

# Optimisation topologique géométrique sous contraintes résiduelles internes et contraintes d'usinage

A. De Biasio<sup>1</sup>, C. Gogu<sup>1</sup>, K. Moussaoui<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institut Clément Ader (ICA), Université de Toulouse, CNRS, IMT Mines Albi, INSA, ISAE-SUPAERO, UPS, Toulouse, France  
antony.de-biasio@isae-supaero.fr

**Résumé** — Ce travail présente une méthodologie d'optimisation topologique (de type MMV) pour la fabrication de pièces aéronautiques, visant à minimiser les distorsions d'usinage induites par la relaxation des contraintes résiduelles. Une contrainte de conformité d'assemblage innovante est formulée pour garantir le respect des interfaces d'assemblage post-déformation d'usinage. Le problème est résolu via l'algorithme MMA et appliqué sur un cas test représentatif des grandes pièces planes usinées dans l'industrie aéronautique, assurant la montabilité sans redressage manuel.

**Mots clés** — Optimisation topologique, MMV, contraintes résiduelles, distorsion d'usinage, tolérances d'assemblage.

## 1 Introduction

Dans l'industrie aéronautique, la maîtrise géométrique des grandes pièces métalliques usinées (cadres, longerons) est critique. L'enlèvement de matière lors de l'usinage de bruts (forgés ou laminés) rompt l'équilibre des contraintes résiduelles internes, entraînant des déformations globales de la pièce. Ces distorsions font souvent sortir les zones d'interface d'assemblage des tolérances géométriques (ex :  $\pm 0.2$  mm), rendant la pièce impropre à l'assemblage sans opérations de redressage manuelles coûteuses et sujettes à l'expérience des opérateurs.

Ce travail propose une méthodologie d'optimisation topologique visant à concevoir des structures (disposition des nervures, poches) intrinsèquement robustes aux distorsions de fabrication par usinage. L'approche repose sur la méthode des *Moving Morphable Voids* (MMV) [1], projetant des géométries explicites sur un maillage fixe.

Ce problème d'optimisation pose trois défis majeurs :

1. **Chargements dépendants du design** : La source de la déformation (les contraintes résiduelles internes) disparaît avec la matière retirée, créant des non-monotonies et des instabilités numériques [2].
2. **Respect des tolérances** : Il faut garantir qu'une sous-région (l'interface d'assemblage et sa zone de tolérance) soit contenue dans un volume virtuel fixe après la relaxation des contraintes.
3. **Usinabilité** : Le design généré doit être interprétable par la FAO (Fraisage 2.5 axes) avec des caractéristiques géométriques bien définies.

Pour répondre à ces défis, nous proposons une formulation couplant les MMV avec une contrainte de conformité d'assemblage innovante. L'articulation des différents outils numériques et la démarche de résolution sont présentées en Figure 1. La variabilité des contraintes résiduelles dans le brut (voir Figure 2) est prise en compte pour assurer la robustesse du design final.

## 2 Formulation mathématique

L'approche MMV décrit la topologie en soustrayant un ensemble de  $N_v$  composants vides d'un domaine solide initial où chaque élément fini a une densité initiale de 1.

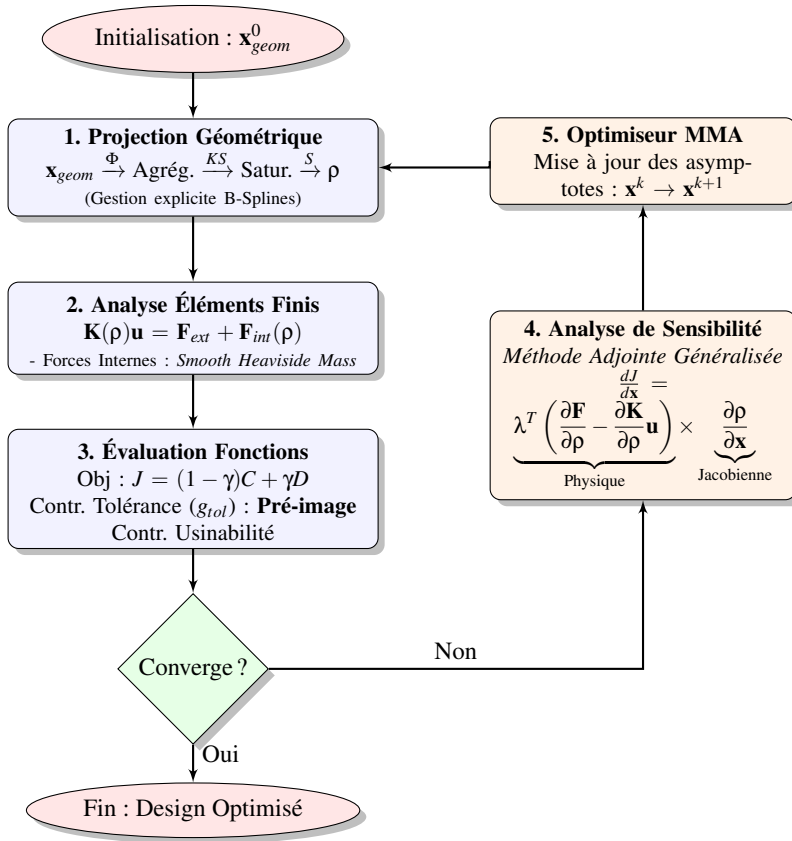


FIGURE 1 – Articulation de la démarche d’optimisation : couplage de la projection géométrique explicite (MMV) avec l’analyse de sensibilité adjointe généralisée pour forces dépendantes.

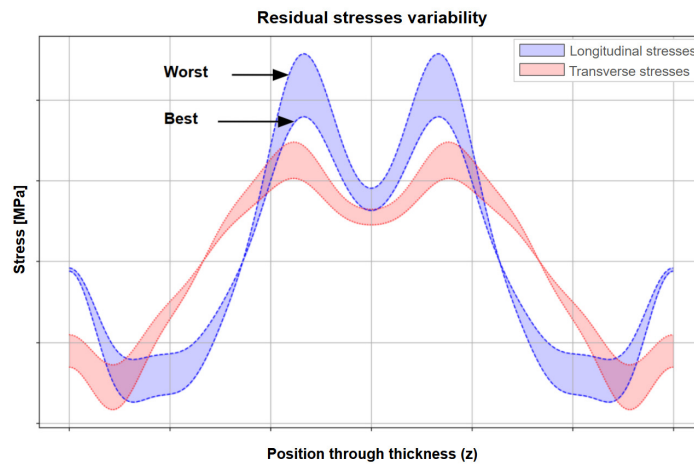


FIGURE 2 – Profil des contraintes résiduelles internes dans l’épaisseur d’une pièce brute laminée.

## 2.1 Description des composants

La structure est définie en soustrayant  $N_v$  vides d’un bloc solide initial. Pour garantir l’usinabilité, chaque vide est modélisé comme un prisme généré par l’extrusion d’une section plane fermée.

Pour le  $j$ -ème composant, le vecteur des variables de conception  $\mathbf{x}_{geom}^j$  inclut les paramètres de forme 2D et la profondeur d’extrusion  $L$  :

$$\mathbf{x}_{geom}^j = \{x_c, y_c, z_c, L, \theta, d_1, \dots, d_n\}^T \quad (1)$$

Où  $(x_c, y_c, z_c)$  est le centre du vide,  $\theta$  l’orientation, et  $\mathbf{d} = \{d_1 \dots d_n\}$  les distances radiales.

La frontière de la section transversale est explicitement définie par une courbe B-spline fermée  $C(u)$  :

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) P_i, \quad (a \leq u \leq b) \quad (2)$$

Les points de contrôle  $P_i$  (dérivés des distances  $d$ ) sont paramétrés pour éviter l'auto-intersection, garantissant des formes fermées régulières [1]. La courbe B-spline est générée récursivement, assurant la continuité aux jonctions (lissage  $C^1$  ou  $C^2$ ). Cette section plane est ensuite extrudée sur une longueur  $L$  pour former la poche d'usinage, illustré en Figure 3.

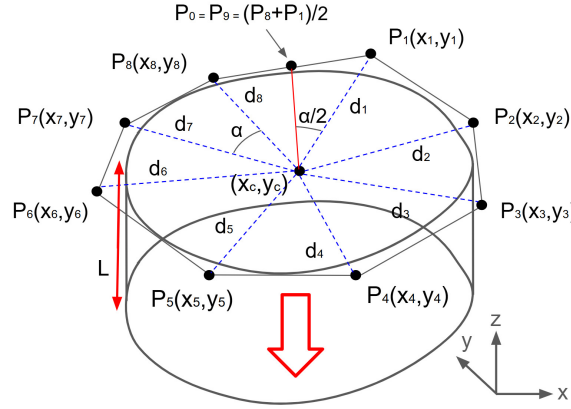


FIGURE 3 – Paramétrisation d'un élément vide déformable avec 8 points de contrôle [1]. La forme est contrôlée par le point central  $(x_c, y_c)$  et les distances radiales  $d_1, \dots, d_N$  des points de contrôle, qui en retour définissent la frontière lisse de la B-spline. Le volume est ensuite défini par extrusion de cette section 2D.

## 2.2 Projection géométrique différentiable

L'objectif de cette étape est d'établir le lien entre la paramétrisation géométrique explicite des poches d'usinage et le modèle numérique discret requis pour l'analyse mécanique. Concrètement, il s'agit de traduire les paramètres continus des vides en un champ de densité physique  $\rho$  exploitable par le solveur éléments finis. Pour garantir que l'algorithme d'optimisation puisse calculer les gradients nécessaires à la résolution, cette géométrie des vides est projetée sur le maillage éléments finis fixe initial non déformé via une chaîne de fonctions strictement différentiables [3].

1. **Fonction caractéristique 3D** ( $\Phi$ ) : Évalue l'appartenance d'un point  $(x, y, z)$  au volume du vide. Pour représenter fidèlement une opération de fraisage, cette fonction doit définir un volume fermé (poche). Elle est construite par intersection lisse entre la distance signée au profil 2D (parois B-spline) et la distance au fond de poche défini par la profondeur  $L$ .
2. **Agrégation** ( $K_S$ ) : Combine les champs de multiples vides pour gérer leur union volumique et les chevauchements complexes [3].
3. **Saturation** ( $S$ ) : Binarise le champ projeté pour garantir des bords nets, assurant une transition franche solide/vide tant sur les parois latérales que sur le fond de l'usinage.

La densité physique de l'élément  $e$  est finalement obtenue par :

$$\rho_e(\mathbf{x}_{geom}) = 1 - S(K_S(\Phi_{j,e})) \quad (3)$$

## 3 Modélisation physique

### 3.1 Équilibre et fonction objectif

L'optimisation traite simultanément la performance en service et la fabricabilité via une approche multi-objectif et multi-cas de charge. La fonction objectif combine la compliance  $C$  et la distorsion de

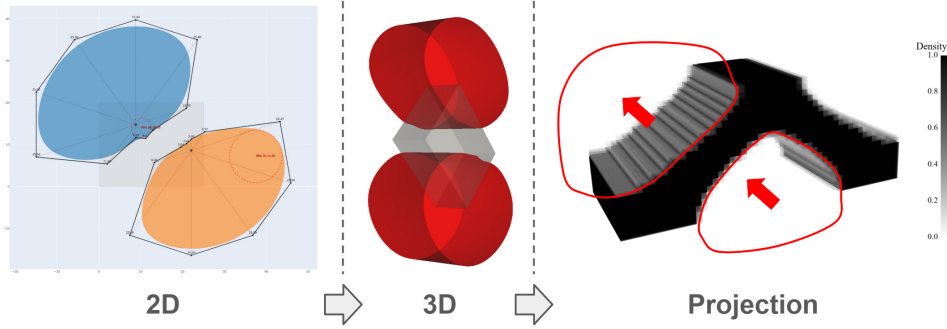


FIGURE 4 – Projection sur le domaine d'optimisation des composants vides.

fabrication  $D$  :

$$J(\mathbf{x}_{geom}) = (1 - \gamma) s_C C(\mathbf{x}_{geom}) + \gamma s_D D(\mathbf{x}_{geom}) \quad (4)$$

Où  $\gamma \in [0, 1]$  est le facteur de pondération, et  $s_C, s_D$  sont des facteurs de normalisation compensant les différences d'ordres de grandeur entre l'énergie ( $J$ ) et le déplacement ( $mm$ ).

La résolution par éléments finis exploite la même matrice de rigidité globale  $\mathbf{K}(\rho)$  pour deux vecteurs de chargement distincts :

$$\mathbf{K}(\rho)[\mathbf{u}_{service}, \mathbf{u}_{fabrication}] = [\mathbf{F}_{ext}, \mathbf{F}_{int}(\rho)] \quad (5)$$

Cela correspond à deux équilibres physiques simultanés :

1. **En service** ( $\mathbf{u}_{service}$ ) : La structure doit être rigide sous les charges externes fixes  $\mathbf{F}_{ext}$ . La compliance est  $C = \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{u}_{service}$ .
2. **En fabrication** ( $\mathbf{u}_{fabrication}$ ) : La structure se déforme sous l'effet des forces internes  $\mathbf{F}_{int}(\rho)$  issues de la relaxation des contraintes résiduelles. La distorsion  $D$  est une mesure de  $\mathbf{u}_{fabrication}$  sur les interfaces critiques.

### 3.2 Robustesse aux efforts internes

Les forces internes dépendant du design, leur suppression brutale peut causer des instabilités numériques. Pour éviter la tendance de l'optimiseur à enlever toute la matière pour annuler les contraintes, nous utilisons le modèle d'interpolation de force de Kumar [2]. Ce modèle utilise une fonction Heaviside spécifique faisant tendre vers 0 la force et sa sensibilité dans les zones de faible densité, stabilisant la résolution par la méthode adjointe.

## 4 Contraintes de conformité d'assemblage post-déformation

Une contribution majeure de ce travail est la formulation de contraintes (au sein du problème d'optimisation) garantissant la montabilité de la pièce après fabrication par usinage et relaxation des contraintes résiduelles. Plutôt que de limiter globalement la distorsion, nous imposons à des volumes spatiaux fixes (dans le repère d'assemblage) d'être remplis de matière ou, à l'inverse, d'en être totalement exempts après déformation de fabrication.

Soit  $V_{solide}$  le volume cible correspondant à l'interface de contact requise (ex : tenon d'assemblage). Soit  $V_{vide}$  le volume de dégagement requis pour éviter toute collision avec les pièces environnantes.

### 4.1 Approche par la pré-image et discrétisation

Pour contrôler l'état matériel final de manière numérique, les volumes spatiaux continus sont discrétisés en nuages de points. Le volume cible  $V_{solide}$  est discrétisé en  $N_{p\_solide}$  points cibles  $\mathbf{p}_i$ , et le volume de dégagement  $V_{vide}$  en  $N_{p\_vide}$  points  $\mathbf{p}_j$ .

Pour chaque point cible, sa "pré-image" (notée  $\mathbf{q}_i$  ou  $\mathbf{q}_j$ ) est déterminée dans la configuration initiale (non déformée) de la pièce, telle que :

$$\mathbf{p} \approx \mathbf{q} + \mathbf{u}(\mathbf{q}) \quad (6)$$

Un simple calcul inverse de déformation, tel que  $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{u}(\mathbf{p})$ , n'est pas applicable ici. En effet, la résolution par éléments finis étant réalisée sur la géométrie initiale (formulation lagrangienne), le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  n'est connu qu'en fonction des coordonnées initiales  $\mathbf{q}$ , et non des coordonnées spatiales déformées  $\mathbf{p}$ . L'équation précédente est donc implicite par rapport à l'inconnue  $\mathbf{q}$ . Pour contourner cette difficulté, cette inversion spatiale est réalisée par un algorithme de point fixe itératif sur le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  issu de la résolution éléments finis. Cet algorithme actualise itérativement la position estimée de  $\mathbf{q}$  en interpolant le vecteur  $\mathbf{u}(\mathbf{q})$  correspondant dans le maillage, jusqu'à minimiser l'écart avec le point cible  $\mathbf{p}$ . Une fois la pré-image localisée dans le maillage initial fixe, sa densité physique  $\rho(\mathbf{q})$  est évaluée.

## 4.2 Formulation mathématique

Le problème requiert la satisfaction de deux contraintes complémentaires pour assurer la conformité de l'assemblage (illustré en Figure 5) :

**1. Contrainte de zone solide (Interface)** La densité matérielle aux pré-images des points appartenant à  $V_{solide}$  doit être maximale ( $\rho \approx 1$ ). Pour garantir que l'ensemble du volume cible est rempli, nous utilisons une fonction d'agrégation *smooth-minimum* ( $S_{min}$ ) sur les  $N_{p\_solide}$  densités évaluées. Le seuil cible  $\tau_{sol}$  (ex : 0.9) est évalué à travers ce même opérateur de lissage. La contrainte s'écrit alors :

$$g_{solide}(\mathbf{x}_{geom}) = S_{min} \left( \{\tau_{sol}\}_{i=1}^{N_{p\_solide}} \right) - S_{min} \left( \{\rho(\mathbf{q}_i(\mathbf{u}))\}_{i=1}^{N_{p\_solide}} \right) \leq 0 \quad (7)$$

**2. Contrainte de zone vide (Dégagement)** Inversement, la densité matérielle aux pré-images des points appartenant à  $V_{vide}$  doit être nulle ( $\rho \approx 0$ ) pour garantir l'absence de collision avec les éléments d'assemblage environnants. Nous utilisons ici une fonction *smooth-maximum* ( $S_{max}$ ) sur les  $N_{p\_vide}$  points cibles pour identifier la violation locale la plus critique, avec un seuil toléré  $\tau_{vid}$  (ex : 0.1) :

$$g_{vide}(\mathbf{x}_{geom}) = S_{max} \left( \{\rho(\mathbf{q}_j(\mathbf{u}))\}_{j=1}^{N_{p\_vide}} \right) - S_{max} \left( \{\tau_{vid}\}_{j=1}^{N_{p\_vide}} \right) \leq 0 \quad (8)$$

Ces deux contraintes couplent fortement la géométrie explicite (MMV) et la réponse mécanique  $\mathbf{u}$ . Leur évaluation nécessite une analyse de sensibilité que l'on réalise par méthode adjointe pour propager le gradient à travers les fonctions d'agrégation et le processus d'inversion spatiale.

## 5 Contraintes d'usinabilité

Outre la performance mécanique, la fabricabilité est assurée intrinsèquement par l'approche MMV. Contrairement aux méthodes de densité classiques (SIMP) qui produisent des frontières en "escalier" nécessitant un lissage a posteriori, l'approche MMV génère des frontières lisses définies par des B-splines.

Ces courbes garantissent une continuité géométrique ( $C^1$  ou  $C^2$ ) compatible avec les trajectoires d'outils de fraisage (CNC). De plus, des contraintes géométriques explicites peuvent être ajoutées sur les paramètres  $d$  des B-splines pour imposer un rayon de courbure minimal, évitant ainsi les zones inaccessibles aux fraises de diamètre standard en usinage 2.5 axes.

## 6 Analyse de sensibilité et optimisation

Le problème d'optimisation est résolu par l'algorithme MMA (*Method of Moving Asymptotes*) [4], particulièrement adapté aux problèmes de grande taille. La fonction objectif étant une combinaison de plusieurs réponses physiques (compliance et distorsion), le calcul des gradients doit être généralisable à différents types de chargements.

## 6.1 Formulation lagrangienne généralisée

Soit une fonction d'intérêt générique  $g(\rho(\mathbf{x}_{geom}), \mathbf{u})$  dépendant d'un état d'équilibre  $\mathbf{K}(\rho)\mathbf{u} = \mathbf{F}(\rho)$ . Notez que le vecteur force  $\mathbf{F}$  est ici noté comme potentiellement dépendant du design.

Pour éviter le calcul prohibitif de la dérivée du déplacement  $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}_{geom}}$ , nous introduisons le Lagrangien augmenté :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_{geom}, \mathbf{u}, \lambda) = g(\mathbf{x}_{geom}, \mathbf{u}) - \lambda^T (\mathbf{K}(\rho)\mathbf{u} - \mathbf{F}(\rho)) \quad (9)$$

Où  $\lambda$  est le vecteur adjoint. À l'équilibre physique, le terme entre parenthèses est nul, donc  $\mathcal{L} = g$ . Leurs variations sont identiques :  $\frac{dg}{d\mathbf{x}_{geom}} = \frac{d\mathcal{L}}{d\mathbf{x}_{geom}}$ .

En dérivant le Lagrangien par rapport à une variable  $x_i$ , on obtient :

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} - \lambda^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \quad (10)$$

En regroupant les termes multipliant l'inconnue implicite  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}$ , l'expression devient :

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} - \lambda^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \right) + \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} - \lambda^T \mathbf{K} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \quad (11)$$

## 6.2 Équation adjointe et sensibilité

Pour éliminer le terme complexe contenant  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}$ , nous choisissons le vecteur  $\lambda$  tel que le dernier terme de l'équation (11) s'annule. Ceci définit l'équation adjointe générique :

$$\mathbf{K}^T \lambda = \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \quad (12)$$

En injectant cette solution dans (11), le terme dépendant de la dérivée du déplacement disparaît. De plus, puisque l'équilibre est satisfait, nous avons l'identité  $\frac{d\mathcal{L}}{dx_i} = \frac{dg}{dx_i}$ . L'expression se simplifie en ne gardant que les termes explicites :

$$\frac{dg}{dx_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} + \lambda^T \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \quad (13)$$

Enfin, nous exprimons la dépendance à la variable géométrique  $x_i$  via la densité locale  $\rho$  (règle de la chaîne  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$ ). En factorisant, on aboutit à l'expression finale du gradient :

$$\frac{dg}{d\mathbf{x}_{geom}} = \left[ \frac{\partial g}{\partial \rho} + \lambda^T \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \rho} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \mathbf{u} \right) \right] \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{x}_{geom}} \quad (14)$$

## 6.3 Application aux physiques du problème

L'équation (14) est universelle pour notre problème. Elle s'applique différemment selon la composante de la fonction objectif évaluée (Eq. 4), dont les états d'équilibre correspondants sont régis par l'équation (5) :

- **Cas de la Compliance (Comportement en service)** : Le chargement est externe et fixe ( $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{ext}$ ). La dérivée  $\frac{\partial \mathbf{F}_{ext}}{\partial \rho}$  est nulle. On retrouve l'expression classique de l'optimisation topologique où seule la variation de rigidité intervient ( $\lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \mathbf{u}$ ).
- **Cas de la Distorsion (Comportement en fabrication)** : Le chargement est interne ( $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{int}(\rho)$ ). Le terme  $\frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \rho}$  est non nul et essentiel. Il capture l'effet physique de la relaxation : le retrait de matière supprime localement des contraintes résiduelles, modifiant l'équilibre global.

## 6.4 Calcul analytique

Tous les termes de sensibilité sont calculés de manière exacte et efficace :

- $\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{x}_{geom}}$  est la Jacobienne de projection, calculée analytiquement grâce aux propriétés des fonctions de forme B-splines.
- $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho}$  et  $\frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \rho}$  sont obtenus par l'assemblage des matrices élémentaires dérivées, calculées directement à partir de la loi d'interpolation du matériau (SIMP).

## 7 Cas d'application et conclusion

La méthodologie proposée est formulée pour être appliquée sur des cas simplifiés représentatifs des cas industriels, tels qu'un panneau raidi aéronautique. L'objectif de ce cas test est de déterminer la topologie des zones d'enlèvement de matière (position et forme des composants MMV) minimisant la masse, tout en garantissant que les interfaces d'assemblage restent dans une tolérance stricte (ex :  $\pm 0.2$  mm en aéronautique) après la libération des contraintes résiduelles post-usinage.

Contrairement aux approches classiques, cette formulation intègre la physique de la relaxation des contraintes directement dans la boucle d'optimisation via l'analyse de sensibilité adjointe généralisée (Section 6). Le modèle permet à l'optimiseur de "prévoir" la distorsion et de rigidifier la structure localement pour satisfaire la contrainte de conformité d'assemblage définie en Section 4.

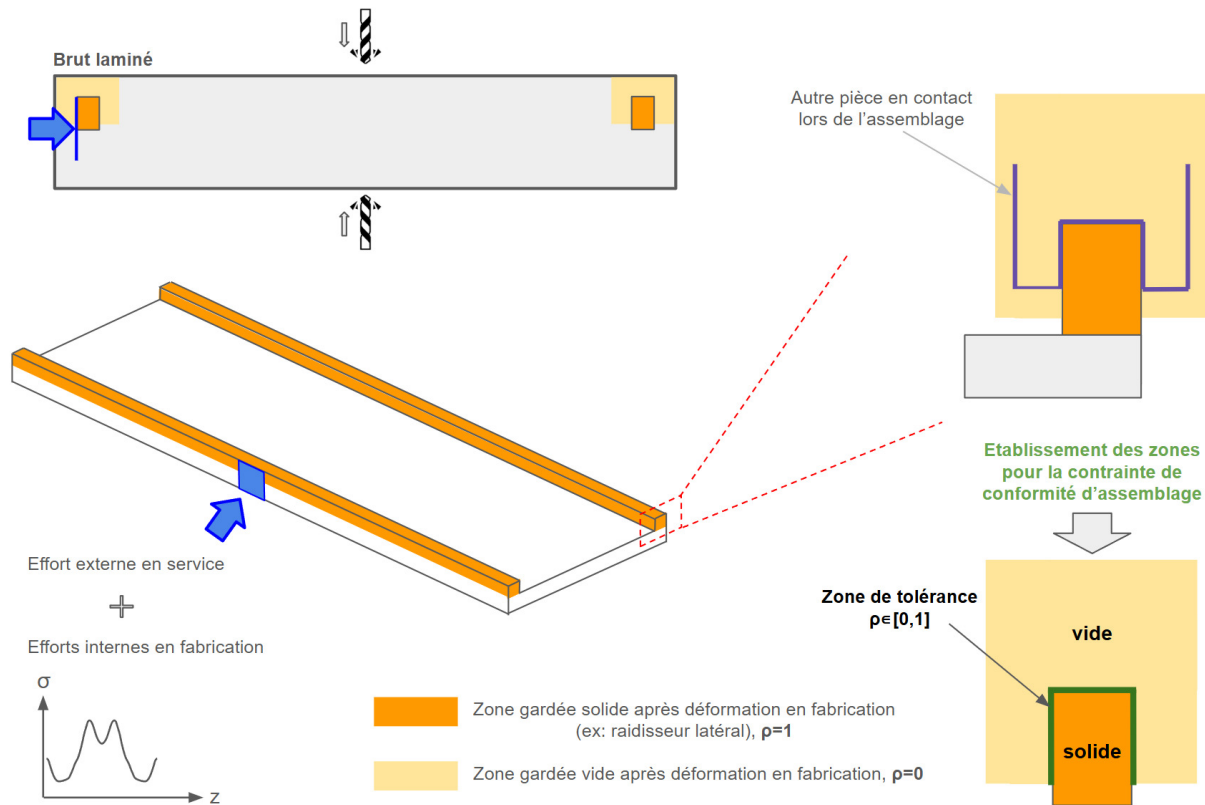


FIGURE 5 – Illustration du cas d'application sur un panneau raidi : prise en compte simultanée des efforts de service et des contraintes résiduelles de fabrication en usinage, et définition des zones cibles pour la conformité d'assemblage post-déformation.

Ce travail pose les bases théoriques et numériques pour le "Design for Manufacturing" de grandes pièces usinées monolithiques. Il démontre comment la méthode des composants mobiles (MMV) peut être enrichie pour traiter des chargements dépendants du design (contraintes résiduelles internes) et des contraintes de précision géométrique, offrant une alternative robuste aux processus actuels de redressage.

### Références

- [1] R. Xue, C. Liu, W. Zhang, Y. Zhu, S. Tang, Z. Du, X. Guo. *Explicit structural topology optimization under finite deformation via Moving Morphable Void (MMV) approach*, CMAME, 344, 798-818, 2019.
- [2] P. Kumar. *Topology optimization of stiff structures under self-weight for given volume using a smooth Heaviside function*, Structural and Multidisciplinary Optimization, 65, 128, 2022.
- [3] S. Coniglio, J. Morlier, C. Gogu. *Generalized Geometry Projection : A Unified Approach*, Archives of Computational Methods in Engineering, 2020.
- [4] K. Svanberg. *The method of moving asymptotes a new method for structural optimization*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 24, 359-373, 1987.