

Bifurcation Perturbée et Continuation

M. Potier-Ferry¹, P. Ventura¹, H. Zahrouni¹, M. Brun¹

¹ Université de Lorraine, CNRS, Arts et Métiers Institute of Technology, LEM3, F-57000 Metz, France, {michel.potier-ferry, pascal.ventura, hamid.zahrouni, michael.brun}@univ-lorraine.fr

Résumé — Cet article présente une démarche pour résoudre le problème suivant : comment obtenir la seconde branche solution voisine de la première mais disjointe quand on suppose que la première branche suivie est issue d'une bifurcation perturbée. Dans l'étude des problèmes non linéaires, il y a de nombreuses occasions où une telle configuration est soupçonnée à cause d'une accumulation de petits pas (par exemple en utilisant la Méthode Asymptotique Numérique comme méthode de continuation). L'idée présentée dans cet article est de s'appuyer sur la théorie de la bifurcation perturbée.

Mots clefs — Bifurcation perturbée, Continuation.

1. Introduction

Des systèmes élastiques très simples peuvent avoir des courbes de réponses extrêmement complexes dues à la coexistence d'un grand nombre de solutions pour un même chargement. Ces solutions multiples peuvent être associées à un nombre d'ondes variable ou à des variations du nombre d'ondes dans les problèmes de plissement de films minces, ce qu'on peut observer par exemple dans un article célèbre [1]. Cela peut perturber la modélisation numérique de ces plissements par une méthode de continuation, le suivi de courbes conduisant à de nombreux retours en arrière sans jamais atteindre le niveau de chargement souhaité. A titre d'illustration, la Figure 1 présente le diagramme de bifurcation du déplacement vertical d'un système film/substrat, au centre de la face supérieure du film, dans le cas d'un chargement uniaxial des faces latérales du film.

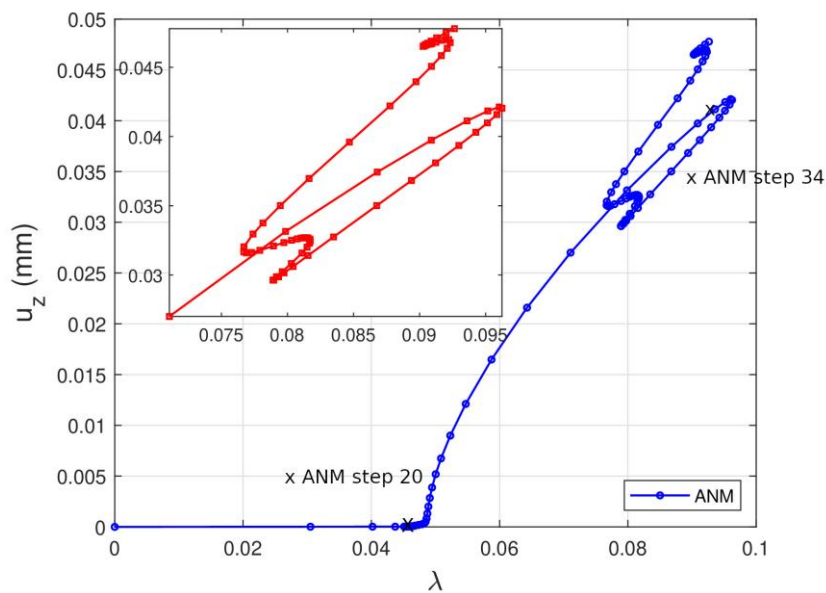


Figure 1 – Diagramme de bifurcation : déplacement vertical du centre d'un système film/substrat (face supérieure) avec un ratio de module d'Young entre le film et le substrat de 0.72×10^5 .

On peut contourner la difficulté en considérant un système pseudo-dynamique résolu jusqu'à obtention d'une solution stationnaire, voir par exemple [2-3]. C'est efficace mais sans toujours décrire convenablement les courbes de solutions.

Or il se trouve que divers résultats numériques suggèrent que, dans certains cas, les extrema des courbes de réponse calculées correspondent à des bifurcations légèrement perturbées, la théorie correspondante prévoyant l'existence de deux courbes voisines, mais disjointes. L'idée utilisée ici est d'aller chercher cette seconde branche en se basant sur les expressions asymptotiques obtenues dans le cadre de la théorie de la bifurcation.

2. Théorie de la bifurcation perturbée

On sait que les courbes de solutions au voisinage du point singulier ont l'allure représentée à la Figure 2 qui représente les branches solutions du problème non linéaire non perturbé ($\varepsilon = 0$) et perturbé ($\varepsilon = 0.05$) : trouver u en fonction du paramètre λ , vérifiant, $u^3 + (\lambda - 1)u + \lambda\varepsilon = 0$.

Avec une procédure de continuation, on connaît la branche bleue, on ignore la bifurcation parfaite (courbe verte) et on veut trouver au moins un point de la courbe située en face (courbe rouge), ce qui permettra de démarrer une continuation pour obtenir cette courbe en face.

La théorie de la bifurcation s'appuie sur des études locales autour du point de bifurcation par une méthode de projection appelée méthode de Lyapunov et Schmidt [4-6]. Au voisinage du point de bifurcation et dans le cas d'une bifurcation symétrique (le plus fréquent), les courbes de solutions s'expriment en fonction d'un paramètre de chemin noté a de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{bif}} \approx a\mathbf{u}_{\text{mode}} \\ -C_{\text{post}}a^3 + (\lambda - \lambda_{\text{bif}})a + C_{\text{pert}} \approx 0 \end{cases} \quad (1)$$

Où, λ est un paramètre du problème, λ_{bif} caractérisant la bifurcation, C_{post} et C_{pert} sont des constantes réelles représentant respectivement l'effet de la non-linéarité et de la perturbation, i.e. l'écart à la bifurcation parfaite (représentée par la courbe verte). Le vecteur \mathbf{u}_{mode} est le mode de bifurcation, i.e. le noyau de la matrice tangente au point singulier, le vecteur \mathbf{u}_{bif} est aussi lié à la bifurcation.

3. Identification des paramètres de bifurcation

Dans notre pratique numérique, les deux vecteurs \mathbf{u}_{bif} et \mathbf{u}_{mode} apparaissant dans les deux équations (1) sont inconnus, ainsi que les trois nombres réels C_{post} , λ_{bif} et C_{pert} . L'idée est d'identifier ces cinq quantités à partir de la courbe connue. Plus précisément, on identifiera ces paramètres vectoriels et scalaires à partir de la branche connue et plus précisément de N points $(\mathbf{u}_I, \lambda_I)_{0 \leq I \leq N}$ sélectionnés sur la première branche perturbée bleue (Figure 2).

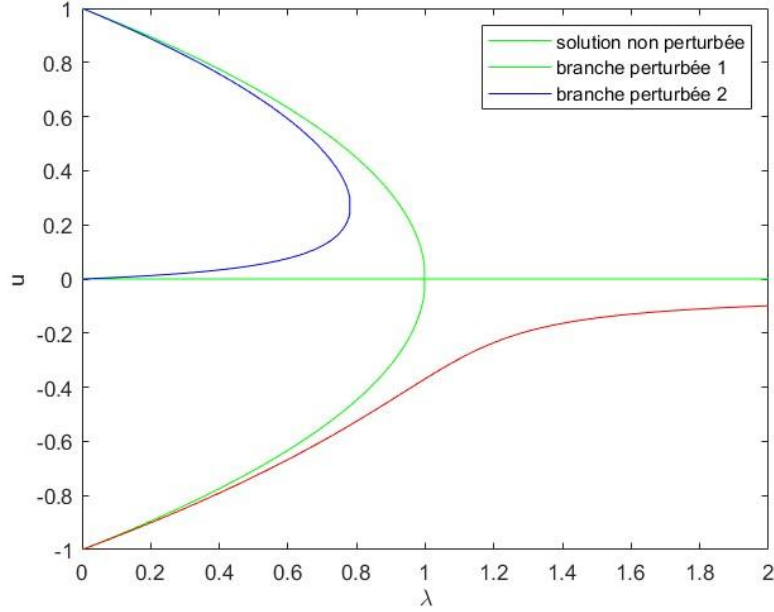


Figure 2 – Solution non perturbée (vert), et deux branches perturbées (bleu et rouge)

Le mode \mathbf{u}_{mode} est facile à obtenir en écrivant deux fois la première équation (1) :

$$\mathbf{u}_{\text{mode}} \simeq \mathbf{u}_I - \mathbf{u}_J, \text{ avec } I, J \in 1, N, I \neq J \quad (2)$$

Rappelons que le mode est un vecteur propre, donc défini à une constante près. Il y a de nombreuses procédures d'identification dans la littérature. Par exemple, si on veut que le système (1) soit satisfait au sens des moindres carrés, on va minimiser une fonction coût $F(\mathbf{u}_{\text{bif}}, C_{\text{post}}, \lambda_{\text{bif}}, C_{\text{pert}}, a_1, \dots, a_N)$ définie par :

$$F(\mathbf{u}_{\text{bif}}, C_{\text{post}}, \lambda_{\text{bif}}, C_{\text{pert}}, a_1, \dots, a_N) = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^N \|\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_{\text{bif}} - a_I \mathbf{u}_{\text{mode}}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^N \left(-C_{\text{post}} a_I^3 + (\lambda_I - \lambda_{\text{bif}}) a_I + C_{\text{pert}} \right)^2 \quad (3)$$

Notons que les paramètres de chemin $(a_I)_{I=1, \dots, N}$ font partie des inconnues : on sait que les points sont sur la courbe bleue de la Figure 2, mais nous ne savons pas pour quelle valeur de a . La minimisation par rapport au vecteur \mathbf{u}_{bif} conduit à une expression explicite (dès que les $(a_I)_{I=1, \dots, N}$ seront connus) :

$$\mathbf{u}_{\text{bif}} = \frac{1}{N} \left(\sum_{I=1}^N \mathbf{u}_I - \mathbf{u}_{\text{mode}} \sum_{I=1}^N a_I \right) \quad (4)$$

Il reste ensuite à minimiser par rapport aux $(N+3)$ inconnues restantes, par exemple en utilisant des méthodes de descente de gradient. La connaissance de la fonction $\lambda(a)$ permettra de choisir un point sur la seconde branche (en faisant attention aux domaines de définition du paramètre de chemin a des deux branches).

4. Application à la résolution numérique d'une équation différentielle ordinaire 1D non linéaire du second ordre

Pour illustrer la mise en application de la méthode d'identification des branches perturbées, présentée ci-dessus, nous allons maintenant nous intéresser à la résolution de l'Equation Différentielle Ordinaire (EDO) 1D non linéaire qui consiste à trouver la fonction $u(x)$ de classe C^2 définie sur le segment $[0,1]$ vérifiant l'EDO :

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} - (1-\lambda)u + u^3 + \lambda\varepsilon = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Le réel constant ε caractérise la bifurcation perturbée et λ est le paramètre réel de l'EDO. Nous avons choisi $\varepsilon = 0.05$ et la solution stationnaire de l'EDO est donnée, dans ce cas, par la Figure 2.

Nous avons choisi de discrétiser l'EDO avec la méthode des différences finies et de réaliser une continuation à partir de la solution nulle avec la méthode de Newton-Raphson et avec pilotage par longueur d'arc linéarisée.

Pour $\lambda = 0$, $u = 0$ est solution de (5). Du fait de la non linéarité de l'EDO, nous allons ensuite progresser par continuation à l'aide de la méthode de Newton-Raphson avec un pilotage en longueur d'arc. Tout d'abord, nous allons utiliser un schéma numérique à trois points pour l'approximation de la dérivée seconde. L'implémentation de la méthode numérique a été réalisée avec le logiciel MATLAB R2024a.

Détaillons ci-dessous les différentes étapes de la méthode numérique.

Tout d'abord, nous faisons une discrétisation du segment $[0,1]$ à pas constant $h = \frac{1}{N}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$.

Soient $x_i = (i-1)h$ avec $i \in \{1, \dots, (N+1)\}$, les $(N+1)$ points de discrétisation du segment $[0,1]$, avec, $x_1 = 0$, et, $x_{N+1} = 1$. Nous posons ensuite $u_i = u(x_i)$ avec $i \in \{1, \dots, (N+1)\}$. Les conditions aux limites de l'EDO se traduisent par $u_1 = u_{N+1} = 0$.

La discrétisation de l'EDO conduit au système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{u_3 - 2 \cdot u_2 + u_1}{h^2} - (1-\lambda)u_2 + u_2^3 + \lambda\varepsilon = 0 \\ \frac{u_{i+2} - 2 \cdot u_{i+1} + u_i}{h^2} - (1-\lambda)u_{i+1} + u_{i+1}^3 + \lambda\varepsilon = 0, \text{ pour } i \in \{2, \dots, N-2\} \\ \frac{-2 \cdot u_N + u_{N-1} + u_{N-2}}{h^2} - (1-\lambda)u_N + u_N^3 + \lambda\varepsilon = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Pour la suite, nous multiplierons toutes les équations de (6) par h^2 . Le système d'équation pourra s'écrire sous la forme $\mathbf{R}(\mathbf{v}, \lambda) = 0$, avec $\mathbf{R} : \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$, et, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N-1}$, $v_i = u_{i+1}$, $i \in \{1, \dots, N-1\}$.

La méthode de Newton-Raphson avec longueur d'arc linéarisée permet de passer d'une solution $(\mathbf{v}_n, \lambda_n)$ pour laquelle $\mathbf{R}(\mathbf{v}_n, \lambda_n) \approx 0$, à une solution $(\mathbf{v}_{n+1}, \lambda_{n+1})$ obtenue en linéarisant la relation (6) et en ajoutant une équation de longueur d'arc linéarisée. Plus précisément, nous allons rechercher $(\mathbf{v}_{n+1}, \lambda_{n+1})$ à partir de $(\mathbf{v}_n, \lambda_n)$ avec un petit incrément $(\Delta\mathbf{v}, \Delta\lambda)$ de telles sortes que la condition de longueur d'arc linéarisée soit :

$$\langle \Delta\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v} \rangle + \tilde{L}(\Delta\lambda)^2 = (\Delta s)^2, \text{ avec, } (\Delta s) \in \mathbb{R} \text{ (petit)} \quad (7)$$

Avec, \tilde{L} constante de normalisation.

La linéarisation de l'équation de (6) au voisinage de $(\mathbf{v}_n, \lambda_n)$ s'écrit sous la forme :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{(\mathbf{v}_n, \lambda_n)} \Delta\mathbf{v} + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \right|_{(\mathbf{v}_n, \lambda_n)} \Delta\lambda = 0 \quad (8)$$

Après l'étape de prédiction de Newton-Raphson avec longueur d'arc linéarisé, conduit à une nouvelle valeur des champs solutions : $\begin{cases} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta\mathbf{v} \\ \lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta\lambda \end{cases}$.

Si l'erreur résiduelle normalisée est supérieure à un seuil fixé, des itérations de correction de Newton-Riks sont mises en œuvre. L'incrément de correction $((\Delta\mathbf{v})_c, (\Delta\lambda)_c)$ vérifiant les relations :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{(\mathbf{v}_{n+1}, \lambda_{n+1})} (\Delta\mathbf{v})_c + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \right|_{(\mathbf{v}_{n+1}, \lambda_{n+1})} (\Delta\lambda)_c = -\mathbf{R}(\mathbf{v}_{n+1}, \lambda_{n+1}) \\ \langle (\Delta\mathbf{v})_c, \Delta\mathbf{v} \rangle + \tilde{L}(\Delta\lambda)_c \Delta\lambda = 0 \end{cases} \quad (9)$$

La Figure 3 est le tracé de la branche solution, évaluée au milieu du segment $[0, 1]$, obtenue à partir d'une initialisation avec la solution nulle. Dans le but d'évaluer le vecteur \mathbf{u}_{mode} selon la démarche de la section 2, la Figure 3 présente aussi un échantillonnage de la solution, évaluée au centre du segment $[0, 1]$, pour huit points $(\mathbf{u}_I)_{1 \leq I \leq 8}$ répartis au voisinage du point limite.

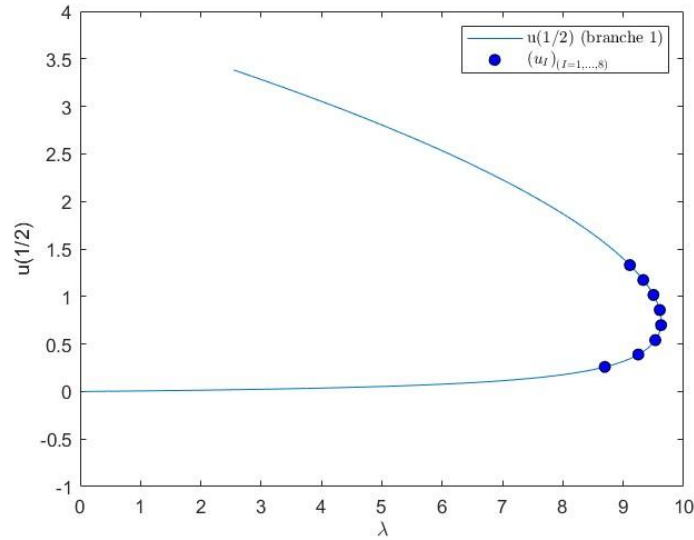


Figure 3 – Première branche solution obtenue à l’aide d’une prédiction de Newton-Raphson, une condition de longueur d’arc, et une correction de Newton-Riks, avec un échantillonnage de la solution pour 8 points au voisinage du point limite.

Le calcul des vecteurs unitaires $\left(\frac{\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_J}{\|\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_J\|} \right)_{1 \leq I < J \leq N}$ conduit à des vecteurs quasiment identiques. Il est alors aisé d’en déduire le vecteur \mathbf{u}_{mode} .

Nous avons ensuite utilisé la fonction **fsolve** de Matlab pour minimiser la fonction coût F introduite en (3). La convergence est assez rapide et conduit à l’identification des 11 paramètres : C_{post} , λ_{bif} , C_{pert} , a_1, \dots, a_8 . Pour vérifier les résultats obtenus, nous avons recalculé les champs solutions pour les huit points sélectionnés sur la première branche avec la première équation de (1), et comparé avec les champs solutions calculés par le modèle numérique. La comparaison est présentée sur la Figure 4 et montre de très bons résultats.

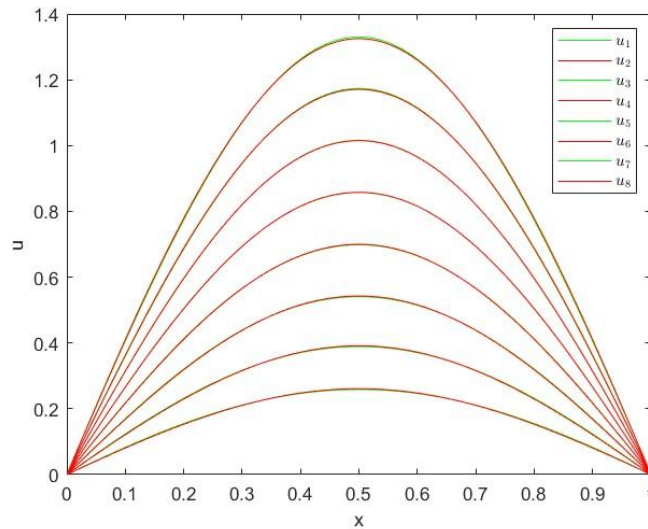


Figure 4 : Comparaison des champs u , en traits pleins rouge la solution du modèle numérique et traits pleins verts celle obtenue après minimisation de la fonction coût et utilisation de la formule de (1).

Il reste maintenant à obtenir un champ solution (\mathbf{u}, λ) sur la seconde branche perturbée. Pour cela, la seconde équation de (2), donne une relation entre toutes les valeurs des paramètres de chemin a et λ . Il s'agit de deux branches d'hyperbole. En choisissant un point de la seconde branche d'hyperbole, nous obtenons ainsi un point de la seconde branche. Il est alors nécessaire de diminuer l'erreur résiduelle normalisée pour la valeur de λ obtenue à l'aide d'une méthode de Newton.

Lorsque la précision demandée a été atteinte, nous avons alors un très bon point d'initialisation de la solution sur la seconde branche bifurquée, il est alors possible d'utiliser la même méthode de continuation que précédemment avec des itérations de corrections de Newton-Riks avec le paramètre de Newton-Raphson $\Delta s > 0$, puis $\Delta s < 0$ pour construire les deux parties de seconde branche solution. Finalement la Figure 5 présente le tracé des deux branches bifurquées solutions.

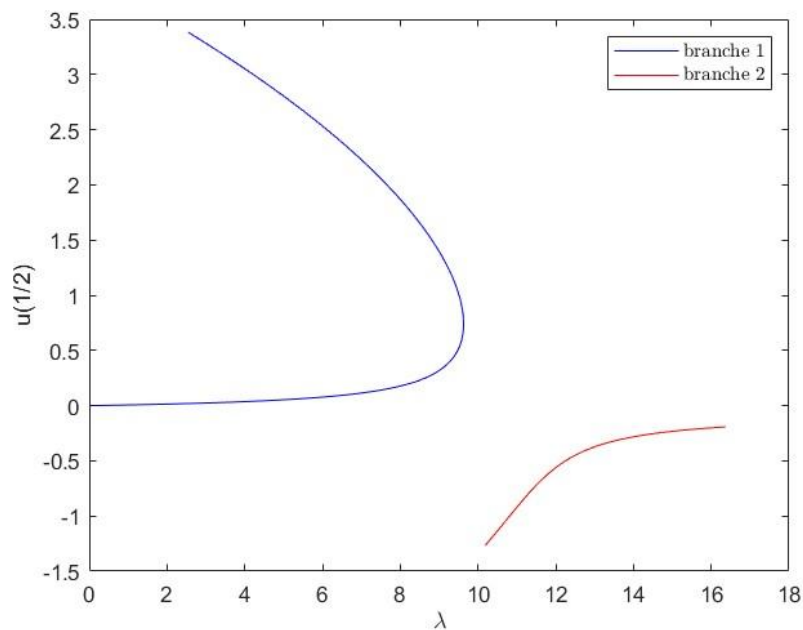


Figure 5 – Tracé des deux branches bifurquées solution calculées au milieu du segment en fonction de λ , en bleu la première branche et en rouge la seconde branche.

4. Conclusions

Grâce à l'étude du comportement local d'une bifurcation perturbée, nous avons réussi à obtenir des résultats très intéressants, dans le cas d'une EDO 1D non linéaire, sur l'obtention de la seconde branche solution bifurquée à partir de la première branche déterminée par une méthode de continuation telle que la méthode de Newton-Raphson avec longueur d'arc linéarisée.

L'objectif pour la suite de ces recherches est de s'intéresser à des problèmes d'instabilité en mécanique non linéaire du solide en couplant la technique présentée dans ce travail avec la Méthode Asymptotique Numérique [7-9].

Références

- [1] G. W. Hunt, M. A. Peletier, A. R. Champneys, P. D. Woods, M. Ahmer Wadee, C. J. Budd, G. J. Lord, Cellular buckling in long structures, *Nonlinear Dynamics* 21, 3–29, 2000.
- [2] M. Taylor, K. Bertoldi, D. J. Steigmann, Spatial resolution of wrinkle patterns in thin elastic sheets at finite strain, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 62, 163–180, 2014.

- [3] F. Xu, S. Zhao, C. Lu, M. Potier-Ferry, Pattern selection in core-shell spheres, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 137, 103892, 2020.
- [4] W. T. Koiter, On the stability of elastic equilibrium, PhD thesis, English translation NASA Techn. Trans., F. 10,883,1967, Delft University, 1945.
- [5] J. P. Keener, H. B. Keller. Perturbed bifurcation theory, *Archive for rational mechanics and analysis*, 50(3), 159-175, 1973.
- [6] M. Potier-Ferry. Perturbed bifurcation theory, *Journal of Differential Equations*, 33(1), 112-146, 1979.
- [7] N. Damil, M. Potier-Ferry. A new method to compute perturbed bifurcations: application to the buckling of imperfect elastic structures, *International Journal of Engineering Science*, 28(9), 943-957, 1990.
- [8] B. Cochelin, M. Medale. Power series analysis as a major breakthrough to improve the efficiency of asymptotic numerical method in the vicinity of bifurcations, *Journal of Computational Physics*, 236, 594-607, 2013.
- [9] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*, Hermès-Lavoisier, 2007.