

Formulation d'un super-élément Hybride-Treffitz Déplacement - POD perforé

P.V.K. Nguyen^{1,2}, F. Massa^{2,3}, C. Hubert^{2,3}, B. Langrand^{1,2}, N. Leconte^{1,2}

¹ DMAS, ONERA, 59000, Lille, France, {phuc_viet_khoa.nguyen;bertrand.langrand;nicolas.leconte}@onera.fr

² LAMIH UMR CNRS 8201, UPHF, 59313, Valenciennes, {franck.massa;cedric.hubert}@uphf.fr

³ INSA Hauts-de-France, F-59313, Valenciennes, France

Résumé — Nous présentons une méthode mixte combinant le principe Hybride-Treffitz Déplacement et un modèle réduit de type POD pour développer un super-élément perforé pour le calcul de structures. Cette méthode repose sur la construction d'une base réduite pour modéliser les champs d'une plaque perforée, qui est intégrée ensuite dans la formulation du super-élément fini. Implémentée et validée sur des cas d'application numérique, cette approche montre un bon accord avec les calculs de référence en statique linéaire et ouvre des perspectives pour l'étude de comportements non linéaires ou multi-perforés.

Mots clés — Hybride-Treffitz Déplacement, modèle réduit, plaque perforée.

1 Introduction

Les zones d'assemblage rivetées jouent un rôle crucial dans le calcul des structures, nécessitant une discrétisation fine pour modéliser précisément les phénomènes physiques à l'échelle de l'assemblage via la simulation numérique par la méthode aux éléments finis (EF). Toutefois, en raison de l'incompatibilité entre la taille des zones d'assemblage et l'échelle globale de la structure complète, un nombre considérable EF est requis pour obtenir des résultats fiables. Pour y remédier, une approche basée sur la modélisation des zones d'assemblages par des super-éléments a donc été considérée [1, 2, 3]. Ce type d'élément, repose sur le principe Hybride-Treffitz Déplacement (HT-D) et une solution analytique de plaque perforée de type membrane Kolosov-Muskhelishvili [4]. Cependant, cette solution est restreinte au comportement élastique linéaire du matériau.

Dans cette étude, nous proposons de créer une base réduite construite par la méthode Proper Orthogonal Decomposition (POD) [5, 6], puis de l'intégrer dans la formulation du super-élément HT-D. L'idée est de générer, à partir de calculs « snapshots », un ensemble de modes qui captent les principaux mécanismes de déformation et de contrainte de la zone perforée, puis d'utiliser cette base comme champ intérieur du super-élément. Cette approche, nommée SEPOD, est exploitée en calcul statique linéaire afin d'évaluer la possibilité d'intégrer la base réduite dans un super-élément.

L'article est organisé comme suit : la section 2 présente l'implémentation du SEPOD, alors que la validation en comparaison avec les résultats de référence EF, est présentée dans la section 3. Enfin, la section 4 conclut ce travail.

2 Formulation du super-élément Hybride-Treffitz Déplacement avec intégration de la méthode POD

Le super-élément Hybride-Treffitz Déplacement repose sur le principe du même nom [7, 2, 3]. Le champ de déplacement du super-élément est considéré comme une combinaison de deux composantes indépendantes : un champ de déplacement à l'intérieur de l'élément \mathbf{u} , qui satisfait l'équation d'équilibre *a priori* et un champ de déplacement inter-élément $\tilde{\mathbf{u}}$, qui répond à la condition de continuité des déplacements entre les éléments.

Le champ de déplacement $\tilde{\mathbf{u}}$ est choisi de manière à être compatible avec les EF conventionnels voisins (Eq. 1) :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{q} \quad (1)$$

où $\tilde{\mathbf{N}}$ est la matrice des fonctions d'interpolation usuelles associées aux EF classiques voisins et \mathbf{q} est le vecteur des déplacements nodaux. Dans cet article, la frontière du super-élément développé est de nature quadratique et comporte 8 noeuds au total. La matrice $\tilde{\mathbf{N}}$ correspond donc aux fonctions d'interpolation quadratiques.

Il est proposé d'utiliser la méthode POD pour construire une base réduite capable de s'intégrer au principe HT-D, tel que (Eq. 2) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{\mathbf{u}} \\ \Phi_{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \quad (2)$$

Il est important de noter que les déplacements et les contraintes doivent utiliser le même vecteur de degrés de liberté généralisés $\boldsymbol{\alpha}$. Les vecteurs de déplacement et de traction s'écrivent comme suit :

$$\mathbf{u} = \Phi_{\mathbf{u}} \boldsymbol{\alpha} \quad ; \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y \end{bmatrix} = \Phi_{\mathbf{T}} \boldsymbol{\alpha} \quad (3)$$

En combinant Eqs. 1 et 3 avec le principe HT-D, la matrice de rigidité du super-élément s'exprime comme suit :

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{L}_e^T \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{L}_e \quad (4)$$

Les matrices \mathbf{H}_e et \mathbf{L}_e dans Eq. 4 sont donc :

$$\mathbf{H}_e = \int_S \Phi_{\mathbf{T}}^T \Phi_{\mathbf{u}} dS \quad ; \quad \mathbf{L}_e = \int_S \Phi_{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{N}} dS \quad (5)$$

Ce super-élément est ensuite assemblé avec les autres EF conventionnels de la structure pour obtenir la matrice de rigidité globale. À la fin du calcul, une étape de post-traitement est nécessaire pour la reconstruction des champs à l'intérieur du super-élément perforé. Cette étape est réalisée de manière similaire au processus décrit dans [2].

3 Résultats numériques

Dans cette section, les résultats numériques du SEPOD sont étudiés et comparés aux solutions de référence obtenues par une simulation EF convergée. Les comparaisons portent sur les champs de contrainte localisés autour de la perforation ainsi que sur le coût de calcul du SEPOD.

3.1 Définition du cas de test

Le calcul est mené sur un domaine carré de dimension $2l = 140\text{mm}$, contenant un trou central de rayon $a = 2\text{mm}$. La comparaison des résultats est effectuée sur un sous-domaine de post-traitement de dimension $20\text{mm} \times 20\text{mm}$, centré sur le trou. Le module d'Young et le coefficient de Poisson sont fixés à $E = 74\text{GPa}$ et $\nu = 0,3$. La plaque est soumise à deux cas de chargement : traction simple et cisaillement pur. Dans le cas d'un essai de traction simple, les composantes du déplacement $u_x = \pm u$ et $u_y = 0$ sont imposées sur les bords gauche et droit (où $x = \pm l$). Dans le cas d'une charge de cisaillement pur, les bords supérieur et inférieur (où $y = \pm l$) sont soumis à une composante de déplacement $u_x = \pm u$, tandis que les bords gauche et droit sont soumis à une composante de déplacement $u_y = \pm u$. La valeur du déplacement imposé est fixée à $u = 0,117\text{mm}$. Une hypothèse de contrainte plane est prise en compte dans la résolution numérique EF. La plaque est discrétisée à l'aide de 13568 EF quadrangulaires quadratiques de type Q8 dans le cas du calcul de référence. Pour le cas SEPOD, la zone centrale est remplacée par un seule SEPOD, tandis que les autres zones sont maillées avec des EF classiques Q8 (voir la Figure 1).

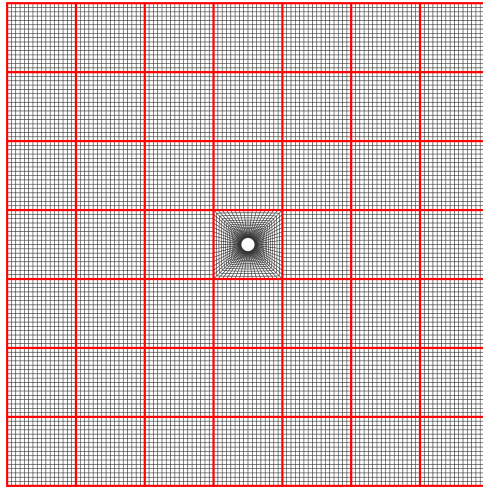


FIGURE 1 – Maillage EF fin (noir) et grossier (rouge). Le SEPOD en au centre du maillage rouge

3.2 Construction d'une base POD pour la plaque perforée

Un domaine carré de dimension $2L = 20\text{ mm}$, contenant un trou au centre de rayon $a = 2\text{ mm}$, est considéré. Cette configuration est choisie pour être compatible avec la règle de conception utilisée dans les structures aéronautiques [8]. Le domaine est discrétisé avec 1 280 EF Q8 (voir Figure 2).

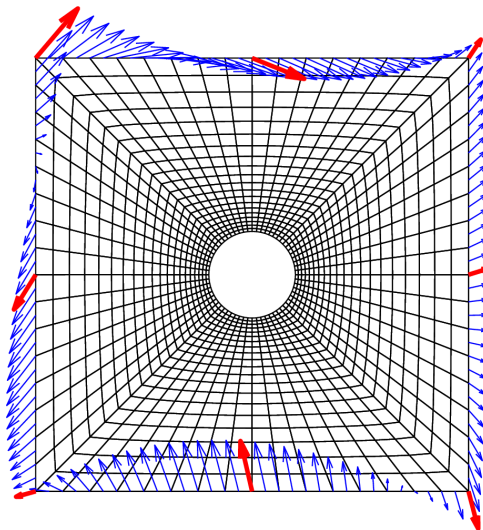


FIGURE 2 – Maillage pour les calculs de snapshots POD. Flèches rouges : déplacements imposés aux huit nœuds (coins et milieux des arêtes) du domaine; flèches bleues : interpolation quadratique des déplacements aux autres nœuds de la frontière

Pour générer les snapshots, des vecteurs de déplacement imposés correspondant aux 8 noeuds situés aux coins et aux milieux du domaine de calcul sont appliqués successivement. Les autres noeuds situés sur la frontière du domaine sont interpolés de manière quadratique à partir des valeurs de ces huit noeuds afin de satisfaire les conditions aux limites imposées lors des calculs (voir la Figure 2). Dans le cadre de l'élasticité linéaire, il suffit d'appliquer des vecteurs de déplacement unitaires associés à chacun des degrés de liberté des 8 noeuds pour générer les snapshots (16 snapshots au total, vu que l'on a deux degrés de liberté par noeud). Les champs de déplacement et de contrainte nodaux obtenus à l'issue de chaque calcul sont enregistrés en vue de l'application de la méthode POD. Les modes retenus après le processus POD sont déterminées à l'aide du critère d'énergie [9]. Selon ce critère, seuls les 15 premiers modes sont conservés dans la base réduite (voir la Figure 3), le dernier mode étant tronqué. Les 2e et 10e modes sont présentés dans la Figure 4. Cette base est ensuite utilisée pour l'implémentation du SEPOD, comme décrit dans la section 2.

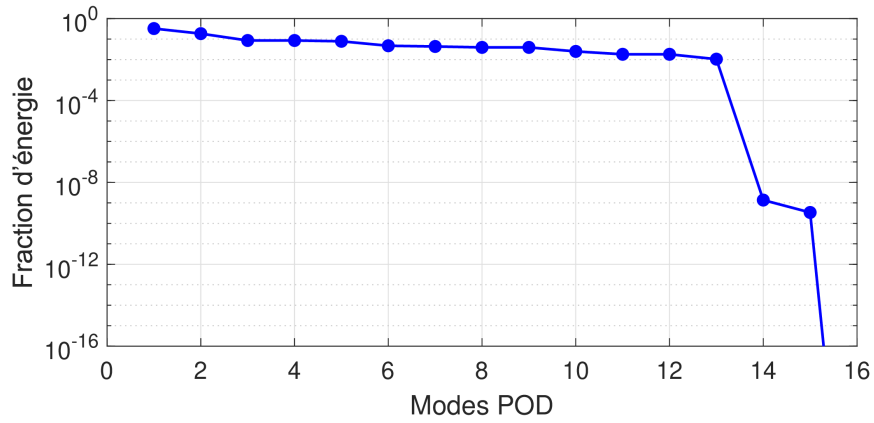


FIGURE 3 – Fraction d'énergie de chaque mode POD

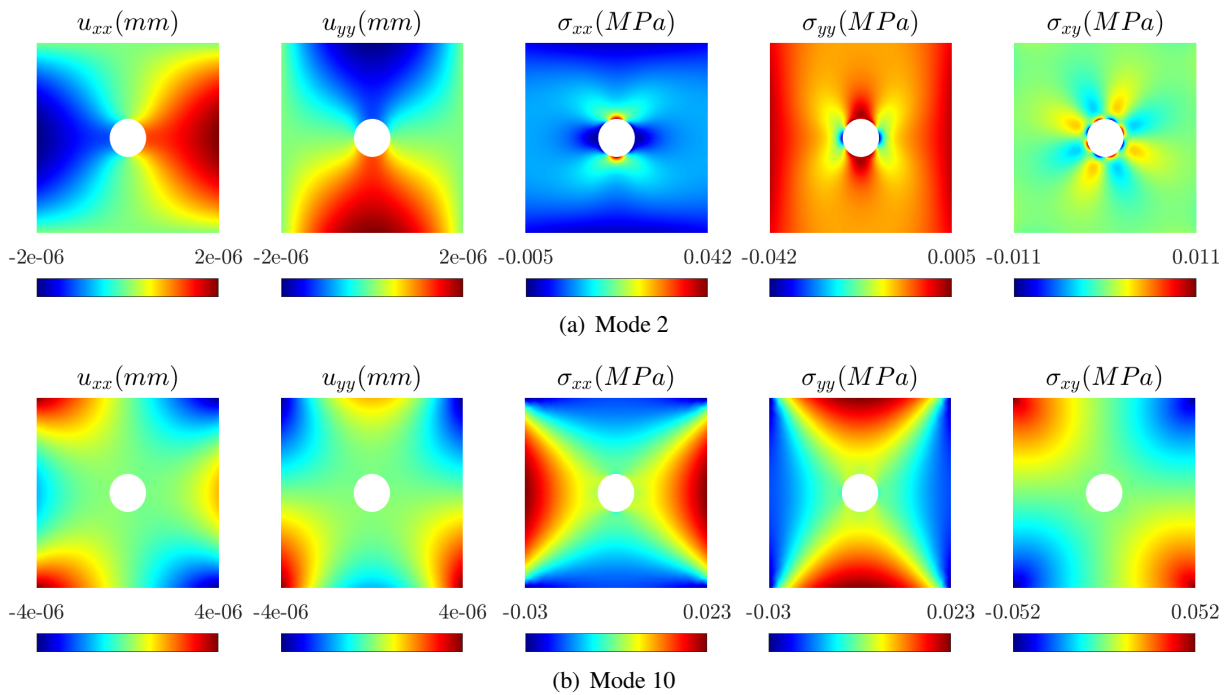


FIGURE 4 – Visualisation des 2e et 10e modes POD

3.3 Résultats et analyses

Une comparaison des distributions de la contrainte équivalente de von Mises dans les cas SEPOD et de référence EF est présentée sur la Figure 5 pour les deux cas de chargement. Pour chaque cas, on observe une bonne adéquation entre les résultats du SEPOD et des EF, tant en terme de distribution que d'amplitude. Le SEPOD a correctement capturé la concentration de contrainte autour du trou dans les différents chargements ainsi que les gradients de contrainte dans la zone de post-traitement. En particulier, les valeurs maximales des contraintes de von Mises prédites par le SEPOD sont très proches de celles obtenues par EF (Tableau 1). L'écart relatif entre les deux approches est inférieur à 4%. Ces résultats valident la capacité du SEPOD à reproduire fidèlement les champs de contraintes locaux autour de la perforation et montrent que le SEPOD peut remplacer un maillage EF fin dans les calculs de structure. En termes de temps de calcul, le SEPOD offre une forte réduction. Le calcul EF prend environ 10s, tandis que le SEPOD ne dure qu'environ 1 s, soit une réduction d'environ 90%.

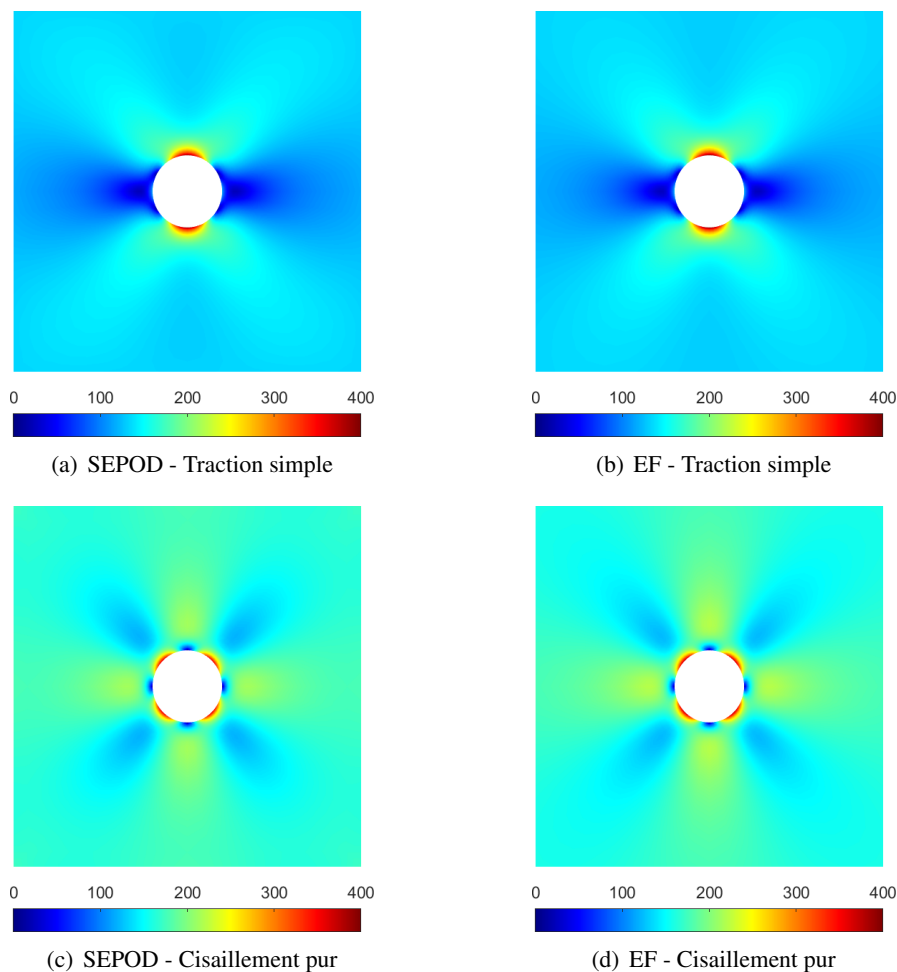


FIGURE 5 – Distribution de la contrainte de von Mises sur la zone centrale de 20 mm × 20 mm entre le SEPOD et l'EF

TABLE 1 – Comparaison du SEPOD par rapport aux résultats EF en terme de précision (estimation des contraintes)

-	$\max(\sigma_{VM}^{SEPOD})$ (MPa)	$\max(\sigma_{VM}^{EF})$ (MPa)	Ecart relatif %
Traction simple	388	393	1,27
Cisaillement pur	364	378	3,70

4 Conclusion et perspectives

Cette étude propose une approche alternative pour la formulation d'un super-élément perforé. La méthode POD a été retenue pour construire une base réduite issue de snapshots numériques. Le processus d'implémentation du SEPOD a consisté à :

- générer des snapshots représentatifs sur un domaine de référence,
- extraire les modes dominants par décomposition spectrale,
- sélectionner la base selon un critère d'énergie,
- intégrer simultanément les champs de déplacement et de contrainte issus de la base dans la formulation HT-D.

Les validations numériques montrent un très bon accord avec les résultats EF de référence. Cependant, plusieurs limites doivent toutefois être soulignées : la base POD a été ici construite pour un comportement élastique linéaire et pour un motif de perforation simple.

Les prochains travaux se concentreront, dans un premier temps, sur l'évaluation de cas multi-perforés ainsi que l'intégration de variations géométriques paramétriques (trou carré, ellipse, etc.) dans un cadre linéaire. Dans un second temps, les problèmes non linéaires matériels seront investigués en exploitant une base POD enrichie, basée sur une stratégie de décomposition en modes élastiques et inélastiques [10].

Références

- [1] R. Piltner. Special finite elements with holes and internal cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(8) :1471–1485, 1985.
- [2] Nicolas Leconte, Bertrand Langrand, and Eric Markiewicz. On some features of a plate hybrid-Trefftz displacement element containing a hole. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46(10) :819–828, October 2010.
- [3] C. Hennuyer, N. Leconte, B. Langrand, and E. Markiewicz. Interpolation functions of a hybrid-Trefftz perforated super-element featuring nodes on the hole boundary. *Finite Elements in Analysis and Design*, 91 :40–47, November 2014.
- [4] N. I. Muskhelishvili. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1977.
- [5] G. Berkooz, P. Holmes, and J. L. Lumley. The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25(Volume 25, 1993) :539–575, January 1993. Publisher : Annual Reviews.
- [6] Y. C. Liang, H. P. Lee, S. P. Lim, W. Z. Lin, K. H. Lee, and C. G. Wu. Proper orthogonal decomposition and its applications - part 1 : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 252(3) :527–544, May 2002.
- [7] Nicolas Leconte, Bertrand Langrand, and Eric Markiewicz. Hybrid displacement FE formulations including a hole. *Structural Engineering and Mechanics*, 31(4) :439–451, March 2009.
- [8] Faisal Aman, S. Hossein Cheraghi, Krishna K. Krishnan, and Hamid Lankarani. Study of the impact of riveting sequence, rivet pitch, and gap between sheets on the quality of riveted lap joints using finite element method. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 67(1) :545–562, July 2013.
- [9] Dominic Soldner, Benjamin Brands, Reza Zabihiyan, Paul Steinmann, and Julia Mergheim. A numerical study of different projection-based model reduction techniques applied to computational homogenisation. *Computational Mechanics*, 60(4) :613–625, October 2017.
- [10] J. A. Hernández, J. Oliver, A. E. Huespe, M. A. Caicedo, and J. C. Cante. High-performance model reduction techniques in computational multiscale homogenization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 276 :149–189, July 2014.