

Modélisation de la rupture ductile par un modèle XFE-Cohésif 3D : Application à un acier de construction naval

J.-P. Créte¹

¹ ISAE-SUPMECA, Laboratoire Euler, Saint Ouen Sur Seine, France
jean-philippe.crete@isae-supmeca.fr

Résumé — Ce travail porte sur le développement d'une méthodologie capable de reproduire le processus de rupture ductile dans le contexte des grandes déformations. Celle-ci utilise le modèle de GTN pour décrire l'endommagement diffus et, une approche couplant la XFEM et un modèle de zone cohésive volumique afin de décrire la phase de localisation et de fissuration. La méthodologie a été implémentée dans Abaqus via une UEL. Celle-ci s'est montrée capable de reproduire les mécanismes de dégradation et de rupture d'un acier de construction naval dans le cas de structures d'essais de laboratoire.

Mots clés — Rupture ductile, XFE-Cohésif 3D, grandes transformations.

1 Introduction

Les métaux et alliages sont des matériaux très utilisés dans l'industrie, du fait notamment de leur très haute résistance/rigidité et de leur bonne ductilité. Cette dernière propriété leur confère une facilité de mise en forme par usinage/laminage/forgeage/emboutissage/..., et une capacité à dissiper une grande quantité d'énergie par déformations plastiques avant rupture. Le comportement des structures métalliques soumises à des surcharges accidentelles (collision, choc, ...) ou des chargements sévères (mise en forme, ...) est donc d'un grand intérêt d'un point de vue industriel. Afin de prévoir celui-ci, il est essentiel d'une part, de comprendre les mécanismes complexes qui se produisent dans le matériau/la structure et qui mènent à l'endommagement/ruine de la structure, et d'autre part, d'être capable de les reproduire numériquement au sein d'une méthodologie unifiée.

À température ambiante et au-delà, les métaux et alliages se comportent généralement de manière ductile. On appelle alors, rupture ductile, le processus responsable de l'endommagement et de la ruine de la structure. Il est généralement admis que ce processus est divisé en 3 étapes successives : 1) germination et croissance de micro-cavités (voir Figure 1-b), 2) coalescence des micro-cavités par striction interne et/ou cisaillement (voir Figure 1-c) au sein d'une bande étroite (mésio-fissure), 3) formation d'une macro-fissure (voir Figure 1-d). L'objectif de ce travail est de développer une méthodologie numérique

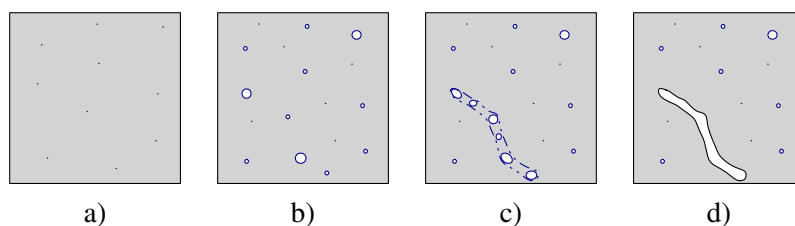


Figure 1: Processus de rupture ductile : a) état initial, b) germination et croissance de micro-cavités, c) coalescence des micro-cavités par striction interne et/ou cisaillement, d) macro-fissuration

3D unifiée basée sur la méthode des éléments finis capable de rendre compte macroscopiquement de ces différents mécanismes (voir Figure 1) dans le cadre des grandes transformations. L'analyse du comportement d'une grande structure métallique, comme un navire par exemple, par le biais de la méthode des éléments finis, nécessite d'utiliser un maillage grossier de l'ordre du décimètre afin d'obtenir des temps de calculs raisonnables. Cependant, les mécanismes à l'origine de l'endommagement/ruine de la structure sont de l'ordre du micromètres (à quelques centaines pour la méso-fissure). Par conséquent,

la modélisation du processus de rupture ductile est un problème multi-échelle, dont la difficulté est d'être capable de décrire les phénomènes microscopiques visibles sur la Figure 1, dans le contexte des éléments finis, en utilisant une taille de maille la plus grande possible tout en garantissant l'objectivité des résultats. Dans cette optique, la méthodologie proposée ici utilise le modèle de plasticité microporeuse de GTN pour décrire l'endommagement diffus (voir Figure 1-b), et, une approche couplant la XFEM et un modèle de zone cohésive volumique afin de décrire la phase de localisation (voir Figure 1-c) et de fissuration (voir Figure 1-d). Une attention particulière est portée au critère de transition entre endommagement diffus et localisation ainsi qu'à la description de la phase de coalescence des micro-cavités au travers de la loi cohésive.

La méthodologie numérique est décrite dans le chapitre 2, et des applications de cette méthode sur des structures d'essais de laboratoire dans le cas d'un acier de construction naval sont présentées dans le chapitre 3. Des conclusions et perspectives à ce travail sont apportées dans le chapitre 4.

2 Modèle XFE-Cohésif 3D

On détaille ici la méthodologie numérique développée dans le cadre de ce travail. On présente tout d'abord la formulation éléments finis qui est utilisée. Le modèle de plasticité microporeuse de GTN permettant de traduire l'endommagement diffus (voir Figure 1-b) est ensuite décrit, puis, le critère de transition vers la phase de localisation. Enfin, on s'intéresse à la loi cohésive permettant de décrire la phase de coalescence/localisation (voir Figure 1-c).

2.1 Formulation éléments finis

Dans le contexte des grandes déformations dans lequel s'inscrit ce travail, le choix a été fait d'adopter une formulation lagrangienne actualisée en utilisant un algorithme objectif incrémental [3]. Le tenseur des contraintes de Cauchy est alors exprimé dans la configuration courante tel que :

$$\tilde{\sigma}_{t+\Delta t} = \tilde{Q}_\Delta \cdot \tilde{\sigma}_t \cdot \tilde{Q}_\Delta^T + \Delta t \tilde{L}^t : \tilde{Q}_\delta \cdot \tilde{D}_{t+\Delta t/2} \cdot \tilde{Q}_\delta^T \quad (1)$$

avec $\tilde{\sigma}_t$ et $\tilde{\sigma}_{t+\Delta t}$ les tenseurs des contraintes de Cauchy dans la configuration précédente et courante respectivement, Δt l'incrément de temps, \tilde{L}^t l'opérateur tangent élasto-plastique, $\tilde{D}_{t+\Delta t/2}$ le tenseur taux de déformation Eulérien au temps $t + \Delta t/2$, et, \tilde{Q}_Δ et \tilde{Q}_δ sont définis comme :

$$\tilde{Q}_\Delta = \Delta \tilde{R} \quad \tilde{Q}_\delta = \Delta \tilde{R}_{t+\Delta t/2} \quad (2)$$

avec $\Delta \tilde{R}$ et $\Delta \tilde{R}_{t+\Delta t/2}$ qui sont obtenus à partir de la décomposition polaire de $\Delta \tilde{F}$ (gradient de transformation entre t et $t + \Delta t$) et $\Delta \tilde{F}_{t+\Delta t/2}$ (gradient de transformation entre t et $t + \Delta t/2$) respectivement. Afin de traiter le problème de verrouillage volumique, la méthode F-bar [2] est utilisée dans ce travail.

Pour décrire la phase de localisation et de fissuration, on utilise ici un modèle XFE-cohésif [5]. Dans la XFEM en utilisant la variante de la base décalée [12], on exprime le champ de déplacement tel que :

$$u = \mathbf{N}\alpha + \mathbf{N}^*\beta \quad (3)$$

avec α, β représentant les déplacements nodaux des degrés de liberté standards et enrichis, \mathbf{N} la matrice des fonctions d'interpolation, et \mathbf{N}^* :

$$\mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} (H(x) - H_1)N_I & 0 & 0 & (H(x) - H_2)N_{II} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & (H(x) - H_1)N_I & 0 & 0 & (H(x) - H_2)N_{II} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & (H(x) - H_1)N_I & 0 & 0 & (H(x) - H_2)N_{II} & \dots \end{bmatrix} \quad (4)$$

où $H(x)$ est la fonction d'Heaviside qui vaut +0.5 si le point est situé au-dessus de la fissure et -0.5 si le point est situé en-dessous de la fissure, et où, H_i correspond à la valeur de la fonction au noeud i . Les efforts intérieurs sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{int} \\ \mathbf{F}_{int}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_V \mathbf{B}^T \tilde{\sigma}_{t+1} dV \\ \int_V \mathbf{B}^{*T} \tilde{\sigma}_{t+1} dV \end{Bmatrix} \quad (5)$$

avec $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{t+1}$ le tenseur des contraintes de Cauchy écrit sous forme vectorielle, et, \mathbf{B} et \mathbf{B}^* les matrices contenant respectivement, les dérivées des fonctions d'interpolation (par rapport à la configuration courante) de la partie standard et de la partie enrichie. La zone cohésive est insérée dans la XFEM pour créer une discontinuité forte "cohésive", conduisant à l'ajout d'une contribution dans la partie enrichie des efforts intérieurs :

$$\mathbf{F}_{int}^* = \int_V \mathbf{B}^{*T} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{t+1} dV + F_{coh} \quad (6)$$

avec F_{coh} les efforts cohésifs définis tels que :

$$F_{coh} = - \int_V \mathbf{B}^{*T} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{t+1}^{coh} dV \quad (7)$$

avec $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{t+1}^{coh}$ le tenseur des contraintes cohésives écrit sous la forme d'un vecteur. À l'amorçage de la bande de localisation ($t = t_{loc}$) :

$$\int_V \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{t=t_{loc}}^{coh} dV = \int_V \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{t=t_{loc}} dV \quad (8)$$

Pour intégrer les différentes équations, l'approche proposée par Nikolakopoulos [8] ne nécessitant pas de projection des variables d'état, est utilisée.

2.2 Modélisation de l'endommagement diffus

Afin de décrire la germination et la croissance des micro-cavités (voir Figure 1-b) au sein du matériau, on utilise le modèle de GTN [4][10]. Le potentiel plastique s'écrit :

$$\Phi_{GTN} = \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y} \right)^2 + 2q_1 f \cosh \left(-\frac{3}{2} q_2 \frac{p_m + p_r}{\sigma_y} \right) - (q_1 f)^2 - 1 = 0 \quad (9)$$

avec σ_{eq} la contrainte équivalente de Von Mises, σ_y la contrainte d'écoulement, f la fraction volumique des micro-cavités, p_m la pression hydrostatique, p_r une variable équivalente à une pression cinématique permettant de décrire la croissance de vides en cisaillement [6], et, q_1 et q_2 des constantes. L'écroutissage isotrope est décrit via une loi de Voce :

$$\sigma_y = \sigma_0 + \sigma_{inf} \left((1 - \exp(-\alpha \kappa))^\beta \right) \quad (10)$$

avec σ_0 la limite d'élasticité initiale du matériau, κ la déformation plastique cumulée, et, σ_{inf} , α et β des constantes matériaux. Le taux de porosité f est décomposé en deux contributions :

$$\dot{f} = \dot{f}_n + \dot{f}_g = A_n \dot{\kappa} + (1 - f) D_v^p \quad (11)$$

avec \dot{f}_n la contribution liée à la germination des micro-cavités et \dot{f}_g celle liée à la croissance des micro-cavités. D_v^p représente la contribution volumique du taux de déformation plastique et A_n est défini tel que :

$$A_n = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\kappa - \kappa_N}{s_N} \right)^2 \right) \quad (12)$$

avec f_N la fraction volumique maximale de germination, κ_N la déformation plastique à la vitesse maximale de germination des micro-cavités et s_N l'écart type. p_r est définie telle que :

$$p_r = b(f - 1) \quad (13)$$

avec b une propriété du matériau.

2.3 Critère de transition entre endommagement diffus et localisation

Le passage d'un endommagement diffus à la phase de localisation (passage de b à c sur la Figure 1) est conditionné par une porosité critique f_c . Pour identifier l'orientation du plan de localisation, on se base ici sur les travaux de Nikolakopoulos [9]. Le choix de l'orientation du plan est déduit de l'état de contrainte et rend compte de la compétition entre Mode I et Mode II. Dans le cas d'une localisation en Mode I,

l'orientation de la bande est celle qui maximise la contrainte de traction alors que dans le cas d'une localisation en Mode II, l'orientation de la bande est celle qui maximise la contrainte de cisaillement. Afin de discerner le mode de localisation, on se base ici sur le taux de triaxialité des contraintes. Dès lors que le taux de triaxialité est en-dessous d'une valeur critique T_{trans} , alors la localisation est en mode I, et dans le cas contraire, la localisation est en mode II. À noter dès qu'un élément est localisé, on suppose que la porosité au sein de cet élément ne peut plus évoluer ($\dot{f} = 0$). Dans le cadre de ce travail, on ne considère pas de zone de transition entre mode I et mode II. Cependant, dans la méthodologie présentée ici, il est tout à fait possible de tenir compte d'une zone de transition en se basant par exemple sur l'approche proposée par Nikolakopoulos [9].

Dans ce travail, l'étape d'amorçage/propagation de la bande de localisation a lieu en post-traitement de l'incrément courant, permettant ainsi, de faciliter la convergence du problème en découplant la méthode de propagation et la résolution du problème mécanique. Afin d'assurer plus de stabilité numérique lors de l'insertion de la zone cohésive dans la XFEM lors de l'incrément suivant, l'approche proposée par [7] est utilisée. Celle-ci consiste à imposer un incrément "d'équilibrage" dès lors qu'un ou plusieurs éléments finis se localisent. Lors de cet incrément, les conditions aux limites sont figées et on considère que le comportement de la structure est purement élastique.

2.4 Modélisation de la phase de localisation

Pour décrire la phase de localisation (voir Figure 1-c), on utilise ici une loi cohésive dans le cadre d'un modèle XFE-cohésif volumique [5] (voir équations 6 et 7). La particularité de cette loi cohésive est qu'elle est inspirée des lois de comportement constitutives élasto-plastiques. On retrouve alors la notion de tenseur des contraintes (noté ici $\tilde{\sigma}_{t+1}^{coh}$) contrairement aux approches cohésives classiques où l'on utilise le vecteur de traction. Toutes les quantités exprimées dans la base du plan de localisation (voir Figure 2) sont notées avec un tilde au-dessus. On introduit dans cette loi cohésive volumique un tenseur d'ordre 2

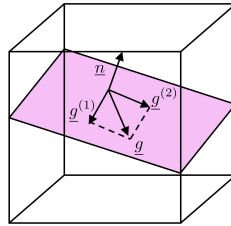


Figure 2: Élément fini coupé par une bande cohésive

qui contient les incréments des sauts de déplacement au travers de la bande cohésive tel que :

$$\Delta \tilde{U}_{coh} = \begin{bmatrix} \Delta \delta_n & \Delta \delta_{g(1)} & \Delta \delta_{g(2)} \\ \Delta \delta_{g(1)} & 0 & 0 \\ \Delta \delta_{g(2)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

On décompose le tenseur des contraintes cohésives en deux contributions :

$$\tilde{\sigma}^{coh} = {}^s \tilde{\sigma}^{coh} + {}^o \tilde{\sigma}^{coh} \quad (15)$$

avec ${}^s \tilde{\sigma}^{coh}$

$${}^s \tilde{\sigma}^{coh} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11}^{coh} & \tilde{\sigma}_{12}^{coh} & \tilde{\sigma}_{13}^{coh} \\ \tilde{\sigma}_{21}^{coh} & 0 & 0 \\ \tilde{\sigma}_{31}^{coh} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

et ${}^o \tilde{\sigma}^{coh}$

$${}^o \tilde{\sigma}^{coh} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_{22}^{coh} & \tilde{\sigma}_{23}^{coh} \\ 0 & \tilde{\sigma}_{32}^{coh} & \tilde{\sigma}_{33}^{coh} \end{bmatrix} \quad (17)$$

avec ${}^s \tilde{\sigma}^{coh}$ la partie "surfactive" du tenseur des contraintes que l'on retrouve habituellement dans les modèles de zone cohésive, et ${}^o \tilde{\sigma}^{coh}$ la partie "volumique" qui est généralement négligée. Le tenseur des

rigidités élastiques de la bande cohésive noté $\tilde{C}_{\sim coh}^e$ est défini par : $\tilde{C}_{coh1111}^e = \tilde{C}_{coh2222}^e = \tilde{C}_{coh3333}^e = E_n$ et $\tilde{C}_{coh1212}^e = \tilde{C}_{coh1313}^e = \tilde{C}_{coh2121}^e = \tilde{C}_{coh2323}^e = \tilde{C}_{coh3131}^e = \tilde{C}_{coh3232}^e = E_g$. En supposant un incrément de contrainte purement élastique, on définit alors $\Delta \tilde{\sigma}^{coh}$ tel que :

$$\Delta \tilde{\sigma}^{coh} = \tilde{C}_{\sim coh}^e : \Delta \tilde{U}_{\sim coh} \quad (18)$$

On définit un potentiel de dissipation Φ_{coh} inspiré des travaux de Kachanov et ne dépendant que de $s \tilde{\sigma}^{coh}$ tel que :

$$\Phi_{coh} = F_{eq} - (1 - D) F_0 = 0 \quad (19)$$

avec F_{eq} une contrainte équivalente qui est définie par :

$$F_{eq} = \sqrt{s \tilde{\sigma}^{coh} : s \tilde{\sigma}^{coh}} \quad (20)$$

F_0 peut être lié à la résistance de la bande cohésive avant l'initiation de la décohésion. Par conséquent, il est égal à F_{eq} au début de la localisation. La variable d'endommagement D est définie telle que :

$$D = \left(\frac{K_{eq_{t+\Delta t}}}{\Delta_c} \right)^{n_{coh}} \quad (21)$$

avec n_{coh} et Δ_c des paramètres liés au matériau, et, $K_{eq_{t+\Delta t}}$ le déplacement équivalent à l'instant courant :

$$K_{eq_{t+\Delta t}} = K_{eq_t} + \sqrt{\max(0, \Delta \delta_n)^2 + 2\Delta \delta_g^{(1)2} + 2\Delta \delta_g^{(2)2}} \quad (22)$$

$o \tilde{\sigma}^{coh}$ à l'instant courant est défini tel que :

$$o \tilde{\sigma}_{\sim t+\Delta t}^{coh} = (1 - D) o \tilde{\sigma}_{\sim t=t_{loc}}^{coh} \quad (23)$$

Dès que D atteint une valeur critique notée D_c (considérée comme une propriété du matériau), il y a décohésion/rupture totale de l'élément ($F_{coh} = 0$ dans l'équation 6).

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse en particulier à des chargements impliquants des taux de triaxialité modérés à élevés (aux alentours de 0.3 à 1.5). En s'inspirant des travaux de Bao et Wierzbicki [1], on suppose que Δ_c (voir équation 21) dépend du taux de triaxialité des contraintes. On définit Δ_c tel que

$$\Delta_c = \Delta_c^A \left(\Delta_c^B \left(\frac{1}{3} + \left| \eta - \frac{1}{3} \right| \right) + \Delta_c^C \right)^{\Delta_c^D} \quad (24)$$

avec Δ_c^A , Δ_c^B , Δ_c^C et Δ_c^D , des paramètres liés au matériau, et, η le taux de triaxialité des contraintes. On suppose alors que Δ_c atteint un pic pour η égal à $\frac{1}{3}$ (correspondant au cas d'une éprouvette lisse) et que son évolution est symétrique en deçà et au-delà de cette valeur.

3 Application

La méthodologie a été implémentée en tant qu'élément fini utilisateur (UEL) dans le code de calculs commercial par éléments finis Abaqus. Trois types d'éprouvettes sans fissure préexistante ont été testées (voir Figure 3) permettant d'obtenir des taux de triaxialité modérés à élevés (aux alentours de 0.3 à 1.5). À noter que pour l'éprouvette CT, uniquement la moitié de celle-ci a été modélisée du fait de la présence d'un plan de symétrie suivant l'épaisseur. Le matériau de l'étude est un acier de construction naval (DH36). Les paramètres utilisés dans le modèle de GTN sont indiqués dans le Tableau 1 (avec E le module de Young, ν le coefficient de Poisson et f_0 la porosité initiale), et les paramètres liés aux critères d'amorçage et au modèle cohésif dans le Tableau 2 (avec f_{max} la porosité maximale admissible au sein d'un élément). Afin de vérifier que les résultats numériques sont objectifs par rapport au maillage, trois tailles de mailles ont été testées pour chaque éprouvette (M1 correspond au maillage le plus grossier avec 3 éléments dans l'épaisseur, M2 le maillage intermédiaire avec 6 éléments dans l'épaisseur et M3

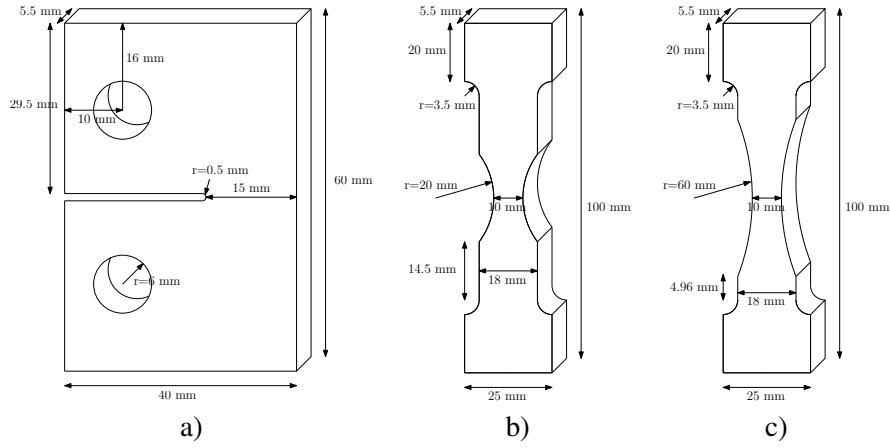


Figure 3: Éprouvettes de l'étude : a) CT, b) droite entaillée R1 et c) droite entaillée R2

E (MPa)	ν	σ_0 (MPa)	σ_{inf} (MPa)	α	β	f_0	f_N	S_N	κ_N	b (MPa)	q_1, q_2
210000	0.33	360	420	5.5	0.9	0.001	0.04	0.05	0.1	100	1

Table 1: Paramètres utilisés dans le modèle de GTN

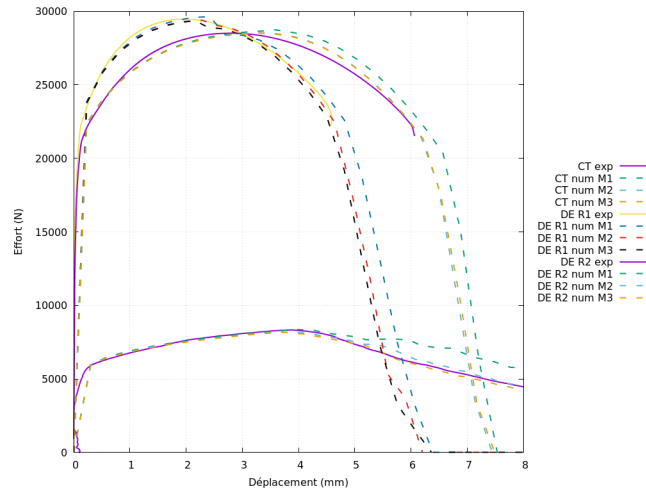


Figure 4: Évolution de la force en fonction du déplacement

le maillage le plus fin avec 9 éléments dans l'épaisseur de chaque éprouvette). Sur la Figure 4 est tracée l'évolution de la force en fonction du déplacement pour chaque éprouvette. On peut constater que les résultats avec les maillages M2 et M3 sont quasiment identiques et que l'on arrive bien à reproduire les résultats expérimentaux. Sur les figures 5 et 6 on peut voir les faciès de rupture obtenus pour chaque éprouvette (dans le cas des résultats numériques, uniquement ceux obtenus avec le maillage M2 sont affichés). On observe (voir figure 5) une rupture en mode I pour l'éprouvette CT, et, une rupture en mode II pour les deux autres éprouvettes. On peut constater que le modèle numérique (voir figure 6) est capable de reproduire les faciès de rupture obtenus expérimentalement.

f_c	f_{max}	T_{trans}	E_n (N/mm ³)	E_g (N/mm ³)	Δ_c^A (mm)	Δ_c^B	Δ_c^C	Δ_c^D	n_{coh}	D_c
0.045	0.07	0.55	1000	500	3.9828	0.3368	0.8535	-13.1871	2	0.35

Table 2: Paramètres liés aux critères d'amorçage et au modèle cohésif

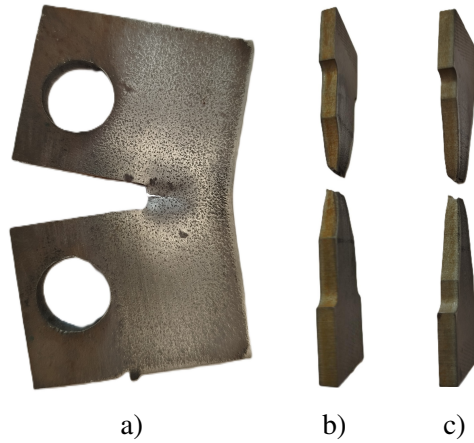


Figure 5: Faciès de rupture obtenus expérimentalement : a) CT, b) droite entaillée R1 et c) droite entaillée R2

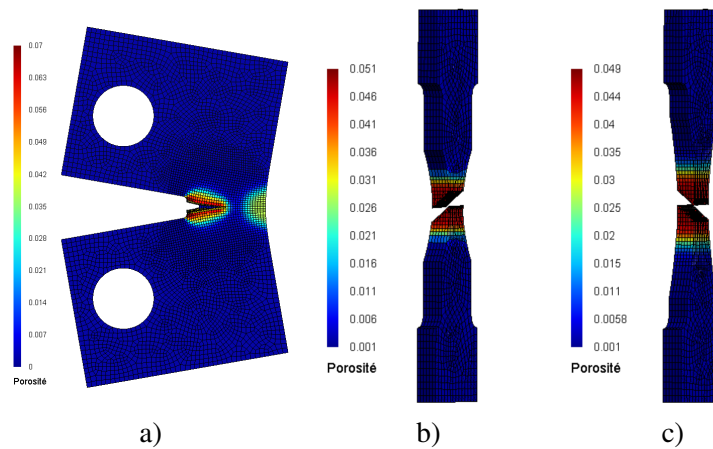


Figure 6: Faciès de rupture obtenus numériquement : a) CT , b) droite entaillée R1 et c) droite entaillée R2

4 Conclusions et Perspectives

Ce travail porte sur le développement d'une méthodologie capable de reproduire le processus de rupture ductile dans le contexte des grandes transformations. Celle-ci utilise le modèle de GTN pour décrire l'endommagement diffus et, une approche couplant la XFEM et un modèle de zone cohésive volumique afin de décrire la phase de localisation et de fissuration. Il a été montré que cette méthodologie est capable de reproduire numériquement et objectivement vis-à-vis de la taille de maille, la réponse mécanique globale d'un acier de construction naval dans le cas de structures typiques de laboratoire. Le prochain objectif est de confronter le modèle à des simulations plus complexes comme par exemple la perforation d'une plaque avec un indenteur hémisphérique [11] permettant de reproduire à une échelle intermédiaire la collision entre deux navires.

References

- [1] Y. Bao, T. Wierzbicki. *On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space*, International Journal of Mechanical Sciences, Elsevier, 81-98, 2004.
- [2] E.-A. De Souza Neto, D. Peric, M. Dutko, D.-R.-J. Owen. *Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 3277-3296, 1996.
- [3] E.-A. De Souza Neto, D. Peric, D.-R.-J. Owen. *Computational methods for plasticity, theory and applications*, Wiley, 2008.

- [4] A.-L. Gurson. *Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media*, Journal of Engineering Materials and Technology, ASME, 1977.
- [5] A. Kaniadakis, J.-P. Crété, P. Longère. *Three-dimensional finite strain volumetric cohesive XFEM-based model for ductile fracture*, Engineering Fracture Mechanics, Elsevier, 2024.
- [6] P. Longère, A. Dragon. *Description of shear failure in ductile metals via back stress concept linked to damage-microporosity softening*, Engineering Fracture Mechanics, Elsevier, 92-108, 2013.
- [7] J. Mediavilla. *Continuous and Discontinuous Modelling of Ductile Fracture*, Thèse TU Eindhoven, 2005.
- [8] K. Nikolakopoulos, J.-P. Crété, P. Longère. *Volume averaging based integration method in the context of XFEM-cohesive zone model coupling*, Mechanics Research Communications, Elsevier, 2020.
- [9] K. Nikolakopoulos, J.-P. Crété, P. Longère. *Progressive failure of ductile metals: Description via a three-dimensional coupled czm-xfem based approach*, Engineering Fracture Mechanics, Elsevier, 2021.
- [10] V. Tvergaard, A. Needleman. *Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar*, Acta Metallurgica, Elsevier, 157-169, 1984.
- [11] M. Zhang, Q. Sun, J. Liu, Z. Hu, S. Zhang. *A study of the rupture behavior of a ship side plate laterally punched by a full-shape bulbous bow indenter*, Ocean Engineering, Elsevier, 48-60, 2019.
- [12] G. Zi, T. Belytschko. *New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 2221-2240, 2003.