à convertir les égalités, inégalités et conditions de complémentarité

en un ensemble équivalent d'égalités non lisses [3, 26]. En vibration forcée périodique, cette approche a été appliquée initialement à une barre unidimensionnelle avec contact de Signorini [21]. Sur cette base, une formulation par résidus pondérés basée sur une égalité (E-WR) a été récemment proposée pour le frottement de Coulomb (en fait le frottement de Tresca parce que la force normale est supposée connue) en un point dans les cadres unidimensionnel [17] et bidimensionnel [11]. Cette méthode s'est avérée compacte et très précise pour restituer la loi de Coulomb et les réponses vibratoires complexes avec transitions collement-glissement.

Dans cet article, la formulation E-WR est étendue à la loi de frottement de Stribeck, plus sophistiquée, qui admet une force de frottement statique maximale et une force dynamique dépendant de la vitesse. La loi de Stribeck est écrite sous forme d'une égalité non lisse, de sorte que l'ensemble de frottement de Stribeck s'identifie à l'ensemble de niveau zéro d'une fonction non lisse liant la force de frottement et la vitesse. Les équations du mouvement et la condition de frottement sont satisfaites au sens faible via une formulation par résidus pondérés en temps, mise en œuvre ici par la méthode d'équilibrage harmonique. Un système à deux degrés de liberté avec interface de frottement unidimensionnelle est étudié. Le système non linéaire est résolu numériquement à l'aide d'un solveur adapté de type région de confiance. La formulation n'exige ni passage au domaine temporel pour évaluer les forces non linéaires au sens de l'AFT, ni régularisation/ pénalisation de la loi de frottement, ni hypothèse de masse nulle à l'interface.

2 Formulation par égalité pour la loi de Stribeck

Le modèle de Stribeck [22] est rappelé et schématisé sur la figure 1 pour le cas unidimensionnel. La loi de Stribeck se caractérise par des transitions entre collement et glissement à une force statique F_s supérieure à la force dynamique de Coulomb μN , où μ est le coefficient de frottement dynamique et N la réaction normale, supposée connue et constante dans ce qui suit. La composante dynamique de la force de

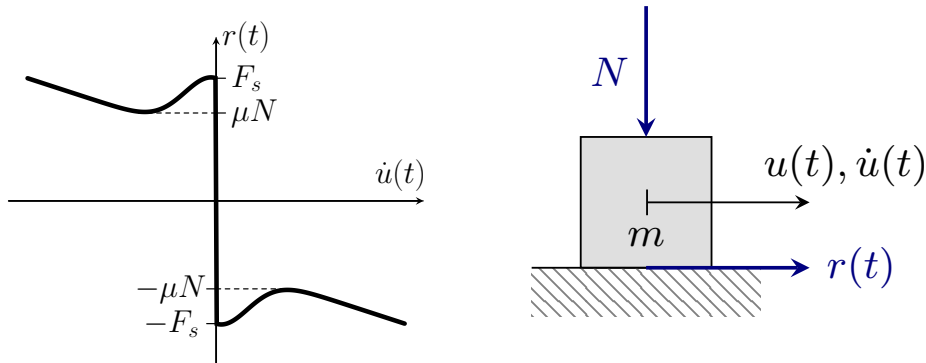


FIGURE 1 – Modèle de Stribeck et conditions de frottement associées.

frottement dépend de la vitesse relative de glissement de l'interface et est souvent représentée par une décroissance exponentielle. Le modèle peut être enrichi d'un terme de frottement visqueux. Dans le cas de glissement $\dot{u} \neq 0$, la force dynamique s'écrit par exemple :

$$S(\dot{u}) = (-\mu N + (\mu N - F_s)e^{-(|\dot{u}|/v)^\delta}) \text{sign} \dot{u} - c\dot{u} \quad \dot{u} \neq 0, \quad (1)$$

où v , δ et c sont respectivement la vitesse caractéristique de Stribeck, un paramètre lié à la géométrie de contact et le coefficient de frottement visqueux. Ces paramètres s'identifient généralement expérimentalement et varient selon l'application (robots industriels [19], systèmes rotors [27], systèmes d'asservissement [28], etc.). Le paramètre géométrique $\delta = 2$ est considéré [20]. Le paramètre v contrôle la rapidité de décroissance de la force lorsque la vitesse augmente. Selon les matériaux en contact, la force statique F_s est typiquement entre 20 % et 100 % supérieure à la force dynamique asymptotique μN . On remarque que lorsque $F_s \rightarrow \mu N$, la loi de Stribeck tend vers la loi de Coulomb, tandis que lorsque $v \rightarrow 0$ le modèle tend vers la stiction, affichant une discontinuité de la force au passage collement-glissement [18]. Ainsi, la loi de Stribeck s'écrit

$$\begin{cases} \dot{u} = 0 & \implies |r| \leq F_s \\ \dot{u} \neq 0 & \implies r = S(\dot{u}), \end{cases} \quad (2)$$

de sorte que l'ensemble admissible (\dot{u}, r) pour les états de collement et de glissement est représenté sur la figure 1. La relation $r(\dot{u})$ est multivaluée en $\dot{u} = 0$.

La fonction de niveau utilisée pour la loi de Coulomb [26, 13] se généralise naturellement à la fonction $S(\dot{u})$ de Stribeck, conduisant à une condition d'égalité non lisse équivalente à la loi de Stribeck. On écrit d'abord les deux branches de $S(\dot{u})$, correspondant aux limites $\dot{u} \rightarrow 0^+$ et $\dot{u} \rightarrow 0^-$:

$$\begin{cases} S_+(\dot{u}) = (-\mu N + (\mu N - F_s)e^{-\left(\frac{|\dot{u}|}{v}\right)^\delta}) - c\dot{u}, & \dot{u} > 0 \\ S_-(\dot{u}) = -(-\mu N + (\mu N - F_s)e^{-\left(\frac{|\dot{u}|}{v}\right)^\delta}) - c\dot{u} & \dot{u} < 0, \end{cases} \quad (3)$$

remplaçant ainsi $-\mu N$ (Coulomb) par S_+ pour $\dot{u} \geq 0$ et μN par S_- pour $\dot{u} \leq 0$. On obtient la fonction de niveau suivante pour la loi de Stribeck :

$$\Psi_r(\dot{u}, r) = \dot{u} + \min(0, \rho(r - S_+(\dot{u})) - \dot{u}) + \max(0, \rho(r - S_-(\dot{u})) - \dot{u}), \quad (4)$$

où $\rho > 0$ est un paramètre d'échelle dimensionnel, ici égal à 1. Construire l'ensemble de niveau zéro $\Psi_0 \equiv \{(\dot{u}, r) | \Psi(\dot{u}, r) = 0\}$, en dépliant les opérateurs min et max, conduit à :

$$\Psi(\dot{u}, r) = 0 \implies \begin{cases} r = S_- \text{ et } \dot{u} \leq 0 & \text{(glissement négatif)} \\ \text{ou } \dot{u} = 0 \text{ et } -F_s \leq r \leq F_s & \text{(collement)} \\ \text{ou } r = S_+ \text{ et } \dot{u} \geq 0 & \text{(glissement positif).} \end{cases} \quad (5)$$

Ainsi, Ψ_0 décrit exactement l'ensemble de Stribeck défini par l'équation (2) et illustré en figure 1, et

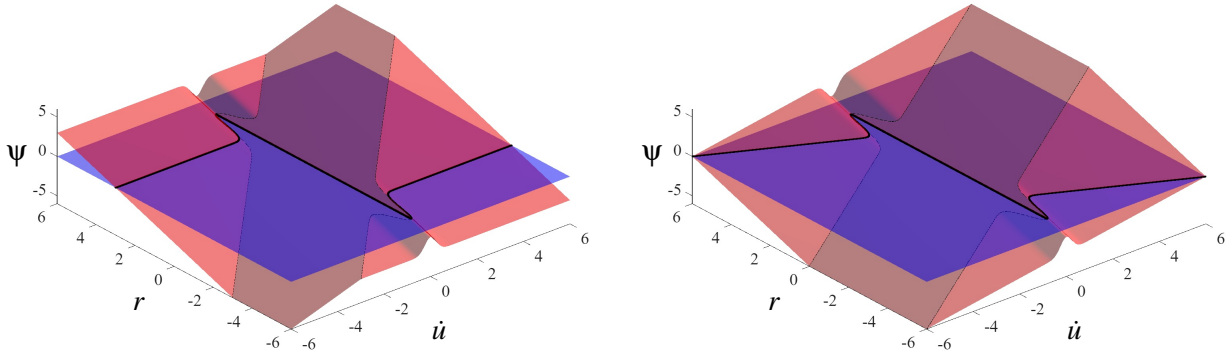


FIGURE 2 – Descriptions implicites exactes de la loi de Stribeck unidimensionnelle : $\Psi(\dot{u}, r)$ définie en Equation (4) avec $\rho = 1$. L'intersection de la surface $\Psi(\dot{u}, r)$ [bleu] avec le plan niveau zéro [orange] donne l'ensemble Ψ_0 [ligne noire], pour $\delta = 2$, $v = 0.35$, $\mu N = 3$ et $F_s = 5$. Cas sans frottement visqueux $c = 0$ [gauche] et avec frottement visqueux $c = 0.5$ [droite].

l'égalité non lisse $\dot{u} + \min(0, \rho(r - S_+) - \dot{u}) + \max(0, \rho(r - S_-) - \dot{u}) = 0$ est une autre écriture équivalente de la loi de Stribeck. Les surfaces $\Psi(\dot{u}, r)$ et leur intersection Ψ_0 sont représentées en figure 2.

La figure 2 illustre comment ces surfaces et leur intersection avec le plan niveau zéro évoluent lorsque l'on inclut un terme visqueux. En outre, la figure 3 montre que la fonction de niveau et son ensemble associé tendent vers ceux du modèle de Coulomb lorsque F_s s'approche de μN , et vers ceux du modèle de stiction lorsque la vitesse v devient petite. Dans le cas proche de la stiction, on observe que les plis des surfaces pour de faibles vitesses positives et négatives tendent chacun vers un segment.

3 Formulation par résidus pondérés pour les solutions périodiques

Avec la description par égalité de la loi de Stribeck ci-dessus, les solutions périodiques sont recherchées au moyen d'une formulation faible et d'une projection Ritz–Galerkin [17]. On considère le système à deux degrés de liberté illustré en figure 4. Les équations du mouvement, couplées à la condition sur le DOF-amortisseur correspondant à l'ensemble niveau-zéro défini en (4), s'écrivent sous la forme

$$\Psi_1(x_1, x_2, r) = m_1 \ddot{x}_1 + (d_1 + d_2) \dot{x}_1 - d_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 - f_1 = 0 \quad (6a)$$

$$\Psi_2(x_1, x_2, r) = m_2 \ddot{x}_2 + d_2 \dot{x}_2 - d_2 \dot{x}_1 + k_2 x_2 - k_2 x_1 - f_2 - r = 0 \quad (6b)$$

$$\Psi_r(\dot{x}_2, r) = \dot{x}_2 + \min(0, \rho(r - S_+(\dot{x}_2)) - \dot{x}_2) + \max(0, \rho(r - S_-(\dot{x}_2)) - \dot{x}_2) = 0, \quad (6c)$$

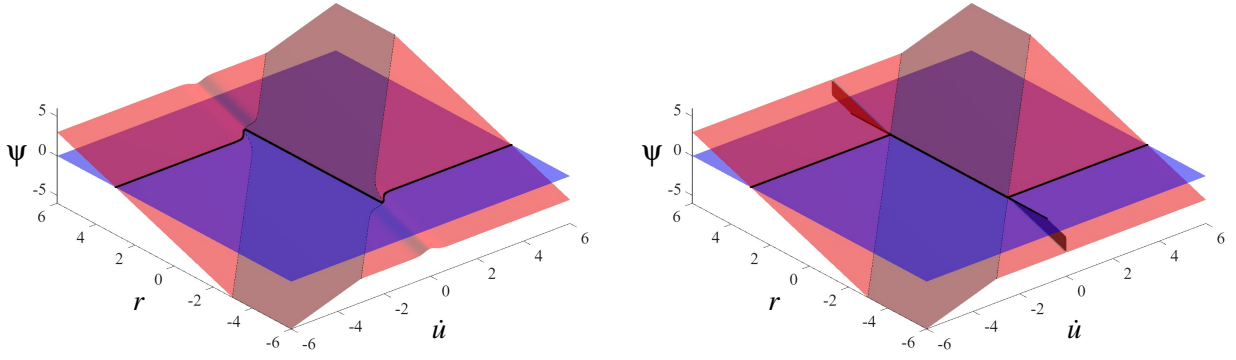


FIGURE 3 – Fonctions de niveau Striebeck et ensembles solution pour des cas proches de la loi de Coulomb ($F_s = 3.5$) [gauche] et proches de la stiction pour petite vitesse $v = 0.01$ [droite]. Les autres paramètres sont identiques à ceux de la figure 2.

qui constitue une équation différentielle algébrique vectorielle non lisse [18] selon les inconnues $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $r(t)$.

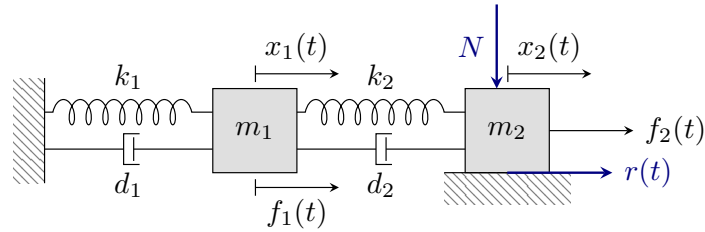


FIGURE 4 – Système masse-ressort-amortisseur à deux degrés de liberté avec frottement de Striebeck sur le second DOF.

Sous excitation harmonique de fréquence ω , on recherche des solutions de période $T = 2\pi/\omega$ au sens des résidus pondérés. Toutes les inconnues sont discrétisées en les développant sur une base tronquée de fonctions T -périodiques à N_ϕ éléments, $\{\phi_k(t)\}_{k=1,\dots,N_\phi}$. Ici, on choisit des fonctions de Fourier; en raison de la symétrie de la non-linéarité, il n'y a pas de contributions des harmoniques pairs ni du terme constant. Ainsi, on écrit pour $x_1(t)$:

$$x_1(t) \approx x_{1h}(t) = \sum_{k=1,3,\dots}^{N_\phi} x_k \cos k\omega t + x_{k+1} \sin k\omega t \quad (7)$$

et x_2 et r sont développées de façon similaire, de sorte que x_{1h} , x_{2h} et r_h sont des approximations en séries à N_ϕ termes. Les $3N_\phi$ coefficients x_{1k} , x_{2k} et r_k sont les inconnues du problème discrétisé. L'excitation externe est prise $f_1(t) = f_1 \cos \omega t$ et $f_2(t) = 0$. On définit les vecteurs de coefficients de Fourier $\mathbf{x}_1 = [x_{11}, \dots, x_{1N_\phi}]^\top$, $\mathbf{x}_2 = [x_{21}, \dots, x_{2N_\phi}]^\top$, $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_{N_\phi}]^\top$, et $\mathbf{f}_1 = [f_1, 0, \dots, 0]^\top$.

Les développements en (7) et leurs dérivées éventuelles sont substitués dans les équations du mouvement et dans la condition de Striebeck non lisse, puis les résidus sont rendus orthogonaux à l'ensemble des fonctions de base. Par exemple, pour l'identité non lisse, cette projection de type Ritz–Galerkin devient

$$\int_0^T \phi_k(t) \Psi_r(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t)) dt = 0 \quad k = 1, \dots, N_\phi, \quad (8)$$

avec des équations analogues pour les résidus Ψ_1 et Ψ_2 , conduisant à un système non linéaire de $3N_\phi$ équations algébriques en $3N_\phi$ inconnues. Les équations Ψ_1 et Ψ_2 gouvernent la dynamique des masses 1 et 2 et sont linéaires en x_{1h} , x_{2h} et r_h , tandis que la non-linéarité est confinée à l'équation Ψ_r , non lisse en \dot{x}_{2h} et r_h .

À partir de (8), on obtient le système couplé suivant :

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 - \mathbf{f}_1 = \mathbf{0} \quad (9a)$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 - \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (9b)$$

$$\mathbf{g}_r(\mathbf{x}_2, \mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (9c)$$

avec $\mathbf{A}_{11} = (k_1 + k_2)\mathbf{I} + (d_1 + d_2)\mathbf{D} - m_1\boldsymbol{\Omega}^2$, $\mathbf{A}_{12} = -k_2\mathbf{I} - d_2\mathbf{D} = \mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{A}_{22} = k_2\mathbf{I} + d_2\mathbf{D} - m_2\boldsymbol{\Omega}^2$, \mathbf{I} étant la matrice identité de taille appropriée, et les matrices diagonales par blocs

$$\mathbf{D} = \mathbf{Bdiag}_{k=1,3,\dots,N_\phi} \begin{bmatrix} 0 & k\omega \\ -k\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{Bdiag}_{k=1,3,\dots,N_\phi} \begin{bmatrix} k\omega & 0 \\ 0 & k\omega \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Les équations (9a) et (9b) peuvent être résolues par substitution, en éliminant \mathbf{x}_1 et en exprimant \mathbf{x}_2 comme une relation affine en \mathbf{r} , ce qui fournit un système réduit de N_ϕ équations non lisses en la seule inconnue \mathbf{r} :

$$\mathbf{g}_r(\mathbf{x}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}_2(\mathbf{r}) = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1}(\mathbf{r} + \mathbf{f}_2 - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{f}_1). \quad (11)$$

Ce système non linéaire est résolu numériquement par la procédure Dogleg de région de confiance via la commande `fsolve` de MATLAB[®], avec une tolérance de 10^{-6} . Les intégrales comportant des termes non lisses dans l'équation (8) sont évaluées numériquement à l'aide de la transformée de Fourier rapide (commande `fft` de MATLAB[®]). La précision de la solution approchée dépend uniquement du choix de la famille de fonctions de base ϕ_k et du nombre N_ϕ .

4 Résultats et discussion

On considère le système de la figure 4 pour $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_2 = 1$, $\mu = 0.9$, $d_1 = d_2 = 0.02$, et $f_1 = 20\cos\omega t$, $f_2 = 0$. Des réponses temporelles représentatives sont présentées en figures 5 et 6. Sont montrées les séries temporelles, sur une période, du déplacement et de la vitesse des deux DOF ainsi que de la force de frottement. La force de frottement est également tracée en fonction de la vitesse du DOF amortisseur afin de vérifier que la loi de Stribeck (figure 1) est correctement reproduite. Un grand nombre d'harmoniques de Fourier, $N_\phi = 1200$, est utilisé. Si beaucoup moins d'harmoniques (60) suffisent pour les déplacements et vitesses, l'évaluation précise des séries temporelles complexes de la force de frottement nécessite un nombre élevé d'harmoniques, en particulier près des transitions abruptes collement–glissement, qui peuvent être discontinues en temps. Dans tous les cas étudiés, l'algorithme non linéaire a convergé en moins de 10 itérations pour $N_\phi < 500$ et en 20 à 30 itérations pour des nombres d'harmoniques plus élevés.

La figure 5 montre la réponse au voisinage de la résonance primaire $\omega = 0.618$ pour une charge normale $N = 8$. Les deux DOF (la première masse et l'amortisseur) présentent une oscillation quasi-harmonique : l'amortisseur effectue une phase de glissement positive puis une phase négative de durée égale sur la période, sa vitesse s'annulant instantanément au changement de sens. L'historique temporel de la force $r(t)$ confirme un mouvement de glissement pur, la force restant pratiquement constante durant chaque phase. Des discontinuités prononcées apparaissent aux instants de transition entre les mouvements avant et arrière. Par exemple, lorsque $t \rightarrow 2.54$, la force décroît exponentiellement de la valeur dynamique $r = -7.2$ vers la valeur statique $r = -12$, puis subit une discontinuité vers $r = 12$, après quoi elle décroît pour se stabiliser à $r = 7.2$. Un passage similaire intervient en $t = 7.62$. Dans ce cas résonnant en glissement, les composantes en onde carrée et en pics de la force de frottement — y compris les discontinuités — sont bien capturées. Le tracé de la force en fonction de la vitesse de l'amortisseur montre une reproduction fidèle de la loi de Stribeck. Du fait de la grande amplitude de la vitesse de l'amortisseur en résonance, la variation de la force près de la discontinuité est très aiguë, gouvernée par le rapport $|\dot{x}_2|/v$ dans l'équation (1). Par conséquent, la loi de Stribeck peut ressembler au modèle de stiction lorsque v est petit. Enfin, des oscillations de Gibbs subsistent près des discontinuités mais elles sont peu visibles sur la figure 5 en raison du nombre élevé d'harmoniques ($N_\phi = 1200$).

La figure 6 présente une réponse plus riche, proche d'une résonance super-harmonique [17], comportant deux phases de collement et deux phases de glissement. On note la valeur constante de x_2 et la vitesse nulle \dot{x}_2 durant les phases de collement, et la force de frottement presque constante $|r| = 7.2$ pendant la plupart des phases de glissement. L'historique temporel de la force montre des transitions rapides mais continues collement→glissement en $t = 4.9$ et $t = 15.7$, tandis que les transitions glissement à collement en $t = 0.6$ et $t = 11.3$ présentent des discontinuités : par exemple, en $t \rightarrow 11.3$ la force croît rapidement de 7.2 (valeur dynamique) à 12 (valeur statique), subit ensuite une discontinuité vers ≈ -4 puis décroît de façon continue. Le phénomène de Gibbs entraîne, malgré $N_\phi = 1200$, une « sous-estimation » polluée

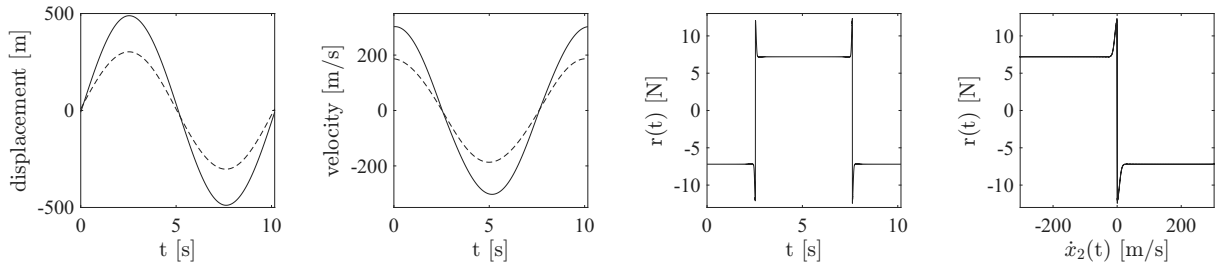


FIGURE 5 – Réponse en résonance primaire $\omega = 0.618$, pour $N = 8$, $N_\phi = 1200$, et paramètres de Stribeck $F_s = 12$, $\nu = 10$, $c = 0$, $\delta = 2$. DOF amortisseur [trait plein] et premier DOF [trait pointillé].

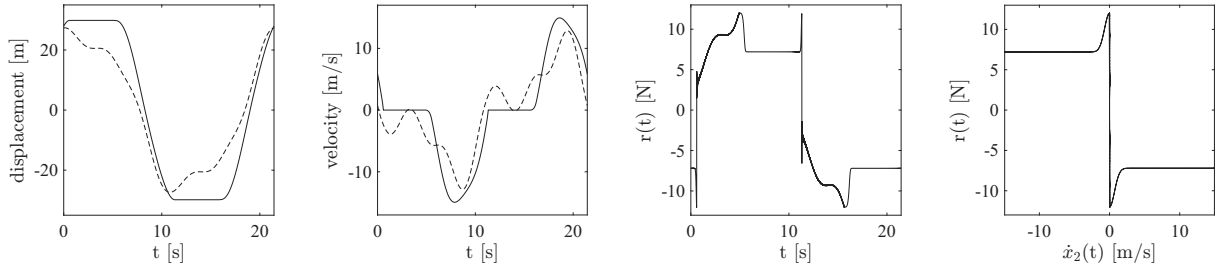


FIGURE 6 – Réponse proche d’une résonance super-harmonique, pour $\omega = 0.293$, $N = 8$, et $N_\phi = 1200$. Paramètres de Stribeck comme en figure 5 sauf $\nu = 1$. Légende identique à la figure 5.

de la force (valeur estimée ≈ -6.6 au lieu de ≈ -4) mais n’affecte pas la convergence du solveur. Toutes ces transitions concordent avec la loi de Stribeck, comme le confirme le tracé de la force en fonction de la vitesse de l’amortisseur.

Enfin, pour situer le modèle de Stribeck par rapport à celui de Coulomb, la figure 7 montre la réponse du système pour un amortissement de Coulomb, c’est-à-dire $F_s = \mu N$, dans le même cas super-résonnant que la figure 6. Plusieurs différences majeures apparaissent. Premièrement, l’historique temporel de la force de

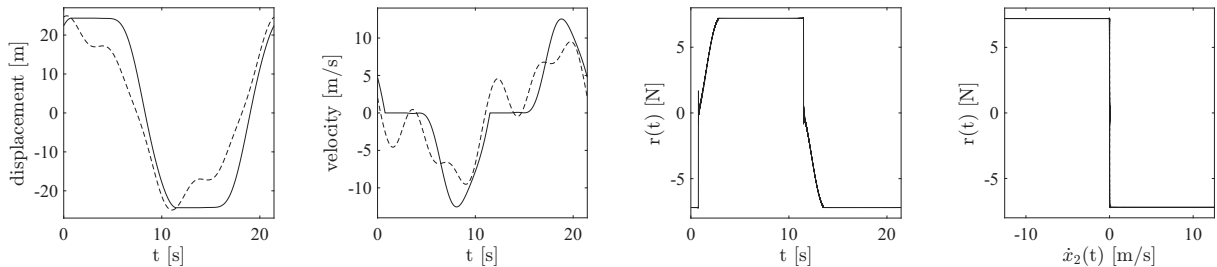


FIGURE 7 – Réponse au même cas super-harmonique que la figure 6, pour le modèle de Coulomb $F_s = \mu N = 7.2$, les autres paramètres et la légende restant identiques.

Coulomb est beaucoup moins complexe que son homologue de Stribeck, bien qu’il présente également des transitions lisses collement \rightarrow glissement et des sauts glissement \rightarrow collement. Deuxièmement, si les formes qualitatives des déplacements et vitesses sont proches, les amplitudes pour Coulomb sont sensiblement plus faibles que pour Stribeck. Par exemple, l’amplitude du déplacement de l’amortisseur est de 29.9 pour Stribeck, soit 23 % de plus que la valeur 24.3 obtenue pour Coulomb ; pour le premier DOF l’amplitude Stribeck est 10 % supérieure à celle de Coulomb. De même, la vitesse maximale de l’amortisseur est 14.9 pour Stribeck, soit 19 % de plus que 12.5 pour Coulomb. Les phases de glissement sont aussi généralement plus courtes pour Stribeck, probablement parce que la force Coulomb μN est atteinte plus facilement que la force Stribeck maximale $F_s > \mu N$.

5 Conclusion

La formulation par résidus pondérés temps-fréquence (E-WR) proposée pour le frottement de Coulomb [17] a été étendue à la loi de frottement de Stribeck, élargissant ainsi la plage de comportements de

frottement traitables au sein de ce cadre compact en domaine fréquentiel. L'écriture de la loi de Stribeck comme une égalité non lisse permet d'imposer directement les conditions de frottement au sens faible sur une période du mouvement.

Une convergence presque partout sur la période d'oscillation est observée lorsque le nombre d'harmoniques augmente. Les réponses périodiques reproduisent fidèlement les transitions complexes entre collement et glissement ainsi que les variations associées de la force de frottement. Une large gamme de comportements apparaît lorsque les paramètres de Stribeck varient : en particulier, la loi de Stribeck tend vers la loi de Coulomb lorsque la force statique F_s approche la force dynamique μN , et vers le modèle de stiction lorsque la vitesse caractéristique v tend vers zéro, attestant de sa robustesse et de sa généralité.

Dans les exemples numériques traités, la loi de Stribeck génère une force de frottement (dans le temps et en fonction de la vitesse) plus riche que la loi de Coulomb, avec des différences quantitatives significatives de réponse entre les deux modèles. Le choix du modèle de frottement a donc un impact important sur les prédictions.

Le cadre présenté fournit une stratégie monolithique pour l'analyse de réponses périodiques dans une large classe de systèmes non lisses, et ouvre la voie à des extensions futures vers des configurations multi-contact et multidimensionnelles.

Références

- [1] V. Acary, M. Brémond, and O. Huber. On solving contact problems with coulomb friction: formulations and numerical comparisons. In *Advanced Topics in Nonsmooth Dynamics: Transactions of the European Network for Nonsmooth Dynamics*, pages 375–457. Springer, 2018. [DOI], [OA].
- [2] V. Acary and B. Brogliato. *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems*. Springer, 2008. [DOI].
- [3] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pages 353–375, 1991. [DOI], [OA].
- [4] M. Berthillier, C. Dupont, R. Mondal, and J.-J. Barrau. Blades forced response analysis with friction dampers. *Journal of Vibration and Acoustics*, pages 468–474, 1998. [DOI], [OA].
- [5] T.M. Cameron and J.H. Griffin. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, pages 149–154, 1989. [DOI], [OA].
- [6] P. Dahl. Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA Journal*, pages 1675–1682, 1976. [DOI].
- [7] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K. Astrom, and P. Lischinsky. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on automatic control*, pages 419–425, 1995. [DOI], [OA].
- [8] J.P. Den Hartog. Forced vibrations with combined coulomb and viscous friction. *Journal of Fluids Engineering*, pages 107–115, 1931. [DOI].
- [9] A. Ferri. Friction damping and isolation systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, pages 196–206, 1995. [DOI], [OA].
- [10] P. Flores, R. Leine, and C. Glocker. Modeling and analysis of rigid multibody systems with translational clearance joints based on the nonsmooth dynamics approach. In *Multibody Dynamics: Computational Methods and Applications*, pages 107–130. Springer, 2011. [DOI], [OA].
- [11] A. Hashemi, C. Pierre, and M. Legrand. An equality-based weighted residual formulation for the vibration of systems with two-dimensional friction. *Journal of Structural Dynamics*, pages 127–155, 2025. [DOI], [OA].
- [12] S. He, S. Cho, and R. Singh. Prediction of dynamic friction forces in spur gears using alternate sliding friction formulations. *Journal of Sound and Vibration*, pages 843–851, 2008. [DOI].
- [13] S. Hüeber, G. Stadler, and B.I. Wohlmuth. A primal-dual active set algorithm for three-dimensional contact problems with coulomb friction. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(2):572–596, 2008. [DOI], [OA].
- [14] M. Krack and J. Gross. *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Springer, 2019. [DOI].
- [15] T.A. Laursen and J.C. Simo. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation-frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pages 3451–3485, 1993. [DOI].
- [16] D. Laxalde, L. Salles, L. Blanc, and F. Thouverez. Non-linear modal analysis for bladed disks with friction contact interfaces. In *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air: Structures and Dynamics, Parts A and B*, pages 457–467. ASME, 2008. [DOI], [OA].
- [17] M. Legrand and C. Pierre. A compact, equality-based weighted residual formulation for periodic solutions of systems undergoing frictional occurrences. *Journal of Structural Dynamics*, pages 144–170, 2024. [DOI], [OA].

- [18] R. Leine and H. Nijmeijer. Dynamics and bifurcations of non-smooth mechanical systems. In *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer, 2013. [DOI].
- [19] S. Liu, L. Wang, and X. Wang. Sensorless force estimation for industrial robots using disturbance observer and neural learning of friction approximation. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, page 102168, 2021. [DOI].
- [20] S. Liu, L. Wang, and X. Wang. Sensorless haptic control for human-robot collaborative assembly. *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, pages 132–144, 2021. [DOI].
- [21] T. Lu and M. Legrand. Nonsmooth modal analysis via the boundary element method for one-dimensional bar systems. *Nonlinear Dynamics*, pages 227–246, 2021. [DOI], [OA].
- [22] F. Marques, P. Flores, J. Pimenta Claro, and H. Lankarani. A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems. *Nonlinear Dynamics*, pages 1407–1443, 2016. [DOI], [OA].
- [23] C.-H. Menq, J. Bielak, and J. H. Griffin. The influence of microslip on vibratory response, part I: A new microslip model. *Journal of Sound and Vibration*, pages 279–293, 1986. [DOI].
- [24] J.-J. Moreau. An introduction to unilateral dynamics. In *Novel Approaches in Civil Engineering*. Springer, 2004. [DOI], [OA].
- [25] S. Nacivet, C. Pierre, F. Thouverez, and L. Jézéquel. A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems. *Journal of Sound and Vibration*, pages 201–219, 2003. [DOI], [OA].
- [26] G. Stadler. Semismooth Newton and augmented Lagrangian methods for a simplified friction problem. *SIAM Journal on Optimization*, pages 39–62, 2004. [DOI], [OA].
- [27] C. Wang, K. Wang, Z. Li, and L. Yang. Nonlinear dynamic of the rod-fastening combined rotor system with rub-impact based on the stribek friction model. *Applied Mathematical Modelling*, pages 685–706, 2024. [DOI].
- [28] J. Yang, H. Zhou, S. Li, J. Chen, and H. Xiang. Analysis of the critical stick–slip velocity of cnc machine tool combining friction parameters identification and dynamic model. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, pages 1849–1865, 2024. [DOI].