

# Métamodélisation par processus gaussiens de l'analyse vibratoire de rotors sous incertitudes et analyse de sensibilité aux paramètres

E. Dehillerin<sup>1,3</sup>, E. Denimal Goy<sup>2</sup>, J.-J. Sinou<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Inria, CMAP, Ecole Polytechnique, IPP, Palaiseau, France, erwan.dehillerin@inria.fr

<sup>2</sup> Inria, CMAP, Ecole Polytechnique, IPP, Palaiseau, France, enora.denimal-goy@inria.fr

<sup>3</sup> Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS), UMR 5513, Ecole Centrale Lyon, 36 Avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully, France, jean-jacques.sinou@ec-lyon.fr

**Résumé** — La connaissance précise des vitesses critiques de la dynamique d'un rotor est cruciale afin de prévenir ses déformations et son endommagement. Or ces grandeurs dépendent de différents paramètres, eux-mêmes sujets à des incertitudes. Ce travail cherche ainsi à étudier les propriétés dynamiques d'un rotor dont les incertitudes portent sur les paramètres de conception. Une métamodélisation par processus gaussiens permet de comprendre la propagation des incertitudes en dimension élevée et aboutit à une étude de sensibilité qui classe et catégorise les influences des paramètres.

**Mots clés** — Dynamique des rotors, Quantification d'incertitudes, Processus gaussiens, Sensibilité.

## Introduction

Les machines tournantes sont des composantes majeures en ingénierie mécanique comme dans l'aéronautique ou la production d'énergie avec les centrales nucléaires ou hydrauliques. Ces structures sont soumises à de fortes contraintes notamment de chargement et de vibrations qui tendent à réduire leur durée de vie [1, 3, 5]. Pour autant, leur rôle essentiel force les ingénieurs à mettre en place des outils pour comprendre leur comportement dynamique afin d'avoir un suivi de leur état de santé et garantir leur intégrité. L'obtention des vitesses critiques permet de connaître les vitesses de rotation de l'arbre correspondant à des amplitudes vibratoires potentiellement élevées et ainsi d'éviter l'endommagement prématuré de la structure. Par ailleurs, une estimation des amplitudes vibratoires aux passages des vitesses critiques permet d'avoir une vision sur ces aspects de déformations et contraintes maximales engendrées. Cependant, de nombreuses sources d'incertitudes dues à l'environnement, la mesure, la production ou l'usinage des pièces perturbent la détermination de ces propriétés. Il est alors nécessaire de quantifier l'impact de tels phénomènes et de disposer d'outils robustes à ces incertitudes.

Afin d'éviter de simuler toutes les configurations de rotors possibles, ce qui représenterait un coût numérique élevé, il est courant de recourir à des méthodes de métamodélisation. Construite en s'appuyant sur un nombre limité de simulations complètes de rotors, la métamodélisation permet la prédiction à moindre coût et pour tout rotor incertain de deux grandeurs d'intérêt, à savoir les vitesses critiques et amplitudes maximales de déformation de la structure survenant à ces mêmes fréquences. Des techniques basées sur l'expansion en polynômes de chaos [8] ou le krigeage [2] ont été explorées et même couplées afin d'adapter la modélisation à la nature des incertitudes et aboutir à de meilleurs résultats [2, 4].

Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'étude de ces quantités d'intérêt pour un rotor en présence d'un grand nombre d'incertitudes portant sur ses paramètres géométriques et mécaniques. Il propose d'exploiter les processus gaussiens pour propager et quantifier les incertitudes. Une analyse de sensibilité basée sur les indices de Sobol permet de conclure sur les paramètres les plus influents.

## 1 Description du système rotor étudié

Le rotor étudié est composé d'un arbre modélisé par des poutres d'Euler, de quatre disques rigides positionnés le long de l'arbre et de deux paliers linéaires et flexibles situés aux extrémités de l'arbre. Il est constitué d'acier, matériau linéaire, homogène et isotrope. Un schéma de la structure est proposé Figure 1. Dans la suite et en particulier dans la Table 1 donnant les valeurs nominales retenues des 20 paramètres

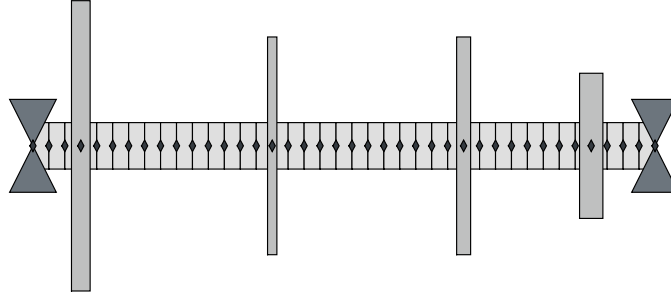


FIGURE 1 – Schéma du rotor étudié. Légende : □ Arbre, □ Disques ( $\times 4$ ), X Paliers ( $\times 2$ ), ◆ Nœuds ( $\times 40$ )

mécaniques et géométriques caractérisant le système rotor, l'indexation des différents éléments (nœuds, disques, paliers) s'effectue de gauche à droite. Selon cette convention, les disques 1, 2, 3, 4 sont placés respectivement aux nœuds 4, 16, 28, 36 (sur un total de 40).

Le rotor est discrétisé par la méthode des éléments finis, où chaque élément possède quatre degrés de liberté puisque seuls les mouvements de flexion sont permis : deux translations horizontales  $u$  et verticales  $v$  dans le plan orthogonal à l'axe de l'arbre ainsi que les deux rotations  $\theta$  et  $\psi$  selon ces axes. Chaque élément de l'arbre, dont le déplacement au nœud  $i$  dans le repère fixe est noté  $\delta^{(a,i)} = [u \ v \ \theta \ \psi]^T$ , est décrit à partir des équations du mouvement [3] :

$$\left( \mathbf{M}_R^{(a,i)} + \mathbf{M}_T^{(a,i)} \right) \ddot{\delta}^{(a,i)} + \left( \mathbf{C}^{(a,i)} + \omega \mathbf{G}^{(a,i)} \right) \dot{\delta}^{(a,i)} + \mathbf{K}^{(a,i)} \delta^{(a,i)} = \mathbf{0} \quad (1)$$

où  $\mathbf{M}_R^{(a,i)}$  et  $\mathbf{M}_T^{(a,i)}$  sont les matrices de masse de rotation et de translation associées au  $i^{\text{e}}$  élément.  $\mathbf{C}^{(a,i)}$  et  $\mathbf{G}^{(a,i)}$  correspondent aux matrices d'amortissement et gyroscopique associées alors que la matrice  $\mathbf{K}^{(a,i)}$  représente la contribution en raideur.

Par ailleurs, les quatre disques sont modélisés comme des disques rigides. En considérant le déplacement du disque placé au nœud  $j$  dans le repère fixe par la notation  $\delta^{(d,j)}$ , alors les équations du mouvement associés sont données par [3] :

$$\left( \mathbf{M}_R^{(d,j)} + \mathbf{M}_T^{(d,j)} \right) \ddot{\delta}^{(d,j)} + \omega \mathbf{G}^{(d,j)} \dot{\delta}^{(d,j)} = \mathbf{F}^{(d,j)} \quad (2)$$

où  $\mathbf{M}_R^{(d,j)}$  et  $\mathbf{M}_T^{(d,j)}$  sont les matrices de masse de rotation et de translation associées pour le disque  $j$ . Le vecteur  $\mathbf{F}^{(d,j)}$  définit la contribution de balourd pour le disque  $j$  pouvant se mettre sous la forme :

$$\mathbf{F}^{(d,i)}(t) = [m_u^i d_u^i \omega^2 \cos(\omega t + \phi^i) \quad m_u^i d_u^i \omega^2 \sin(\omega t + \phi^i) \quad 0 \quad 0]^T \quad (3)$$

où  $m_u^i$  et  $d_u^i$  correspondent à la masse et excentricité de balourds pour le disque  $i$ .  $\phi^i$  définit la position angulaire initiale du balourd par rapport à l'axe  $z$  et permet la prise en compte d'un déphasage entre les différents balourds.  $\omega$  correspond à la vitesse de rotation du rotor.

Les paliers flexibles sont modélisés par l'intermédiaire de ressorts ponctuels dans les deux directions de flexion. Après assemblage des différents éléments (arbre + disques + balourds + paliers), le système rotor peut s'écrire sous la forme [3] :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{C} + \omega \mathbf{G})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (4)$$

avec  $\mathbf{x}$  le vecteur de la déformée du rotor aux degrés de liberté. Les matrices de masse  $\mathbf{M}$  et gyroscopique  $\mathbf{G}$  comportent les contributions de l'arbre et des quatre disques. La matrice  $\mathbf{K}$  correspond aux contributions de l'arbre et des deux paliers.  $\mathbf{F}$  définit l'ensemble des excitations de type balourd sur les 4 disques.

Dans l'étude qui suit, l'amortissement de la structure est de type Rayleigh, s'écrivant comme une combinaison linéaire des matrices de masse et raideur, avec des taux de 1% appliqués aux modes 2 et 4. Les amplitudes des déformations sont calculées après placement d'un balourd de masse 100g sur le disque 1.

Paramètres	Symboles	Valeurs nominales	Unités
<b>Arbre</b>			
Masse volumique	$\rho_a$	7800	$kg \cdot m^{-3}$
Module de Young	$E_a$	$2,1 \cdot 10^{11}$	$N \cdot m^{-2}$
Longueur	$L_a$	1	m
Diamètre	$D_a$	0,04	m
<b>Disque 1</b>			
Masse volumique	$\rho_{d1}$	7800	$kg \cdot m^{-3}$
Épaisseur	$e_{d1}$	0,03	m
Diamètre	$D_{d1}$	0,25	m
<b>Disque 2</b>			
Masse volumique	$\rho_{d2}$	7800	$kg \cdot m^{-3}$
Épaisseur	$e_{d2}$	0,015	m
Diamètre	$D_{d2}$	0,1875	m

Paramètres	Symboles	Valeurs nominales	Unités
<b>Disque 3</b>			
Masse volumique	$\rho_{d3}$	7800	$kg \cdot m^{-3}$
Épaisseur	$e_{d3}$	0,0225	m
Diamètre	$D_{d3}$	0,1875	m
<b>Disque 4</b>			
Masse volumique	$\rho_{d4}$	7800	$kg \cdot m^{-3}$
Épaisseur	$e_{d4}$	0,0375	m
Diamètre	$D_{d4}$	0,125	m
<b>Palier 1</b>			
Raideur verticale	$K_{1v}$	$1 \cdot 10^6$	$N \cdot m^{-1}$
Raideur horizontale	$K_{1h}$	$1 \cdot 10^6$	$N \cdot m^{-1}$
<b>Palier 2</b>			
Raideur verticale	$K_{2v}$	$3 \cdot 10^6$	$N \cdot m^{-1}$
Raideur horizontale	$K_{2h}$	$3 \cdot 10^6$	$N \cdot m^{-1}$

TABLE 1 – Valeurs nominales des paramètres du rotor

Arbre		Disque 3		Palier 1		Palier 2	
Masse volumique	$\rho_a$	Masse volumique	$\rho_{d3}$	Raideur verticale	$K_{1v}$	Raideur verticale	$K_{2v}$
Module de Young	$E_a$	Épaisseur	$e_{d3}$	Raideur horizontale	$K_{1h}$	Raideur horizontale	$K_{2h}$
		Diamètre	$D_{d3}$				

TABLE 2 – Paramètres incertains du rotor

## 2 Propagation des incertitudes

### 2.1 Paramètres incertains

L'objectif de ce travail étant de montrer l'efficacité de la méthode en grande dimension tout en limitant les coûts de calculs, il est choisi de ne considérer incertain qu'un unique disque parmi les quatre afin également d'éviter des redondances. Les 9 paramètres incertains retenus sont regroupés dans la Table 2. La distribution de leurs incertitudes suit une loi uniforme définie sur un intervalle centré sur leur valeur nominale et de largeur  $\pm 10\%$  autour de cette valeur.

L'analyse des équations du système (Section 1) montre que les paramètres matériaux de l'arbre sont proportionnels aux matrices globales, laissant présager une relation linéaire entre ceux-ci et les vitesses critiques. Cependant, les contributions locales des raideurs des paliers ainsi que certains paramètres géométriques dont les matrices ne dépendent pas toujours linéairement interrogent sur leurs interactions et impacts à l'échelle de la structure. Ceci constitue autant de motivations à réaliser des études visant à mettre en avant le lien entre l'évolution de ces paramètres et le comportement vibratoire du système.

### 2.2 Processus gaussiens (*Gaussian Processes – GP*)

Les GP permettent de construire un métamodèle selon une approche bayésienne [6]. Un métamodèle est une fonction mathématique, d'entraînement coûteux mais d'évaluation gratuite, se substituant à une relation initiale complexe, implicite et nécessitant d'importantes ressources de calcul à chaque requête, ici associant les valeurs des paramètres du rotor aux deux quantités d'intérêt : vitesses critiques et amplitudes vibratoires. Il est alors plus aisé de réaliser des études de propagation d'incertitudes ou d'analyse de sensibilité. Un processus gaussien est défini par ses fonctions moyenne et covariance (appelée noyau), permettant respectivement d'associer une tendance générale aux résultats et de capter pour chaque paramètre d'entrée les comportements plus fins entre individus en fonction de leur corrélation. Ces fonctions dépendent de paramètres appelés hyperparamètres. La fonction de covariance permet de construire la matrice de covariance à partir des entrées. La vraisemblance traduit la capacité du métamodèle sélectionné à associer correctement l'ensemble des sorties aux entrées, en fonction des hyperparamètres. Ces derniers sont ainsi recherchés de manière à maximiser la vraisemblance pour déterminer le GP optimal. La vraisemblance est ensuite normalisée par la taille de la base d'apprentissage afin de la rendre indépendante de cette dernière. En effet, sa valeur ne s'interprète que par comparaison avec d'autres, obtenues pour différentes fonctions moyennes, noyaux et tailles de population.

## 3 Démarche

### 3.1 Plan d'expérience et convergence

Afin de propager les incertitudes et entraîner les métamodèles, une première étape est de choisir la méthode d'échantillonnage pour engendrer les populations. Les individus sont tirés selon la méthode répandue *Latin Hypercube Sampling – LHS*, version améliorée du tirage Monte Carlo car garantissant une couverture plus homogène de l'espace et donc une convergence plus rapide des résultats. Des tirages successifs, réalisés pour des tailles croissantes de population, montrent que les deux premiers moments statistiques des distributions des quantités d'intérêt sont convergés pour une population de 1000 individus. Cela signifie qu'alors les statistiques de dispersion des quantités d'intérêt englobent tous les individus générables dans ces conditions donc décrit correctement la réalité. Ce seuil peut servir d'indicateur pour le choix de la taille d'apprentissage du métamodèle. Pour cet échantillonnage de loi uniforme en dimension 9, les dispersions des grandeurs observées sont de forme normale, où l'étalement varie selon les modes de la structure.

### 3.2 Construction des métamodèles

L'espace des paramètres incertains est de dimension notée  $d$ , valant donc 9 ici. Un GP est construit pour chaque sortie – quantités d'intérêt et modes – à l'aide de la *toolbox Matlab* [6]. Ses fonctions moyenne et covariance sont choisies en fonction de la régularité de la sortie à approcher. Le choix s'effectue par recherche par grille, pour les moyennes entre les fonctions constante, linéaire et polynomiale de degré 2, et pour les covariances entre les noyaux gaussien, quadratique et de Matern. L'optimisation des hyperparamètres, distincts pour chaque dimension de l'espace, permet de maximiser la vraisemblance (sous-section 2.2). Finalement, le couple {moyenne, noyau} de vraisemblance la plus élevée est retenu. Cette étude est menée pour des tailles de populations croissantes. Bien qu'il en résulte une amélioration de la vraisemblance normalisée avec l'augmentation des tailles, la comparaison entre moyennes et noyaux est invariante d'une taille à l'autre.

On note  $m$  la fonction moyenne et  $k$  le noyau (de l'anglais *kernel*). Soit  $x, x' \in \mathbb{R}^d$  de coordonnées respectives  $(x_i)$  et  $(x'_i)$  avec  $i \in \llbracket 1, \dots, d \rrbracket$  des  $d$ -uplets définissant chacun une configuration du rotor. La distance  $D$  entre 2 individus est définie telle que  $D^2 = \sum_{i=1}^d \frac{(x_i - x'_i)^2}{l_i^2}$  où  $l_i$  est la longueur de corrélation associée à la dimension  $i$  de l'espace des paramètres incertains. Les hyperparamètres du noyau sont strictement positifs tandis que, s'agissant de polynômes, ceux de la moyenne ne sont pas contraints.

Le couple choisi pour les vitesses critiques est {constante + linéaire, quadratique} et s'écrit selon l'Équation 5 où  $\{c, (a_i), \sigma, \alpha, (l_i)\}$  sont les hyperparamètres.

$$m(x) = c + \sum_{i=1}^d a_i x_i \quad k(x, x') = \sigma^2 \left[ 1 + \frac{D^2}{2\alpha} \right]^{-\alpha} \quad (5)$$

Celui pour les maxima d'amplitudes est {constante + polynôme de degré 2, Matern  $\frac{5}{2}$ } et s'écrit selon l'Équation (6) où  $\{c, (a_i), (b_i), \sigma, (l_i)\}$  sont les hyperparamètres.

$$m(x) = c + \sum_{i=1}^d a_i x_i + \sum_{i=1}^d b_i x_i^2 \quad k(x, x') = \sigma^2 \left( 1 + \sqrt{5}D + \frac{5}{3}D^2 \right) \exp(-\sqrt{5}D) \quad (6)$$

Le couple {moyenne, noyau} retenu s'applique à tous les modes du fait des bonnes performances observées mais chaque métamodèle possède ses propres valeurs optimales d'hyperparamètre.

Il faut ensuite déterminer la taille de la population d'entraînement. Pendant la phase d'entraînement, lorsque les sorties de référence sont connues, la précision des métamodèles est mesurée par la *Root Mean Square Error – RMSE*, qui calcule l'erreur moyenne commise par le métamodèle entre ses prédictions et les références d'une base de validation. La vitesse de décroissance de l'erreur en fonction de la taille de l'apprentissage est une fonction des modes et des quantités observées, ce qui montre dès lors que les différentes sorties ne suivent pas exactement la même modélisation. Le choix d'une population d'entraînement de taille 1000 est retenu car satisfaisant à la fois les deux critères de faible erreur de prédiction et de bonne représentativité des individus, puis les hyperparamètres sont sauvegardés. La base de validation utilisée est commune afin de pouvoir comparer les résultats, et de grande taille, ici 5000.

### 3.3 Analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité cherche à établir un classement des variables d'entrées selon leur influence sur les sorties, ainsi qu'à distinguer la nature de ces influences selon qu'elles soient linéaires ou en interactions mutuelles. Étant basée sur des calculs statistiques, un grand nombre de données est requis, d'où le recours fréquent à un métamodèle préalablement construit. Cependant, c'est alors la sensibilité du métamodèle et non celle du modèle réel qui est calculée, ce qui impose que ce métamodèle représente la réalité avec précision. Les méthodes développées ici se basent sur une population de  $10^6$  individus.

Les indices de Sobol ne requièrent pas d'hypothèse sur la forme du modèle. Ils sont issus d'une méthode quantitative basée sur la décomposition de la variance de la sortie, applicable dès lors que les entrées sont indépendantes. On cherche la part de variance de chaque paramètre d'entrée dans la variance de la sortie en étudiant les fluctuations de la sortie quand on fixe un (ou plusieurs) paramètre(s), ce qui permet bien d'aboutir à une sensibilité globale. On se limite en général à deux classes d'indices : pour chaque paramètre  $i$ , l'indice d'ordre 1  $S_{1i}$  mesure son effet propre tandis que son indice total  $S_{Ti}$  englobe l'ensemble de sa contribution, c'est-à-dire seul mais aussi en interaction avec les autres et sous toutes ses formes. Les valeurs des indices évoluent dans le même sens que l'influence du paramètre. En notant  $Y$  la sortie,  $X_i$  le vecteur contenant les valeurs du  $i^e$  paramètre de toute la population et  $X_{-i} = (X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_d)$ , les indices de Sobol sont estimés à partir des expressions [7] :

$$S_{1i} = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}[Y|X_i])}{\text{Var}(Y)} \quad S_{Ti} = 1 - \frac{\text{Var}(\mathbb{E}[Y|X_{-i}])}{\text{Var}(Y)} = \frac{\mathbb{E}[\text{Var}(Y|X_{-i})]}{\text{Var}(Y)} \quad (7)$$

Dans le cas d'un modèle linéaire comme il peut être le cas ici, il est pertinent de calculer les indices *SRC*, qui donnent la part de variance totale de chaque paramètre expliquée par le meilleur modèle linéaire. Si leur somme, définie par le coefficient de détermination  $R^2$ , est proche de 1, alors ce modèle linéaire est une bonne représentation du phénomène étudié et  $SRC_i$  donne la part de variance totale attribuée au paramètre  $i$ . Dans le cas contraire, cet indice seul n'est pas représentatif car il ne fournit qu'une fraction de la sensibilité au paramètre et doit alors être complété par le modèle général du paramètre seul ( $S_{1i}$ ) ainsi que par les interactions de ce dernier avec les autres ( $S_{Ti}$ ).  $SRC_i$  est donc la part de sensibilité  $S_{1i}$  du paramètre expliquée par le modèle linéaire. Par construction,  $0 \leq SRC_i \leq S_{1i} \leq S_{Ti} \leq 1$ .

$$SRC_i = \frac{\text{Cov}(X_i, Y)^2}{\text{Var}(X_i)\text{Var}(Y)} \quad R^2 = \sum_{i=1}^d SRC_i \quad (8)$$

## 4 Résultats

### 4.1 Métamodélisation

On présente dans un premier temps les résultats obtenus pour la méta-modélisation des vitesses critiques et des maxima d'amplitudes. L'espace des incertitudes est illustré de manière à mettre en évidence des comportements intéressants : d'abord de dimension 1 avec  $K_{2h}$  sur la Figure 2 puis de dimension 9 sur la Figure 3, en comparant différents modes et tailles d'entraînement pour chaque quantité d'intérêt.

Sur la Figure 2, on observe pour ce paramètre incertain que la dépendance aux fréquences est linéaire et que celle aux maxima d'amplitudes est polynomiale, en cohérence avec les choix de métamodélisation. La base de validation est composée de 100 individus, taille suffisante en dimension 1. Les intervalles de confiance des prédictions se réduisent et la coïncidence entre prédictions et références s'améliore à mesure que la taille de la base d'apprentissage augmente. On retrouve la forme caractéristique des domaines de prédiction des GP, dans la mesure où ces derniers interpolent les points d'apprentissage donc les relient avec une variance nulle en ces points. Bien que les évolutions soient similaires d'un mode à l'autre, on peut remarquer que l'impact des incertitudes est différent sur chaque mode. Par exemple, l'amplitude maximale du mode 2 est plus impactée que celle du mode 1.

En dimension 9, comme il n'est plus possible de visualiser aisément la relation entrée/sortie, la précision du métamodèle s'observe désormais en traçant les prédictions en fonction des références comme sur la Figure 3 avec 5000 points de validation. L'objectif est que les points soient confondus avec la droite. La qualité de l'apprentissage s'améliore avec l'augmentation de la taille du plan d'expérience. Elle dépend des modes, avec comme on le voit une précision moindre sur les fréquences des modes 1 et

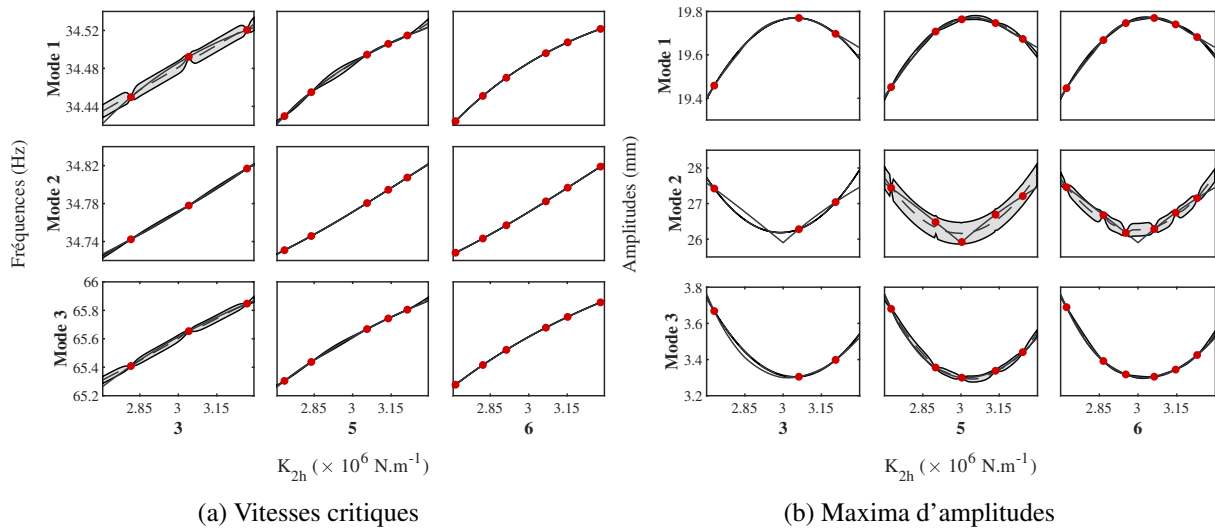


FIGURE 2 – Courbes de réponse lors d’incertitudes portant sur  $K_{2h}$  pour les 3 premiers modes (en ligne, indiqués à gauche en gras) et 3 tailles de populations d’entraînement (en colonne, indiquées en bas en gras). Légende : — Référence, - - Prédications, • Points d’apprentissage, □ Intervalles de confiance à 95%.

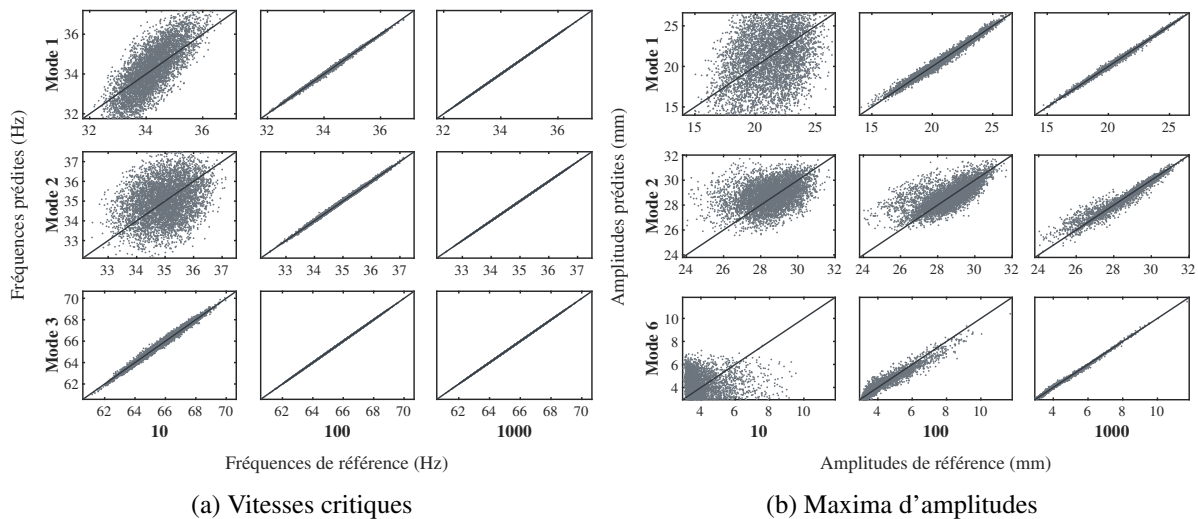


FIGURE 3 – Précision du métamodèle en dimension 9 pour les 3 premiers modes (en ligne, indiqués à gauche en gras) et 3 tailles de populations d’entraînement (en colonne, indiquées en bas en gras). Légende : — Droite de régression d’équation  $y = x$ , • Points de test.

2 pour une base d’apprentissage de taille 10, et sur les amplitudes du mode 2. On peut remarquer une convergence plus rapide pour les vitesses critiques que pour les amplitudes.

## 4.2 Analyse de sensibilité

Les Figures 4 et 5 donnent les sensibilités respectives des fréquences critiques et des maxima d’amplitude. Le classement global des paramètres du rotor selon leur influence sur les variations de la sortie s’obtient directement par la hauteur totale des barres correspondantes. Celle-ci donne la sensibilité totale  $S_T$  de la sortie au paramètre, qui peut se décomposer en différentes contributions. La part d’influence individuelle s’obtient avec les 2 bandes inférieures, dont la hauteur égale à  $S_1$  peut elle-même se décomposer entre une influence linéaire  $SRC$  et non linéaire  $S_1 - SRC$ . La bande supérieure complète cette sensibilité individuelle par la sensibilité liée uniquement aux interactions avec les autres paramètres, donc non linéaire par rapport à la sortie. Bien que des tendances proches puissent être observées au sein d’un même couple de modes, le niveau de sensibilité est fortement dépendant des modes, de même que sa nature.

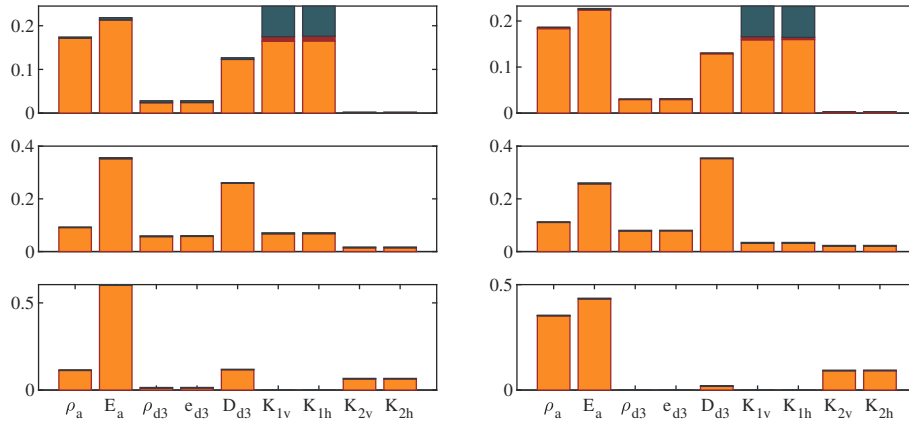


FIGURE 4 – Analyse de sensibilité des fréquences critiques (Modes 1 à 6 de gauche à droite et de haut en bas). Légende :  $SRC$ ,  $S_1 - SRC$ ,  $S_T - S_1$ .

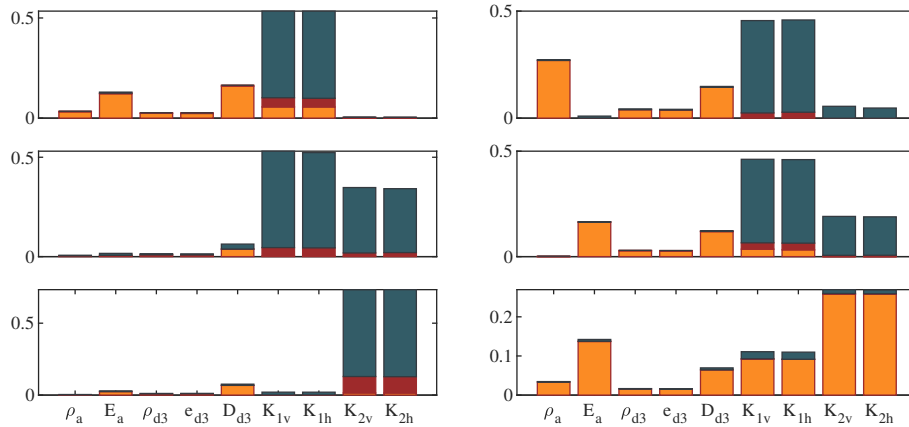


FIGURE 5 – Analyse de sensibilité des maxima d’amplitudes (Modes 1 à 6 de gauche à droite et de haut en bas). Légende :  $SRC$ ,  $S_1 - SRC$ ,  $S_T - S_1$ .

Les dispersions des vitesses critiques sont essentiellement dépendantes de la densité et de la raideur de l’arbre, avec une forte contribution des raideurs du palier 1 sur les modes 1 et 2, et également du diamètre du disque jusqu’au mode 4. La prédominance de  $SRC$  indique que le modèle est essentiellement linéaire. Les influences individuelles et non linéaires sont négligeables, comme en témoigne la faible représentation de  $S_1 - SRC$ . Seules les raideurs du palier 1 aux modes 1 et 2 sont le siège d’interactions. Ces interactions restent par ailleurs limitées à ces deux paramètres comme en témoigne l’égale hauteur des zones  $S_T - S_1$  et l’absence d’interactions ailleurs. Les impacts des deux raideurs du palier 2 sont également proches : très faibles hormis aux modes 5 et 6. Ce résultat d’égalité entre raideurs d’un même palier s’explique par la grande symétrie du rotor (sans les incertitudes, les raideurs de chaque palier sont égales). La forte inégalité de leur importance montre que les paliers peuvent avoir des impacts très différents selon leurs valeurs nominales et que la forme de leur influence varie fortement d’un mode à l’autre. Ces observations soulignent l’intérêt de considérer les paliers comme des paramètres de dimensionnement comme l’approche adoptée dans [2].

L’étude de sensibilité des maxima d’amplitudes met en évidence de tout autres comportements. Les paliers ont systématiquement un rôle de premier plan en comparaison à l’arbre et au disque, dont les influences restent linéaires. La prédominance du palier 1 pour les modes 1 à 4 s’explique par sa faible raideur – donc sa grande souplesse – mais aussi par sa proximité avec le balourd : il favorise et accompagne les grandes déformations. Les modes 1 à 5 sont très marqués par des interactions ayant lieu ici encore entre raideurs d’un même palier. Cette dépendance, de forme parabolique, est représentée Figure 2b. Les composantes individuelles non linéaires sont légèrement plus marquées que pour les fréquences. Le mode 6 diffère fortement des précédents dans la mesure où les sensibilités sont linéaires.

Modes	1	2	3	4	5	6	Modes	1	2	3	4	5	6
$R^2$	0,90	0,92	0,99	0,99	0,99	0,99	$R^2$	0,47	0,52	0,08	0,40	0,15	0,97

TABLE 3 – Coefficients de détermination des fréquences critiques (à gauche) et des amplitudes (à droite)

La Table 3 contient les coefficients de détermination des 6 modes pour les 2 quantités d'intérêt qui viennent en complément de l'analyse précédente pour quantifier la contribution linéaire. Les fréquences des modes 3 et supérieurs sont bien essentiellement linéaires ( $0,99 \leq R^2 \approx 1$ ) tandis que ce modèle n'explique qu'environ 90% de la variance totale des modes 1 et 2 en omettant les zones d'interactions dans le palier 1. À l'inverse, un tel modèle ne pourrait s'appliquer aux amplitudes – à l'exception du mode 6 – étant données les faibles valeurs de  $R^2$ . En effet, ne considérer que les valeurs de  $SRC$  de la Figure 5 ne permettrait pas d'appréhender la totalité des phénomènes.

## Conclusion

Ce travail a permis de mettre en avant les dépendances des vitesses critiques et maxima des amplitudes dans un espace incertain de grande dimension concernant les paramètres géométriques et mécaniques du rotor. Il s'appuie sur une reformulation du problème matriciel permettant une réduction du coût de calcul tout en conservant la variété des rôles de chaque paramètre. La métamodélisation par processus gaussiens s'est montrée précise dans la prédiction de ces deux grandeurs d'intérêt, pour toute dimension des incertitudes, jusqu'à aboutir à une analyse de sensibilité permettant de classer les paramètres et distinguant la nature de leurs effets sur les sorties : linéaires, non linéaires, en interactions avec d'autres paramètres identifiés. Cette analyse conclut que les vitesses critiques sont des fonctions essentiellement linéaires des entrées et principalement sensibles aux paramètres de l'arbre et du palier 1, ainsi qu'une contribution non négligeable du diamètre du disque. Ce comportement dépend toutefois du mode considéré. Les maxima d'amplitude sont nettement moins linéaires, principalement contrôlés par les raideurs des paliers de réponses paraboliques et en fortes interactions au sein d'un même palier. Ainsi, la prise en compte simultanée d'incertitudes portant sur des paramètres aux contributions variées et l'étude approfondie de leurs impacts sur les propriétés vibratoires ont permis une compréhension plus fine de la dynamique du rotor.

## Remerciements

Les auteurs et l'autrice remercient l'ANR pour son soutien financier dans le cadre du projet ANR JCJC MeMoRa n° ANR-23-CE51-0006.

## Références

- [1] D. Childs. *Turbomachinery Rotordynamics : Phenomena, Modeling, and Analysis*, John Wiley & Sons, 1993.
- [2] E. Denimal, J.-J. Sinou. *Advanced Kriging-based Surrogate Modelling and Sensitivity Analysis for Rotordynamics with Uncertainties*, European Journal of Mechanics - A/Solids, 90, 104331, 2021.
- [3] M.I. Friswell, J.E. Penny, S.D. Garvey, A.W. Lees. *Dynamics of Rotating Machines*, Cambridge University Press, 2010.
- [4] C. Fu, J.-J. Sinou, W. Zhu, K. Lu, Y. Yang. *A State-of-the-art Review on Uncertainty Analysis of Rotor Systems*, Mechanical Systems and Signal Processing, 183, 109619, 2023.
- [5] Y. Ishida, T. Yamamoto. *Linear and Nonlinear Rotordynamics : A Modern Treatment with Applications*, John Wiley & Sons, 2013.
- [6] C. E. Rasmussen, C. K. I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*, The MIT Press, 2006.
- [7] A. Saltelli, I.M. Sobol. *About the Use of Rank Transformation in Sensitivity Analysis of Model Output*, Reliability Engineering and System Safety, 50 (3), page225-page239, 1995.
- [8] E. Sarrouy, O. Dessombz, J.-J. Sinou. *Stochastic Analysis of the Eigenvalue Problem for Mechanical Systems using Polynomial Chaos Expansion – Application to a Finite Element Rotor*, Journal of Vibration and Acoustics, 134(5), 2012.