

Réduction de modèles pour les interactions fluide-structure : exploitation des fonctions de Green adaptées

S. Chaillat¹, L. Pacaut², J.F. Mercier¹, G. Serre², N. Trafny²

¹ POEMS, ENSTA, Palaiseau, {nom}@ensta.fr

² Naval Group, Ollioules, {prenom.nom}@naval-group.com

Résumé — Nous considérons un problème d'interaction fluide-structure sur une géométrie complexe, pour lequel nous souhaitons calculer la réponse à des excitations variables. Pour réduire considérablement le coût de calcul de cette étude paramétrique sans sacrifier la précision, nous proposons une approche de réduction de modèle séparant les effets de la géométrie et de la source. La méthode repose sur le calcul d'une fonction de Green adaptée au couplage fluide-structure et à la géométrie complexe. Pour rendre le coût de la phase offline acceptable, nous exploitons des méthodes d'éléments de frontière rapides.

Mots clés — équations intégrales de frontière, couplage fluide-structure, réduction de modèle.

1 Problème d'interaction fluide-structure pour le bruit hydrodynamique

On considère le problème d'interaction fluide structure suivant. Le domaine intérieur Ω_s est un solide élastique de densité ρ_s et de vitesse d'ondes de compression et de cisaillement c_p et c_s , avec les nombres d'onde associés k_p et k_s . Le domaine extérieur Ω_f est un fluide de densité ρ_f et de vitesse d'onde c_f , associé au nombre d'onde k_f . Le système couplé est excité par une source S située dans le domaine extérieur. Les inconnues sont le déplacement total noté \mathbf{u} dans Ω_s et la pression totale notée p dans Ω_f (Figure 1).

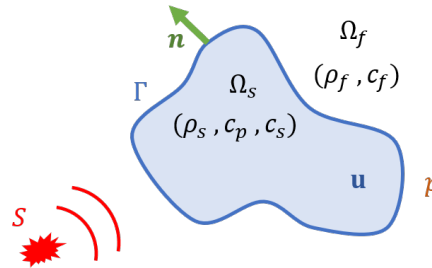


FIGURE 1 – Représentation schématique et notations pour un problème général couplé fluide-structure.

La pression totale dans le domaine fluide extérieur est la solution de l'équation de Helmholtz

$$(\Delta + k_f^2)p = -S \quad \text{dans } \Omega_f, \quad (1)$$

et le déplacement total dans le solide élastique est la solution de l'équation de l'élastodynamique

$$\rho_s \omega^2 \mathbf{u} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_s. \quad (2)$$

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ est donné par la loi de Hooke

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\operatorname{grad}(\mathbf{u}) + \operatorname{grad}^t(\mathbf{u})), \quad (3)$$

avec λ et μ les coefficients de Lamé et grad^t la transposée de l'opérateur gradient grad . Le vecteur inconnu \mathbf{u} , à trois composantes, et le scalaire inconnu p sont reliés par deux conditions aux limites à l'interface

afin de garantir la compatibilité : $\forall \mathbf{x} \in \Gamma$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right) (\mathbf{x}) = \rho_f \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (4)$$

De plus, la pression p doit satisfaire la condition de rayonnement de Sommerfeld à l'infini. Ce problème est utilisé pour modéliser le couplage hydro-vibro-acoustique résultant des excitations hydrodynamiques et acoustiques lors du déplacement d'une structure dans un fluide dense, tel que l'eau. Il nous intéresse particulièrement pour l'étude du bruit généré par les écoulements turbulents autour d'un sous-marin.

2 Reformulation du problème couplé en équations intégrales de frontière

Si les domaines fluides et solides sont considérés comme homogènes, une manière naturelle de calculer la pression totale et le déplacement total dans Ω_f et Ω_s consiste à introduire les fonctions de Green du champ libre acoustique et élastique [3], connues sous forme analytique et de reformuler le problème couplé sous forme d'un système d'équations intégrales.

La représentation intégrale sur la frontière de la solution de (1) à l'aide de la fonction de Green de l'espace infini $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ s'écrit :

$$p(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_f} S(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} \left(p(\mathbf{Z})\partial_{n\mathbf{Z}}G(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{Z})\partial_{n\mathbf{Z}}p(\mathbf{Z}) \right) d\Gamma_{\mathbf{Z}}. \quad (5)$$

Si on introduit les potentiels de simple et de double couche \mathcal{S}_f et \mathcal{D}_f , on obtient

$$p(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_f} S(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} + (\mathcal{D}_f p)(\mathbf{x}) - \left(\mathcal{S}_f \frac{\partial p}{\partial n} \right) (\mathbf{x}), \quad (6)$$

Dans le domaine élastique, le tenseur de Green est la solution de [4]

$$\rho_s \omega^2 \mathbf{U}^k + \text{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}^k) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{e}^k. \quad (7)$$

La traction $\mathbf{T}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}^k)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}$ est donnée par

$$\mathbf{T}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ih} \delta_{jl} + \delta_{jh} \delta_{il})] \frac{\partial}{\partial y_l} \mathbf{U}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j(\mathbf{x}). \quad (8)$$

La représentation intégrale s'écrit pour $\mathbf{x} \in \Omega_s$; $k = 1, 2$ et 3 ,

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \left[\mathbf{U}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) \mathbf{t}_i(\mathbf{Z}) - \mathbf{T}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) \mathbf{u}_i(\mathbf{Z}) \right] d\Gamma_{\mathbf{Z}}, \quad (9)$$

où $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$.

Si on introduit les potentiels \mathcal{D}_s^k et \mathcal{S}_s^k donnés par

$$(\mathcal{D}_s^k \phi)(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \mathbf{T}^k(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) \cdot \phi(\mathbf{Z}) d\Gamma_{\mathbf{Z}} \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}_s^k \phi)(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \mathbf{U}^k(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) \cdot \phi(\mathbf{Z}) d\Gamma_{\mathbf{Z}}, \quad (10)$$

alors (9) devient

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{x}) = -(\mathcal{D}_s^k \mathbf{u})(\mathbf{x}) + (\mathcal{S}_s^k \mathbf{t})(\mathbf{x}). \quad (11)$$

Système d'équations intégrales. Il nous faut maintenant écrire le système satisfait par p , $\partial_n p$, \mathbf{u} et \mathbf{t} sur Γ . On utilise la même démarche que pour la définition de toute équation intégrale de frontière. On prend les traces sur Γ de chaque potentiel de simple ou de double couche pour obtenir le système couplé d'équations intégrales de frontière

$$\begin{cases} \left(\frac{I}{2} - D_f \right) p + \rho_f \omega^2 \mathcal{S}_f(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) & = \int_{\Omega_f} S(\mathbf{y}) G^f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \text{sur } \Gamma, \\ \left(\frac{\mathbf{u}^k}{2} + D_s^k \mathbf{u} \right) + \mathcal{S}_s^k(p \mathbf{n}) & = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (12)$$

où D_s^k et \mathcal{S}_s^k sont les traces \mathcal{D}_s^k et \mathcal{S}_s^k et D_f et \mathcal{S}_f sont celles de \mathcal{D}_f et \mathcal{S}_f

Cette formulation présente l'inconvénient de devoir être recalculée chaque fois que la source change, ce qui la rend inadaptée à la prise en compte de sources multiples, et en particulier aléatoires, comme les sources turbulentes. Ce problème est traité en introduisant une fonction de Green adaptée, comme détaillé ci-dessous.

3 Fonction de Green adaptée pour l'interaction fluide-structure

On va définir une fonction de Green adaptée au problème couplé, i.e., qui satisfait les conditions de transmission du problème couplé et on va montrer qu'elle permet de ne pas avoir à recalculer les traces p , $\partial_n p$, \mathbf{u} et \mathbf{t} sur Γ dès que l'on change de source. Cette fonction de Green est par définition solution de (1)-(4) quand $S = \delta$. Elle est composée de deux contributions : G^T , la fonction de Green dans Ω_f , et \mathbf{u}_G , le déplacement total dans Ω_s , produit par la pression extérieure G^T . Elles sont données par

$$\begin{cases} (\Delta + k_f^2)G^T = -\delta & \text{dans } \Omega_f, \\ \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_G + \text{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_G) = 0 & \text{dans } \Omega_s, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_G) \cdot \mathbf{n} = -G^T \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial G^T}{\partial n} = \rho_f \omega^2 \mathbf{u}_G \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (13)$$

Le principal avantage de (13) est qu'une fois G^T déterminée, on peut calculer directement p pour toute source S en utilisant

$$p(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_f} S(\mathbf{y}) G^T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (14)$$

Une conséquence importante de cette formulation est qu'elle est plus adaptée aux études statistiques liées à la turbulence, ce qui sera illustré plus loin. Cette approche a été utilisée avec succès dans le cas de conditions aux limites de type Neumann [2] ou pour un couplage fluide-fluide dans [1].

Calcul de la fonction de Green adaptée avec des équations intégrales. Si l'on veut pouvoir utiliser ces fonctions de Green pour des géométries réalistes, il faut disposer d'une méthode de calcul précise et efficace. La première étape est de déterminer la représentation intégrale que satisfont les fonctions de Green. Comme \mathbf{u}_G est la solution des équations élastodynamiques homogènes (2) avec une source de Dirac située dans le fluide, nous pouvons utiliser la représentation intégrale sur la frontière pour le déplacement (9) avec $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_G$, de sorte que $\forall \mathbf{x} \in \Omega_f$

$$(\mathbf{u}_G)_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\Gamma} U^k(\mathbf{y}, \mathbf{Z}) \cdot [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_G)(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{Z})] - T^k(\mathbf{y}, \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{u}_G(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) d\Gamma_{\mathbf{Z}}, \quad \mathbf{y} \in \Omega_s. \quad (15)$$

De même, comme G^T satisfait l'équation de Helmholtz, nous pouvons utiliser (5). On obtient alors

$$G^T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G^f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \int_{\Gamma} G^T(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) \frac{\partial G^f(\mathbf{y}, \mathbf{Z})}{\partial n_{\mathbf{Z}}} - G^f(\mathbf{y}, \mathbf{Z}) \frac{\partial G^T(\mathbf{x}, \mathbf{Z})}{\partial n_{\mathbf{Z}}} d\Gamma_{\mathbf{Z}}, \quad \mathbf{x} \text{ et } \mathbf{y} \in \Omega_f. \quad (16)$$

On peut écrire un système similaire à (12), pour obtenir G^T et \mathbf{u}_G sur la frontière Γ .

$$\begin{cases} \left(\frac{I}{2} - D_f \right) G^T + \rho_f \omega^2 S_f(\mathbf{u}_G \cdot \mathbf{n}) = G^f & \text{sur } \Gamma, \\ \left(\frac{(\mathbf{u}_G)_k}{2} + D_s^k \mathbf{u}_G \right) + S_s^k(G^T \mathbf{n}) = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (17)$$

Il en résulte que la fonction de Green adaptée G^T ne dépend que de la fonction de Green en espace libre, de la géométrie et des propriétés du milieu; elle est donc indépendante du terme source, une caractéristique que nous recherchions.

Difficultés numériques. Même si les méthodes d'équations intégrales sont bien développées dans la communauté de mécanique numérique, la résolution de ce problème couplé a mis en évidence plusieurs difficultés numériques spécifiques. Tout d'abord le système (17) est mal conditionné. Il en résulte qu'une résolution directe du système ne converge pas rapidement avec un solveur itératif et ne fournit pas des résultats précis. Une idée très simple à introduire le changement de variables suivant :

$$\mathbf{u}_G^s = \rho_f \omega^2 \mathbf{u}_G,$$

qui conduit au système bien conditionné

$$\begin{cases} \left(\frac{I}{2} - D_f \right) G^T + S_f(\mathbf{u}_G^s \cdot \mathbf{n}) = G^f & \text{sur } \Gamma, \\ \left(\frac{(\mathbf{u}_G^s)_k}{2} + D_s^k \mathbf{u}_G^s \right) + \rho_f \omega^2 S_s^k(G^T \mathbf{n}) = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (18)$$

Ensuite, une difficulté importante de ce travail réside dans le calcul des intégrales dites quasi-singulières, c'est-à-dire lorsque la source est très proche de la frontière. Alors que le cas des intégrales singulières est largement traité dans la littérature — car une mauvaise évaluation conduit à une solution imprécise — le cas quasi-singulier est moins documenté, bien qu'il puisse avoir un impact significatif dans certaines configurations. Dans notre contexte, celui des couches limites turbulentes, il n'est toutefois pas possible d'ignorer ce problème, et nous l'avons traité avec une attention particulière.

4 Illustration des performances

Pour valider la méthode basée sur les fonctions de Green adaptées, nous comparons nos résultats numériques à ceux d'une solution analytique pour un problème simple, i.e. une sphère. La sphère de rayon $a = 1\text{ m}$ est discrétisée avec un maillage de 2886 noeuds et 5768 éléments. La source \mathbf{y} est placée en $(0, 0, 2\text{ m})$, l'observateur \mathbf{x} en $(0, 0, 10\text{ m})$ et la fréquence varie de 20 à 700 Hz. Les résultats de la Figure 2, obtenus pour une sphère remplie de plastique placée dans l'eau, montrent un accord excellent entre les solutions analytiques et numériques.

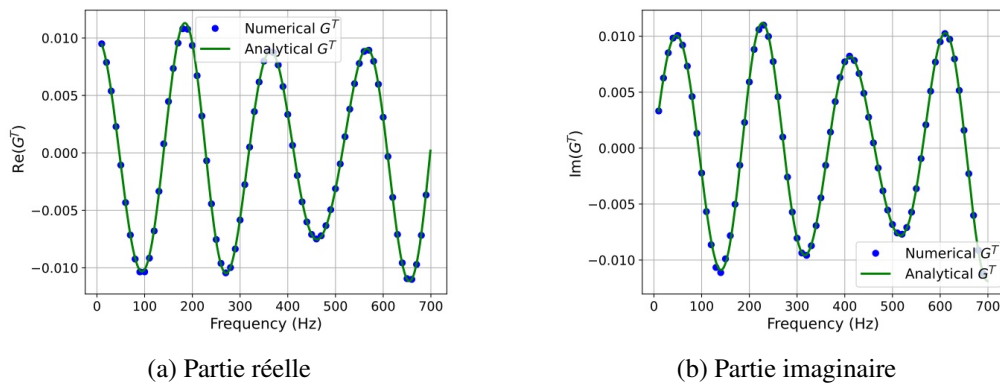


FIGURE 2 – Comparaison entre les fonctions de Green adaptées, numériques et analytiques, pour une sphère élastique. La sphère a un rayon de $a = 1\text{ m}$ et est remplie de plastique $\rho_s = 1800\text{ kg/m}^3$, $c_p = 2400\text{ m/s}$, $c_s = 1560\text{ m/s}$. La source \mathbf{y} est placée en $(0, 0, 2\text{ m})$ et l'observateur \mathbf{x} en $(0, 0, 10\text{ m})$.

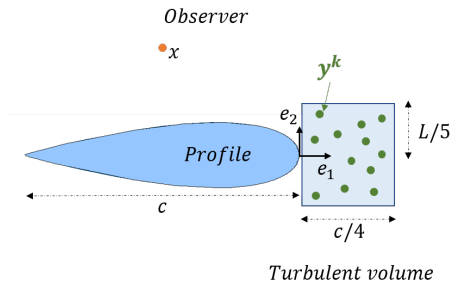
Pour terminer, nous nous rapprochons d'une excitation turbulente plus réaliste et nous utilisons les capacités de la méthode pour séparer les effets de la géométrie et des sources. Nous considérons ainsi une distribution discrète de nombreux quadrupôles, placés aléatoirement autour de l'obstacle avec des phases aléatoires, dans une zone définie comme le volume de turbulence (voir Fig. 3a). Notre approche permet de calculer d'abord la fonction de Green adaptée au NACA et ensuite, dans une phase moins gourmande en temps de calcul, de prendre en compte l'effet de chacune des sources.

Le cas étudié est un profil NACA0024 en aluminium ($\rho_s = 2700\text{ kg.m}^{-3}$, $c_p = 6200\text{ m.s}^{-1}$, $c_s = 3120\text{ m.s}^{-1}$), de corde $c = 0.23\text{ m}$ et de largeur $L = 0.53\text{ m}$, placé dans l'eau. L'excitation est appliquée au bord d'attaque via le volume de turbulence. L'observateur est placé en $\mathbf{x} = (-0.115\text{ m}, 2.25\text{ m}, 0)$. La Fig. 3b présente, pour $N_Q = 70$ quadrupôles, le champ diffracté pour le profil élastique pour des fréquences comprises entre 200 et 2500 Hz. On observe un premier pic autour de 600 Hz et un second en 2100 Hz correspondant aux deux premiers modes propres du profil élastique.

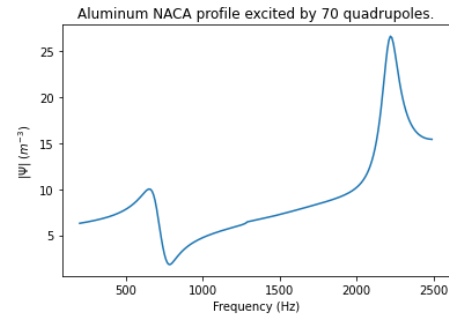
5 Conclusion et perspectives

Nous avons montré dans ce travail comment l'utilisation d'une fonction de Green adaptée permet de découpler les effets de la source et de la géométrie dans un problème d'interaction fluide-structure. Cette séparation offre un gain de calcul considérable lorsqu'un grand nombre de sources doit être étudié pour une géométrie fixe. Le cas traité ici repose sur un milieu homogène; pour des configurations plus réalistes, une perspective naturelle sera d'étendre l'approche à des milieux homogènes par couches.

La démarche proposée pourrait également être généralisée à d'autres équations aux dérivées partielles, comme celles de l'électromagnétisme; ou d'autres couplages multi-physiques.



(a) Répartition des quadrupôles dans le volume de turbulence.



(b) Champ diffracté par le profil élastique.

FIGURE 3 – Illustration du champ diffracté par un profil élastique placé dans l’eau, excité par $N_Q = 70$ sources quadrupolaires placées aléatoirement dans le volume de turbulence décrit à droite. L’observateur est situé en $\mathbf{x} = (-0.115\text{m}, 2.25\text{m}, 0)$.

Une autre piste prometteuse consiste à combiner cette approche avec des méthodes de réduction de modèle par projection (RBM, POD, etc.) afin d’introduire un second niveau d’accélération, par exemple en séparant géométrie et fréquence. La principale difficulté résidera dans l’évaluation de la robustesse des formulations intégrales de frontière vis-à-vis de ces techniques de projection.

Références

- [1] L. Pacaut, S. Chaillat, J.-F. Mercier, and G. Serre, Efficient boundary integral method to evaluate the acoustic scattering from coupled fluid–fluid problems excited by multiple sources, *Journal of Computational Physics*, vol. 524, p. 113736, 2025.
- [2] S. Chaillat, B. Cotté, J.-F. Mercier, G. Serre, and N. Trafny, Efficient evaluation of three-dimensional Helmholtz Green’s functions tailored to arbitrary rigid geometries for flow noise simulations, *Journal of Computational Physics*, vol. 452, 1 March 2022, article 110915.
- [3] D. Wilkes and A. Duncan, Acoustic coupled fluid–structure interactions using a unified fast multipole boundary element method, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 137, no. 4, pp. 2158–2167, 2015.
- [4] K. Yoshida, *Applications of Fast Multipole Method to Boundary Integral Element Method*, PhD thesis, Department of Global Environment Engineering, Kyoto University, 2001.