

# Une Méthode Éléments Virtuels auto-stabilisée tridimensionnelle pour l'élasticité linéaire

T. Bouchez<sup>1,2</sup>, A. Gravouil<sup>1</sup>, N. Blal<sup>1</sup>, A. Giacomini<sup>2</sup>, E. Delor<sup>2</sup>, J.-D. Beley<sup>2</sup>

<sup>1</sup> INSA Lyon, CNRS, LaMCoS, UMR5259, 69621 Villeurbanne, France, {timothee.bouchez, anthony.gravouil, nawfal.blal}@insa-lyon.fr

<sup>2</sup> ANSYS France, 69621 Villeurbanne, France, {timothee.bouchez, anthony.giacomini, emmanuel.delor, jean-daniel.beley}@ansys.com

**Résumé** — Les travaux présentés proposent une Méthode Éléments Virtuels auto-stabilisée pour l'élasticité linéaire tridimensionnelle. La formulation du problème repose sur l'approche variationnelle de Hu-Washizu, permettant ainsi de construire les espaces de déformation et de contrainte discrets comme des espaces de polynômes d'ordre élevé, tandis qu'un espace éléments virtuels enrichi est utilisé pour le champ de déplacement discret. La méthode développée est finalement testée sur des problèmes variés attestant de sa robustesse ainsi que de ses performances en terme de convergence et précision.

**Mots clés** — Méthode des Éléments Virtuels auto-stabilisée, Hu-Washizu, Maillages de Voronoi.

## 1 Introduction

La simulation numérique des structures constitue un pilier majeur du développement industriel. En effet, les outils numériques sont utilisés dès les premières étapes de la conception des produits afin d'obtenir des solutions répondant au cahier des charges de manière rapide et économique. Pour répondre à la demande industrielle croissante, il est nécessaire de développer des solveurs numériques rapides et robustes. Un axe d'amélioration important pour renforcer la robustesse des outils de simulation réside dans les algorithmes de maillage. En effet, la génération de maillages tétraédriques ou hexaédriques dépourvus d'éléments singuliers représente un véritable défi dans le développement de logiciels de simulation industriels. Pour cette raison, certaines entreprises comme ANSYS Inc. développent des maillages polyédriques basés sur des tessellations de Voronoi. Ces outils, que l'on retrouve actuellement pour des applications en mécanique des fluides, se montrent à la fois très efficaces et robustes. Du fait des performances de ces maillages, le développement de méthodes numériques pour la résolution de problèmes de mécanique des structures sur des maillages polyédriques devient un réel sujet d'intérêt.

La Méthode des Éléments Virtuels (VEM) introduite en 2013 [3] est une méthode numérique pour la résolution de problèmes elliptiques sur des maillages polyédriques. Elle semble donc adaptée à l'utilisation de maillages de Voronoi pour la simulation en mécanique des structures, d'autant plus qu'il existe dans la littérature des exemples d'applications de la VEM à l'élasticité linéaire [4, 10, 19, 2, 15], l'hyperélasticité [11, 24, 16, 22, 26], l'élastoplasticité [23, 20, 13], la mécanique de la rupture [5, 27], l'optimisation topologique [12] ainsi que des problèmes de contact [25, 1, 21, 14]. L'un des défauts de la Méthode des Éléments Virtuels provient de l'utilisation d'un terme de stabilisation pour assurer sa coercivité. Celui-ci manque alors de motivation physique et, s'il n'est pas suffisamment bien choisi, tend à réduire l'ordre de convergence ainsi que la précision de la méthode. Pour ces raisons, de récents travaux [6, 17] s'affranchissent de toute stabilisation numérique, introduisant ainsi des formulations éléments virtuels auto-stabilisées (sf-VEM) pour la résolution de problèmes 2D. Les développements présentés, également résumés dans [7], étendent alors ces résultats à la résolution de problèmes élastiques linéaires tridimensionnels.

Pour ce faire, le problème continu est formulé à partir du principe variationnel de Hu-Washizu à trois champs. L'espace est ensuite discrétisé à l'aide de polyèdres convexes-étoilés, ce maillage permettant de construire les espaces fonctionnels discrets pour les champs de déformation, contrainte et déplacement. Enfin, l'analyse des performances numériques de la méthode révèle une robustesse remarquable.

## 2 La Méthode des Éléments Virtuels

La Méthode des Éléments Virtuels est une méthode de résolution numérique de problèmes elliptiques sur des maillage polyédriques  $\mathcal{T}_h$ . Pour permettre l'utilisation d'une très grande diversité de géométrie d'éléments, celle-ci repose sur un espace fonctionnel dont la définition explicite n'existe que sur les arrêtes du maillage. La forme bilinéaire discrète est ensuite construite à l'aide d'un projecteur  $\Pi : V^E \rightarrow P(E)$  défini depuis l'espace élément virtuel  $V^E$  vers un espace de polynôme  $P(E)$ . Ainsi, si l'on considère un problème elliptique de la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u, v) = b(v), \forall v \in V \end{cases}$$

où  $V$  est un espace de Hilbert, la Méthode des Éléments Virtuels construit la forme bilinéaire discrétisée locale sur chaque élément  $E$  du maillage  $\mathcal{T}_h$  comme suit :

$$a_h^E(u_h, v_h) = a^E(\Pi u_h, \Pi v_h) + S^E(u_h - \Pi u_h, v_h - \Pi v_h)$$

où  $S^E(u_h - \Pi u_h, v_h - \Pi v_h)$  est un terme de stabilisation numérique qui doit être judicieusement choisi afin d'approximer correctement l'énergie des modes stabilisés. Les méthodes éléments virtuels auto-stabilisées (sf-VEM) visent donc à s'affranchir de ce terme de stabilisation par l'utilisation de projections d'ordre élevé des gradients du champ inconnu  $\mathbf{u}_h$  et du champ test  $\mathbf{v}_h$ . Jusqu'à récemment, ces développements n'existaient que pour la résolution de problèmes bidimensionnels. Nous introduisons donc nos travaux ayant menés à la formulation d'une Méthode Éléments Virtuels auto-stabilisée tridimensionnelle pour l'analyse de problèmes élastiques linéaires.

## 3 Formulation du problème élastique-linéaire par l'approche variationnelle de Hu-Washizu

On considère  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  un milieu élastique linéaire. Soit  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  son bord constitué d'un bord de Dirichlet  $\Gamma_D$ , où est imposé un déplacement  $\mathbf{u}_D$ , et d'un bord de Neumann  $\Gamma_N$ , où un effort extérieur  $\mathbf{t}$  est appliqué, avec  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ . Et soit  $\mathbf{f}$  le chargement volumique auquel est soumis  $\Omega$ . Le principe variationnel de Hu-Washizu [18] donne la solution du problème élastique linéaire comme l'état  $(\mathbf{u}, \varepsilon, \sigma)$  cinématiquement admissible qui stationnarise la fonctionnelle :

$$J(\mathbf{u}, \varepsilon, \sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon : \mathbb{C} : \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} \sigma : \left( \varepsilon - \frac{\partial^s \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} ds \quad (1)$$

Cette approche permet d'obtenir les formes faibles des équations fondamentales de l'élasticité linéaire :

— équation d'équilibre :

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \cdot \sigma + \mathbf{f} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_N} \delta \mathbf{u} \cdot (\sigma \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}) ds = 0, \forall \delta \mathbf{u}$$

— loi de comportement :

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon : (\sigma - \mathbb{C} : \varepsilon) d\Omega = 0, \forall \delta \varepsilon$$

— équation de compatibilité :

$$\int_{\Omega} \delta \sigma : \left( \varepsilon - \frac{\partial^s \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) d\Omega = 0, \forall \delta \sigma$$

où  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \varepsilon$  et  $\delta \sigma$  appartiennent aux espaces adaptés.

## 4 Formulation d'une Méthode Éléments Virtuels auto-stabilisée tridimensionnelle

On considère désormais une décomposition du domaine  $\Omega$  en un ensemble de polyèdres convexes étoilés non-chevauchant. La formulation discrète du problème élastique linéaire est alors obtenue en définissant indépendamment les champs de déplacement, déformation et contrainte discrétisés tels que pour chaque élément  $E \in \mathcal{T}_h$  :

$$\mathbf{u}_h|_E \in \mathbf{V}_{1,l}^E \quad \boldsymbol{\varepsilon}_h|_E \in \mathbf{V}_\varepsilon^E \quad \boldsymbol{\sigma}_h|_E \in \mathbf{V}_\sigma^E$$

où  $\mathbf{V}_{1,l}^E$ ,  $\mathbf{V}_\varepsilon^E$  et  $\mathbf{V}_\sigma^E$  sont des espaces fonctionnels de dimensions finies définis sur  $E$ . Le problème discret, restreint à chaque élément  $E \in \mathcal{T}_h$ , se réécrit alors comme trouver l'état  $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_h, \boldsymbol{\sigma}_h)$  cinématiquement admissible qui vérifie :

$$\begin{aligned} \int_E \delta \mathbf{u}_h \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_h + \mathbf{f} \right) d\Omega - \int_{\partial E \cap \Gamma_N} \delta \mathbf{u}_h \cdot (\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}) ds = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_{1,l}^E : \delta \mathbf{u}_h = 0 \text{ on } \partial E \cap \Gamma_D \\ \int_E \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h : (\boldsymbol{\sigma}_h - \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_h) d\Omega = 0 \quad \forall \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h \in \mathbf{V}_\varepsilon^E \\ \int_E \delta \boldsymbol{\sigma}_h : \left( \boldsymbol{\varepsilon}_h - \frac{\partial^s \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{X}} \right) d\Omega = 0 \quad \forall \delta \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathbf{V}_\sigma^E \end{aligned} \quad (2)$$

Dans cette section, les espaces fonctionnels choisis pour  $\mathbf{V}_{1,l}^E$ ,  $\mathbf{V}_\varepsilon^E$  and  $\mathbf{V}_\sigma^E$  sont introduits.

Dans un premier temps, les espaces associés aux champs de déformation et de contrainte discrétisés sont définis comme deux espaces de tenseurs d'ordre deux symétriques à valeurs polynomiales d'ordre inférieur ou égal à  $l$  :

$$\mathbf{V}_\varepsilon^E = \mathbf{V}_\sigma^E := [P_l(E)]_{sym}^{3 \times 3}$$

En considérant désormais l'équation de compatibilité discrète du système d'équations (2), il est possible de constater que le champ de déformation discrétisé  $\boldsymbol{\varepsilon}_h$  correspond à la projection du gradient symétrisé du champ de déplacement sur l'espace  $[P_l(E)]_{sym}^{3 \times 3}$ . On note alors  $\Pi \boldsymbol{\varepsilon}(\cdot) : \mathbf{V}_{1,l}^E \rightarrow [P_l(E)]_{sym}^{3 \times 3}$  cette projection définie telle que  $\forall \mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_{1,l}^E$  :

$$\left( \Pi \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) - \frac{\partial^s \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{X}}, \mathbf{P} \right)_{L^2(E)} = 0 \quad \forall \mathbf{P} \in [P_l(E)]_{sym}^{3 \times 3}$$

Ainsi, pour assurer la stabilité de la formulation, l'ordre polynomial  $l$  devra être choisi tel que :

$$\dim \ker \Pi \boldsymbol{\varepsilon}(\cdot) = 6$$

Dans un second temps, la construction de l'espace fonctionnel associé au champ de déplacement discrétisé commence par la définition, sur chaque face  $F$  de l'élément  $E \in \mathcal{T}_h$ , d'un projecteur type serendipity  $\Pi_{1,F}^S : [L^2(F)]^3 \rightarrow [Q_1(F)]^3$  ainsi que d'un espace élément virtuel enrichi sur  $F$  définit tel que :

$$\mathbf{V}_{1,l}^F := \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathcal{EN}_{1,l}^F \mid \boldsymbol{\Delta} \mathbf{v}_h \in [P_l(F)]^3, \mathbf{v}_h|_e \in [P_1(e)]^3 \quad \forall e \in \mathcal{E}_F \right\} \quad (3)$$

Où  $\mathcal{E}_F$  correspond à l'ensemble des arêtes de la face  $F$  et  $\mathcal{EN}_{1,l}^F$  est l'espace d'enrichissement définit par :

$$\mathcal{EN}_{1,l}^F := \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(F)]^3 \mid \int_F \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} ds = \int_F \mathbf{p} \cdot \Pi_{1,F}^S \mathbf{v} ds \quad \forall \mathbf{p} \in [P_l(F)]^3 \right\}$$

On peut finalement construire, pour chaque élément  $E \in \mathcal{T}_h$ , l'espace élément virtuel enrichi attribué au champ de déplacement discrétisé tel que :

$$\mathbf{V}_{1,l}^E := \left\{ \mathbf{v}_h \in [H^1(E)]^3 \mid \boldsymbol{\Delta} \mathbf{v}_h \in [P_{l-1}(E)]^3, \mathbf{v}_h|_F \in \mathbf{V}_{1,l}^F \quad \forall F \in \mathcal{F}_E \right\}$$

Les degrés de libertés associés à cet espace peuvent être identifiés comme :

(i) l'évaluation du champ  $\mathbf{v}_h$  aux sommets de  $E$

(ii) l'évaluation des moments d'ordre jusqu'à  $l-1$  sur  $E$  définis par :  $\int_E \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_h d\Omega \quad \forall \mathbf{p} \in [P_{l-1}(E)]^3$

La construction des matrices de rigidités élémentaires peut finalement se faire à partir des degrés de liberté associés à l'espace des déplacements discrets  $\mathbf{V}_{1,l}^E$  ainsi que des propriétés de l'espace d'enrichissement définit équation (3).

## 5 Tests numériques

La Méthode Éléments Virtuels auto-stabilisée présentée ici a été testée sur différents problèmes numériques. Dans un premier temps, une analyse de convergence a été réalisée sur des maillages de Voronoi, montrant figure 1 un ordre de convergence de la méthode à l'ordre 1 en norme énergétique, et à l'ordre 2 en norme  $L^2$ , étendant ainsi au cas tridimensionnel les résultats obtenus dans la littérature en deux dimensions [6, 17]. Les performances de la formulation proposée ont ensuite été évaluées sur la membrane de Cook figure 2 ainsi que sur un problème légèrement plus industriel de platine chargée figure 3. Sur ces deux cas tests, la méthode fournit des résultats qui se situent entre ce qui peut être obtenu avec une formulation Éléments Finis Q1 et Q2. De plus, la méthode développée semble offrir un gain en précision notable lorsque celle-ci est comparée à la formulation sf-VEM tridimensionnelle proposée dans [28].

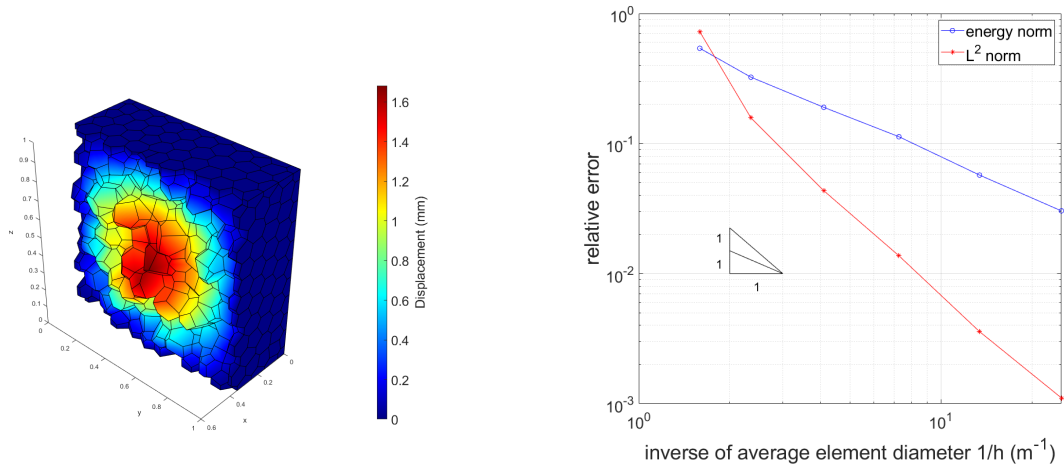


FIGURE 1 – Analyse de convergence (figure issue de [7])

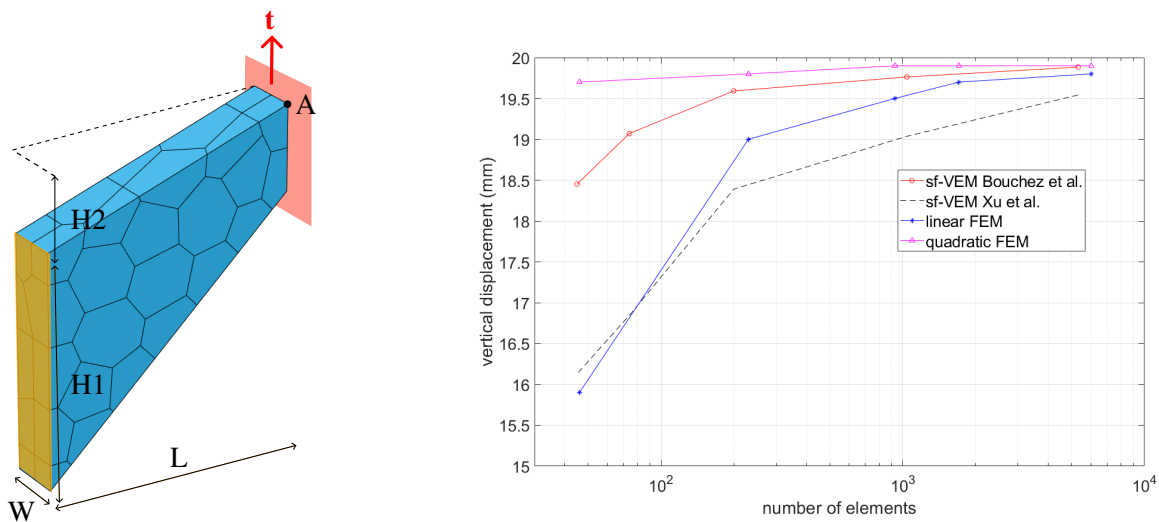


FIGURE 2 – Membrane de Cook (figure issue de [7])

## 6 Conclusion

Dans les travaux présentés, nous avons étendu les Méthodes Éléments Virtuels auto-stabilisées bi-dimensionnelles de la littérature à l'analyse de problèmes élastiques linéaires en trois dimensions. La formulation proposée a été testée numériquement sur différents problèmes et montre une convergence optimale ainsi qu'une précision intéressante lorsqu'elle est utilisée sur des maillages de Voronoi. De plus,

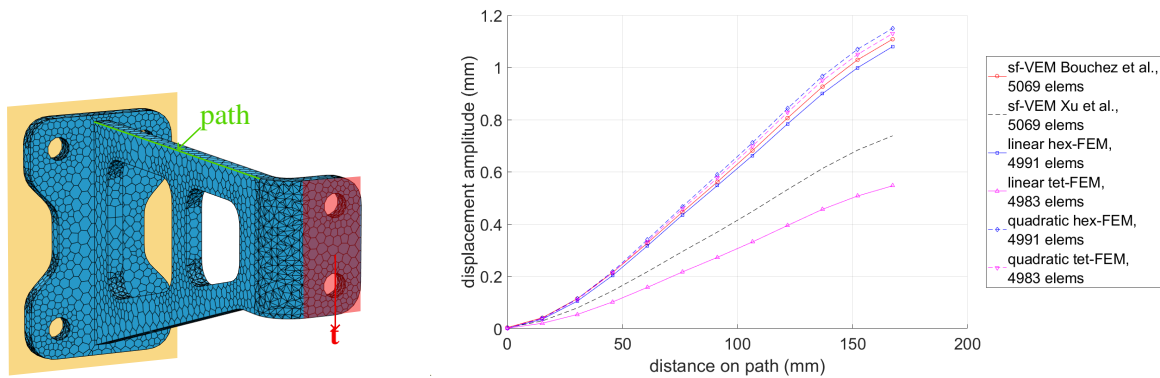


FIGURE 3 – Platine chargée (figure issue de [7])

celle-ci s’est montrée robuste sur l’ensemble des géométries d’éléments présents dans les maillages utilisés, ce qui inclus des polyèdres non-convexes. Les prochains travaux considérés visent à étendre la méthode à des ordres plus élevés [8] ainsi que son application à des problèmes plus complexes de la mécanique des structures comme la simulation de structures minces [9], l’analyse en grandes déformations ou l’étude de problèmes de contact.

## 7 Remerciements

Les auteurs remercient l’Association Nationale Recherche Technologie (ANRT) et ANSYS France pour la convention CIFRE n° 2023/0820 et le financement de ces travaux.

## Références

- [1] F. Aldakheel, B. Hudobivnik, E. Artioli, L. Beirão Da Veiga, and P. Wriggers. Curvilinear virtual elements for contact mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 372 :113394, December 2020.
- [2] E. Artioli, L. Beirão Da Veiga, C. Lovadina, and E. Sacco. Arbitrary order 2D virtual elements for polygonal meshes : part I, elastic problem. *Computational Mechanics*, 60(3) :355–377, September 2017.
- [3] L. Beirão Da Veiga, F. Brezzi, A. Cangiani, G. Manzini, L.D. Marini, and A. Russo. BASIC PRINCIPLES OF VIRTUAL ELEMENT METHODS. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(01) :199–214, January 2013.
- [4] L. Beirão Da Veiga, F. Brezzi, and L.D. Marini. Virtual Elements for Linear Elasticity Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51(2) :794–812, January 2013.
- [5] E. Benvenuti, A. Chiozzi, G. Manzini, and N. Sukumar. Extended virtual element method for two-dimensional linear elastic fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 390 :114352, February 2022.
- [6] S. Berrone, A. Borio, and F. Marcon. Lowest order stabilization free virtual element method for the 2D Poisson equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 177 :78–99, January 2025.
- [7] T. Bouchez, A. Gravouil, N. Blal, A. Giacomini, E. Delor, and J.-D. Beley. A Hu-Washizu stabilization-free Virtual Element Method for 3D linear elasticity with star-convex polyhedrons. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2024.
- [8] T. Bouchez, A. Gravouil, N. Blal, A. Giacomini, E. Delor, and J.-D. Beley. A High-Order stabilization-free Virtual Element Method for 3D linear elasticity. *Submitted*, 2025.
- [9] T. Bouchez, A. Gravouil, N. Blal, A. Giacomini, E. Delor, and J.-D. Beley. A new solid-shell stabilization-free Virtual Element. *Submitted*, 2025.
- [10] F. Brezzi and L.D. Marini. Virtual Element Methods for plate bending problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 253 :455–462, January 2013.

- [11] H. Chi, L. Beirão Da Veiga, and G.H. Paulino. Some basic formulations of the virtual element method (VEM) for finite deformations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 318 :148–192, May 2017.
- [12] H. Chi, A. Pereira, I.F.M. Menezes, and G.H. Paulino. Virtual element method (VEM)-based topology optimization : an integrated framework. Structural and Multidisciplinary Optimization, 62(3) :1089–1114, September 2020.
- [13] M. Cihan, B. Hudobivnik, F. Aldakheel, and P. Wriggers. 3D mixed virtual element formulation for dynamic elasto-plastic analysis. Computational Mechanics, 68(3) :1–18, September 2021.
- [14] M. Cihan, B. Hudobivnik, J. Korelc, and P. Wriggers. A virtual element method for 3D contact problems with non-conforming meshes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 402 :115385, December 2022.
- [15] F. Dassi, C. Lovadina, and M. Visinoni. A three-dimensional Hellinger–Reissner virtual element method for linear elasticity problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 364 :112910, June 2020.
- [16] M.L. De Bellis, P. Wriggers, and B. Hudobivnik. Serendipity virtual element formulation for non-linear elasticity. Computers & Structures, 223 :106094, October 2019.
- [17] A.M. D’Altri, S. de Miranda, L. Patruno, and E. Sacco. An enhanced VEM formulation for plane elasticity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 376 :113663, April 2021.
- [18] C. A. Felippa. On the Original Publication of the General Canonical Functional of Linear Elasticity. Journal of Applied Mechanics, 67(1) :217–219, March 2000.
- [19] A.L. Gain, C. Talischi, and G.H. Paulino. On the Virtual Element Method for three-dimensional linear elasticity problems on arbitrary polyhedral meshes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 282 :132–160, December 2014.
- [20] B. Hudobivnik, F. Aldakheel, and P. Wriggers. A low order 3D virtual element formulation for finite elasto–plastic deformations. Computational Mechanics, 63(2) :253–269, February 2019.
- [21] W. Shen, M. Ohsaki, and J. Zhang. A 2-dimensional contact analysis using second-order virtual element method. Computational Mechanics, 70(2) :225–245, August 2022.
- [22] D. Van Huyssteen and B.D. Reddy. A virtual element method for isotropic hyperelasticity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 367 :113134, August 2020.
- [23] P. Wriggers and B. Hudobivnik. A low order virtual element formulation for finite elasto-plastic deformations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 327 :459–477, December 2017.
- [24] P. Wriggers, B. D. Reddy, W. Rust, and B. Hudobivnik. Efficient virtual element formulations for compressible and incompressible finite deformations. Computational Mechanics, 60(2) :253–268, August 2017.
- [25] P. Wriggers, W. T. Rust, and B. D. Reddy. A virtual element method for contact. Computational Mechanics, 58(6) :1039–1050, December 2016.
- [26] B.-B. Xu, L. Beirao Da Veiga, Y.J. Zhang, and P. Wriggers. Second order three-dimensional serendipity virtual elements for hyperelasticity : Static and dynamic analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 448 :118432, January 2026.
- [27] B.-B. Xu, F. Peng, P. Junker, and P. Wriggers. Virtual element method with non-matching and adaptive meshes for phase field fracture. Computational Mechanics, July 2025.
- [28] B.-B. Xu and P. Wriggers. 3D stabilization-free virtual element method for linear elastic analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 421 :116826, March 2024.