

Hybridation de modèles pour la résolution de problèmes thermo-poroélastiques non-linéaires fortement couplés

É Foulatier¹, P.-A. Boucard¹, F. Louf¹, D. Néron¹

¹ Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, 91190, Gif-sur-Yvette, France, {elise.foulatier, pierre-alain.boucard, francois.louf, david.neron}@ens-paris-saclay.fr

Résumé — Cette contribution propose une approche modulaire pour résoudre des problèmes de thermo-poroélasticité non-linéaires fortement couplés. L'enjeu est ici de réussir à faire dialoguer des physiques décrites par des modèles de nature différente. Pour cela, on a recours à la méthode LATIN-PGD dont la capacité à résoudre des problèmes multiphysiques a déjà été montrée dans la littérature. Les présents travaux pointent la pertinence de la méthode pour coupler des physiques définies sur différentes discrétisations.

Mots clés — thermo-poroélasticité, maillages incompatibles, réduction de modèles, LATIN-PGD

1 Introduction

La simulation de problèmes non-linéaires de thermo-poroélasticité, couplant fortement des phénomènes solides, fluides et thermiques, est complexe et induit un certain nombre de difficultés numériques. La résolution de tels problèmes se fait à l'aide de solveurs multiphysiques, généralement classés selon deux types d'approche. La première approche, dite monolithique, consiste à résoudre simultanément toutes les physiques. Les approches partitionnées traitent quant à elles séparément chacune des physiques tout en permettant les échanges d'information entre elles à chaque pas de temps. Elles sont donc en théorie intégrables à des codes industriels performants, contrairement aux approches monolithiques qui nécessitent d'implémenter un nouveau code pour chaque type de problème multiphysique traité. Des travaux ont commencé à explorer les possibilités de couplage entre différents solveurs dans le cadre de stratégies de partitionnement. Le logiciel Precice [1] permet ainsi de coupler des logiciels existants (Open_FOAM, code_aster, deal.II, FEniCS...) notamment pour la résolution de problèmes d'interaction fluide-structure. Néanmoins, une telle solution reste pour l'instant limitée à certains types de problèmes multiphysiques et ne permet pas de traiter des problèmes à plus de deux physiques.

Parmi les modèles susceptibles d'être couplés, on peut envisager un couplage entre un modèle partiellement ou complètement basé sur des données avec un modèle purement physique. En effet, afin de limiter le coût des calculs offline permettant d'obtenir un modèle réduit, des approches multi-fidélité sont de plus en plus utilisées [2]. Dans ce cadre, des techniques d'enrichissement permettraient de contrer le potentiel manque de données et ainsi de coupler des modèles de différents niveaux de fidélité. On peut notamment penser à des techniques de réduction de modèles à la volée, permettant d'enrichir des modèles réduits ou basés sur les données au cours d'une simulation.

La méthode LATIN-PGD, dont l'applicabilité à des problèmes multiphysiques (notamment pour le couplage solide-fluide-thermique) a été démontrée dans [3, 4], présente deux avantages qui font d'elle un outil adapté pour répondre à notre problématique. D'une part, elle intègre nativement une technique de réduction de modèles : la *Proper Generalised Decomposition*. D'autre part, le solveur présente une certaine modularité de par son interface entre physiques qui peut être vue comme un espace d'accommodation permettant, outre le couplage entre les physiques, la gestion des non-linéarités ou la prise en compte d'interaction entre physiques et données. Cette interaction peut prendre la forme d'un couplage entre un modèle physique et un modèle purement basé sur les données (métamodèle, réseau neuronal...) comme présenté en Figure 1. Une autre approche consiste à enrichir tous les modèles physiques avec des données, en ayant recours à des approches hybrides.

Cette contribution vise à montrer la possibilité de coupler des modèles différents pour chaque phy-

sique en utilisant le solveur LATIN-PGD. Une première étape consiste à s'assurer qu'il est possible de coupler des physiques dont les quantités sont exprimées en des points non coïncidents. Pour cela, on se concentrera ici sur des physiques discrétisées différemment. Après avoir présenté le problème de référence ainsi que le solveur, on étudiera le cas de discrétisations temporelles différentes pour chacune des physiques. En effet, les aspects fluides et thermiques présents en thermo-poroélasticité se produisent sur des échelles de temps très éloignées.

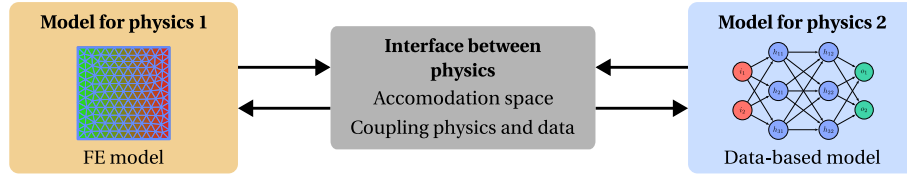


FIGURE 1 – Dialogue entre modèles physique et basé sur les données dans le cadre LATIN multiphysique

2 Problème de référence

Un problème de thermo-poroélasticité consiste à étudier un milieu poreux soumis à une charge thermique. Un milieu poreux est modélisé comme un squelette élastique linéaire dont les pores contiennent un fluide. La porosité du milieu, notée ϕ , quantifie le rapport entre le volume des pores sur le volume total. On considère un milieu homogénéisé [5], et l'on peut donc se placer dans le cadre de la théorie de la mécanique des milieux continus.

Les quantités suivantes caractérisent le problème thermo-poroélastique non linéaire isotropique homogène :

- pour la physique solide : le déplacement \underline{u} associé au tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et au tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$;
- pour la physique fluide : la pression interstitielle p associée à l'opposée de la vitesse de Darcy \underline{W} ;
- pour la physique thermique : l'incrément de température $\theta = T - T_0$ associé au flux de chaleur \underline{q} , où T_0 est la température de référence.

On introduit les espaces fonctionnels \mathcal{U} , \mathcal{P} et \mathcal{T} qui sont les espaces de champs primaux « réguliers » vérifiant les conditions de Dirichlet. Chacune des physiques est gouvernée par un principe de conservation : l'équilibre des moments pour le solide, la conservation de la masse pour le fluide et la conservation énergétique pour la partie thermique. Chacun de ces principes conduit aux équations d'admissibilité propres à chaque physique.

On considère également les relations de comportement (1) faisant apparaître le couplage entre physiques. Plus de détails sur la signification de chacun de ces paramètres matériau peuvent être trouvés dans [4].

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{D} : \underline{\underline{\varepsilon}} - b p \underline{I} - \beta \theta \underline{I} \\ \underline{V} = -H \underline{Z} \\ \xi = \frac{1}{M} \dot{p} + b \text{Tr} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - 3\alpha_m \dot{\theta} \\ \underline{q} = -k \underline{X} \\ R = C_d \dot{\theta} + \beta T_0 \text{Tr} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - 3\alpha_m T_0 \dot{p} + \rho_f c_f \underline{V} \cdot \underline{X} - \frac{1}{H} (1 - 3\alpha_f T_0) \underline{V}^2 \end{cases} \quad (1)$$

En combinant toutes les équations, on obtient le problème complet suivant, l'étude étant menée sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et sur un intervalle de temps I :

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}$, $p \in \mathcal{P}$, $\theta \in \mathcal{T}$ tels que :

$$\nabla \cdot (\underline{D} : \underline{\varepsilon}) - b \nabla p - \beta \nabla \theta = \underline{0} \quad \text{dans } \Omega \times I \quad (2a)$$

$$-H \Delta p + \frac{1}{M} \dot{p} + b \text{Tr} \underline{\dot{\varepsilon}} - 3 \alpha_m \dot{\theta} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times I \quad (2b)$$

$$-k \Delta \theta + C_d \dot{\theta} + \beta T_0 \text{Tr} \underline{\dot{\varepsilon}} - 3 \alpha_m T_0 \dot{p} - \rho_f c_f \underline{W} \cdot \underline{X} - \frac{1}{H} (1 - 3 \alpha_f T_0) \underline{W}^2 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times I \quad (2c)$$

$$p(\underline{x}, t = 0) = p_0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2d)$$

$$\theta(\underline{x}, t = 0) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2e)$$

À partir de la forme faible des équations précédentes, on utilise la méthode des éléments finis qui conduit à introduire les inconnues \mathbf{u} , \mathbf{p} et θ correspondant aux champs primaux discrétisés .

3 Résolution de problèmes de thermo-poroélasticité non-linéaires avec le solveur LATIN-PGD

3.1 Description du solveur

La méthode LATIN-PGD repose sur le concept de séparation des difficultés. Les équations sont réparties en deux groupes \mathbf{A}_d et Γ . \mathbf{A}_d regroupe les équations découplées et linéaires, possiblement globales tandis que Γ contient les équations locales, possiblement couplées et non linéaires. La solution du problème \mathbf{s}_{ref} est donc telle que : $\mathbf{s}_{\text{ref}} = \mathbf{A}_d \cap \Gamma$. Chaque itération de l'algorithme se décompose en deux étapes :

- une étape **couplée** calculant $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1} \in \Gamma$ à partir d'une solution connue $\mathbf{s}_n \in \mathbf{A}_d$ avec une direction de recherche \mathbf{E}^+ ;
- une étape **découplée** calculant $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$ à partir d'une solution connue $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1} \in \Gamma$ avec une direction de recherche \mathbf{E}^- .

L'étape couplée conduit à la résolution d'un système couplé d'équations différentielles non linéaires et locales en espace, donc traitées à chaque point de Gauss. L'étape découplée consiste à résoudre des problèmes éléments finis globaux, linéaires et indépendants par physique de la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\mathbf{uu}} \Delta \mathbf{u}_{n+1}(t) = \mathbf{g}_{\mathbf{u}}(t) \text{ dans } \Omega \\ \Delta \mathbf{u}_{n+1}(t) = \mathbf{0} \text{ sur } \partial_u \Omega \end{cases} \quad (3a) \quad \begin{cases} \mathbf{H}_{\mathbf{pp}} \Delta \mathbf{p}_{n+1}(t) = \mathbf{g}_{\mathbf{p}}(t) \text{ dans } \Omega \\ \Delta \mathbf{p}_{n+1}(t) = \mathbf{0} \text{ sur } \partial_p \Omega \end{cases} \quad (3b) \quad \begin{cases} \mathbf{H}_{\theta\theta} \Delta \theta_{n+1}(t) = \mathbf{g}_{\theta}(t) \text{ dans } \Omega \\ \Delta \theta_{n+1}(t) = \mathbf{0} \text{ sur } \partial_\theta \Omega \end{cases} \quad (3c)$$

Les matrices $\mathbf{H}_{\mathbf{uu}}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{pp}}$ et $\mathbf{H}_{\theta\theta}$ dépendent de la direction de recherche choisie et s'écrivent généralement à partir des matrices de rigidité et de conductivité.

3.2 Intégration de la *Proper Generalised Decomposition* dans le solveur

L'étape découplée peut être résolue à l'aide de la méthode de réduction de modèles PGD (*Proper Generalised Decomposition*). La spécificité de cette méthode réside dans la construction d'une base à la volée, c'est-à-dire au cours de la résolution du problème multiphysique. On cherche ainsi les champs primaux de chaque physique sous la forme d'une combinaison de fonctions du temps et de l'espace, comme écrit en (4). À chaque itération, au plus un mode est ajouté pour chaque physique. La base est obtenue par résolution d'une phase d'update suivie d'un algorithme point-fixe optionnel basé sur les problèmes éléments finis (3a), (3b), (3c).

$$\begin{cases} \mathbf{u}_n(t) = \mathbf{u}_0(t) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(t) \bar{\mathbf{u}}_i & k \leq n \\ \mathbf{p}_n(t) = \mathbf{p}_0(t) + \sum_{i=1}^l \gamma_i(t) \bar{\mathbf{p}}_i & l \leq n \\ \theta_n(t) = \theta_0(t) + \sum_{i=1}^m \varphi_i(t) \bar{\theta}_i & m \leq n \end{cases} \quad (4)$$

3.3 Critère de convergence

Afin de savoir quand la convergence est atteinte, des indicateurs d'erreur propres à chaque physique sont introduits. Ces indicateurs quantifient l'écart entre deux solutions successives $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1}$ et \mathbf{s}_{n+1} . L'indicateur d'erreur solide est donné par :

$$\eta^{S^2} = \frac{\|\mathbf{s}_{n+1}^S - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1}\|_{\underline{E}_{\varepsilon\sigma}}^2}{\frac{1}{2}(\|\mathbf{s}_{n+1}^S\|_{\underline{E}_{\varepsilon\sigma}}^2 + \|\widehat{\mathbf{s}}_{n+1}\|_{\underline{E}_{\varepsilon\sigma}}^2)} \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{s}^S\|_{\underline{E}_{\varepsilon\sigma}}^2 = \int_{I \times \Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{E}_{\varepsilon\sigma} : \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega dt \quad (5)$$

avec $\underline{E}_{\varepsilon\sigma}$ qui est un des opérateurs associés à la direction de recherche \mathbf{E}^- .

Des indicateurs similaires η^F et η^{Th} sont construits pour les physiques fluide et thermique. On fixe un seuil de convergence η_c . Quand l'indicateur d'erreur d'une physique est inférieur à ce seuil, on stoppe la progression de la physique. Ainsi, l'algorithme prend fin quand tous les indicateurs sont inférieurs à η_c .

4 Transfert d'information entre physiques

4.1 Problématique rencontrée

Dès que le problème multiphysique gagne en complexité, soit en augmentant le nombre de physiques fortement couplées soit en complexifiant les modèles propres à chaque physique, on observe très fréquemment des comportements différents entre les physiques. Par exemple, les problèmes de thermo-poroélasticité présentent des dynamiques très différentes avec des phénomènes fluides se produisant sur des échelles de temps très courtes tandis que la phase transitoire des problèmes thermiques dure environ 10^4 fois plus longtemps qu'en fluide. De plus, les aspects non-linéaires portant sur une des physiques (la thermique dans le cas de la thermo-poroélasticité) peut nécessiter de décrire une solution plus complexe. Le solveur LATIN-PGD décrit dans [4] permet de construire des bases complètement indépendantes pour chaque physique. On peut également arrêter les calculs à l'étape couplée portant sur une physique si celle-ci a convergé. Néanmoins, en l'état, le solveur ne considère pas de discrétisations adaptées à chacun des problèmes. Or, cela permettrait de réduire des coûts de calcul inutiles dans l'étape découplée. On propose donc de mettre en œuvre une méthode permettant de coupler des physiques définies sur des discrétisations différentes, chacune étant optimale pour la physique considérée. Dans les exemples présentés ci-après, on se concentre sur le couplage de discrétisations temporelles différentes. La gestion de discrétisation spatiales différentes sera présentée lors du colloque.

4.2 Couplage de discrétisations temporelles différentes

Certaines approches ont été développées dans le cadre des méthodes partitionnées pour coupler des discrétisations hiérarchiques [6] mais elles ne sont pas extensibles à des discrétisations qui seraient complètement différentes et potentiellement comportant des pas de temps variables. Avec la stratégie LATIN, il est nécessaire que l'étape couplée se fasse sur une discrétisation commune à toutes les physiques. On définit donc une discrétisation temporelle adéquate pour chacune des physiques ainsi qu'une autre discrétisation pour l'interface. Au début de chaque étape couplée, les quantités issues de l'étape découplée sont projetées des physiques vers l'interface. Puis, à la fin de l'étape couplée, les quantités exprimées sur la discrétisation de l'interface sont ramenées sur les discrétisations propres à chaque physique. La méthode *LATIN-PGD multistep* pour la résolution de problèmes multiphysiques avec des échelles en temps différentes peut ainsi être schématisée par la Figure 2.

Il s'agit désormais de trouver une méthode de projection adéquate afin d'éviter au maximum les erreurs dues au transfert d'information. On considère généralement les deux critères suivants pour les techniques de transfert d'information :

- consistance : pour deux discrétisations identiques, l'opérateur de transfert est l'identité ;
- respect du patch test : si un champ peut être représenté de manière exacte sur deux discrétisations (champs constants ou linéaires), le transfert doit permettre de transférer exactement le champ.

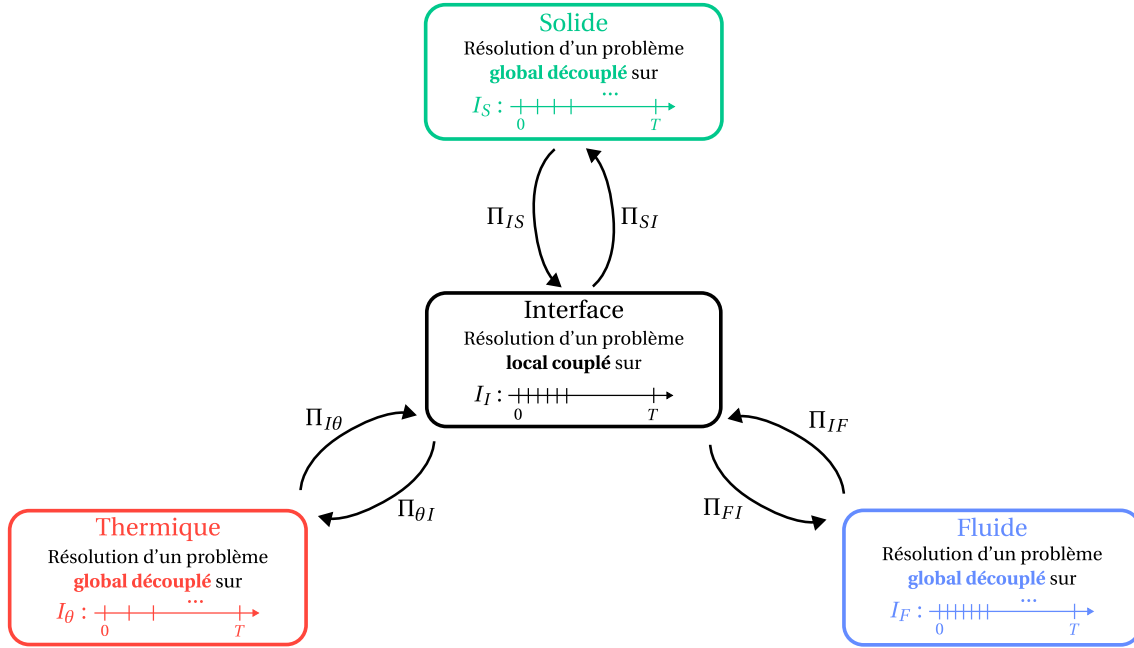


FIGURE 2 – Représentation de la stratégie *LATIN-PGD multistep* pour des problèmes de thermo-poroélasticité

Comme précisé dans [7], bien qu’une interpolation linéaire permette de satisfaire les critères précédemment cités, elle peut conduire à une importante perte d’informations. La méthode de projection Mortar [8] garantit quant à elle la conservation de l’énergie lors du transfert de champs, tout en respectant les critères de consistance et de respect du patch test. La méthode consiste à écrire une équivalence entre les moyennes de chaque champ en considérant les fonctions de forme d’une des discrétisations. Par exemple, on considère un champ e_1 (resp. e_2) défini sur la discrétisation temporelle I_1 (resp. I_2) de fonctions de forme N_1 (resp. N_2). Les valeurs du champ aux nœuds E_1 (resp. E_2) s’expriment alors de la manière suivante : $e_1 = N_1 E_1$ (resp. $e_2 = N_2 E_2$). La méthode Mortar permet d’écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_2} N_2^T e_2 d\Omega_2 &= \int_{\Omega_1} N_2^T e_1 d\Omega_1 \\
 \Rightarrow \int_{\Omega_2} N_2^T N_2 d\Omega_2 E_2 &= \int_{\Omega_1} N_2^T N_1 d\Omega_1 E_1 \\
 \Rightarrow E_2 &= \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_{21} E_1
 \end{aligned}$$

De même, on a la relation : $E_1 = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{M}_{12} E_2$.

On se propose de comparer les méthodes d’interpolation et Mortar sur des fonctions sinusoïdales du temps. La Figure 3a représente le transfert de la fonction $t \mapsto \sin t$ d’une discrétisation temporelle avec $N_t = 20$ pas de temps vers une grille avec $N_t = 10$ pas de temps. On remarque que l’intégrale sous la courbe de la fonction obtenue par interpolation est plus faible que pour le champ initial. On retrouve bien ainsi la propriété de conservation de l’énergie que permet la méthode Mortar. De plus, on peut identifier des cas pathologiques pour lesquels la méthode d’interpolation donne des résultats complètement erronés. C’est par exemple le cas en Figure 3b, où les instants sur lesquels on projette la fonction initiale correspondent aux demi-périodes de la fonction sinusoïdale. On perd ainsi la richesse du champ initial : la solution obtenue après transfert par interpolation suggère que le champ initial est presque nul partout. Il est toutefois important de noter qu’avec une discrétisation aussi grossière ($N_t = 7$ pas de temps), le champ obtenu avec la méthode Mortar conduit également à d’importantes erreurs.

Pour la suite, on retient donc la méthode Mortar qui assure la conservation de l’énergie et permet ainsi de garder un sens physique. La méthode Mortar exige de calculer la matrice des produits de fonction de forme \mathbf{M}_{12} en considérant toutes les intersections entre les intervalles de temps de chaque grille. Pour calculer efficacement ces intersections, on utilise l’algorithme PANG [9].

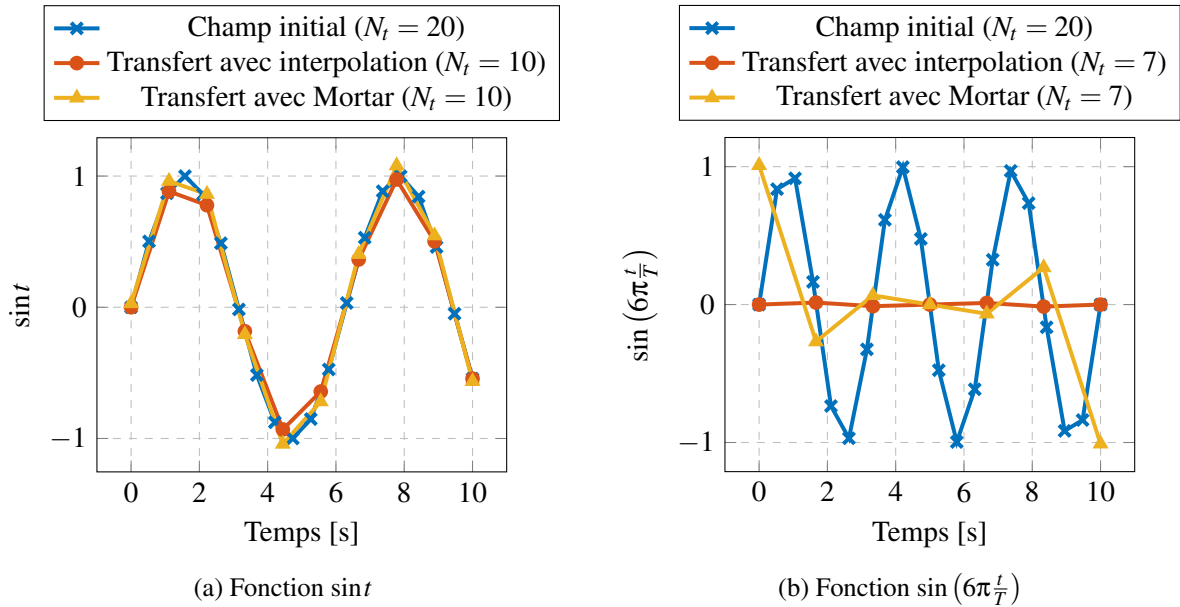


FIGURE 3 – Comparaison des projections avec méthode d’interpolation linéaire ou méthode Mortar

5 Résultats numériques

5.1 Présentation du problème

L’exemple de thermo-poroélasticité choisi repose ici sur l’étude d’une membrane céramique destinée à filtrer tous types de fluide. Les membranes sont des tubes percés de plusieurs canaux dont le matériau est une céramique poreuse. Les pores permettent de retenir les bactéries et virus présents dans le fluide. On récupère ainsi un fluide filtré une fois qu’il a traversé toutes les couches de la membrane céramique. Les fluides pouvant être à des températures élevées, on doit alors considérer l’étude d’un problème de thermo-poroélasticité fortement couplé. On se limite ici à l’étude d’un quart de la structure pour des raisons de symétrie. Les conditions aux limites sont représentées en Figure 4a. Pour plus de détails sur les conditions aux limites, la géométrie ou le matériau, on pourra se référer à [4]. Le maillage (voir Figure 4b) est constitué de 65,442 nœuds pour la partie solide (éléments Tet10) et 10,019 nœuds pour les parties fluide et thermique (éléments Tet4).

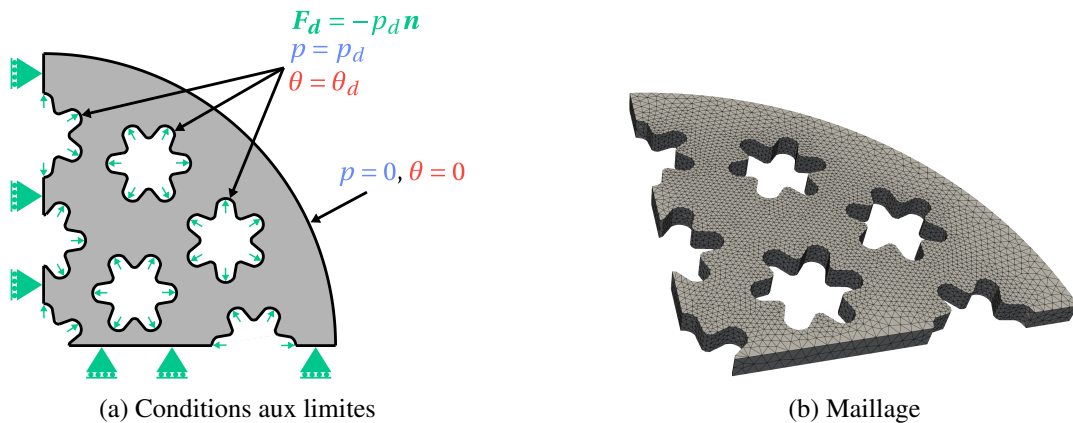


FIGURE 4 – Représentation de la membrane étudiée

5.2 Couplage de discrétisations temporelles différentes

La solution de référence obtenue avec $N_t = 120$ pas de temps pour toutes les physiques est présentée dans [4].

On étudie le problème sur $I = [0, T_f]$ — où $T_f = 25$ ms — avec les discrétisations temporelles sui-

vantes pour chaque physique et l'interface :

- $N_t^S = 60$ pas de temps pour la partie solide ;
- $N_t^F = 120$ pas de temps pour la partie fluide ;
- $N_t^\theta = 80$ pas de temps pour la partie thermique ;
- $N_t^I = 70$ pas de temps pour l'interface.

On considère des pas de temps de taille constante pour chacune des physiques et pour l'interface.

Le solveur *LATIN-PGD multistep* conduit aux niveaux d'erreur présentés dans le Tableau 1. Ces erreurs sont calculées par rapport à la solution de référence avec $N_t = 120$ pas de temps. On distingue l'erreur globale calculée avec la norme L_2 et l'erreur locale maximale qui correspond au nœud et à l'instant conduisant à la plus grande erreur relative.

	Solide	Fluide	Thermique
Erreur globale (norme L_2)	0.29%	$1.2 \times 10^{-2}\%$	0.19%
Erreur locale maximale	1.83%	$9.8 \times 10^{-2}\%$	0.8%

TABLE 1 – Niveaux d'erreur sur les champs primaux de chacune des physiques

On remarque que les niveaux d'erreur sont faibles alors que les discrétisations solides et thermiques sont nettement moins fines que pour la solution de référence. À part pour la physique solide, toutes les erreurs locales sont inférieures à 1%. Les erreurs légèrement plus élevées pour la partie solide peuvent s'expliquer par le choix de la discrétisation qui a été fait pour cette physique. En effet, les pas de temps sont deux fois plus grands pour le calcul avec *LATIN-PGD multistep* que pour le calcul de référence.

Pour rappel, on a mis en œuvre cette stratégie de couplage afin d'éviter de faire des calculs inutilement fins. Il est donc pertinent de s'intéresser aux temps de calcul. Avec les discrétisations mentionnées précédemment, on observe un gain en temps de calcul de :

$$G = 1.55 \tag{6}$$

Dans cette étude, nous n'avons pas évoqué la manière dont les discrétisations de l'interface et de chaque physique ont été choisies. Or, celles-ci impactent grandement la qualité de la solution et les coûts de calcul. Dans ces travaux, les discrétisations ont été choisies en s'appuyant sur les résultats de la solution de référence. Comme les phénomènes thermiques se produisent sur de plus grandes échelles de temps que les phénomènes fluides, on a pris $N_t^\theta < N_t^F$. Le problème solide ne dépend du temps que de par son couplage avec les parties thermiques et fluides, c'est pourquoi on a affecté à cette physique la discrétisation la plus grossière. Néanmoins, ces discrétisations ne sont sans doute pas optimales en terme de compromis coût/erreur. Il serait intéressant de mener une étude plus poussée, s'inspirant notamment des travaux présentés dans [10], afin d'obtenir de meilleurs gains et une méthode automatisée pour le choix des discrétisations.

6 Conclusion

La présente contribution a permis de souligner le caractère modulaire de la méthode *LATIN-PGD* dans le cadre de la résolution de problèmes multiphysiques. Contrairement aux méthodes partitionnées, l'espace d'accomodation permet de limiter le nombre de transferts entre les différentes physiques. Comme cela a été souligné en Section 5.2, la méthode permet de réduire les coûts de calcul sans pour autant dégrader la qualité de la solution. Des travaux pour automatiser le choix des discrétisations et minimiser les coûts de résolution restent encore à faire.

De la même manière, on peut appliquer la même stratégie pour coupler des maillages incompatibles. En effet, comme le montrent les résultats donnés par la solution de référence, le comportement spatial de chaque physique peut présenter d'importantes différences. De plus, les coûts de calcul sont principalement dus à la résolution de l'étape couplée qui consiste à résoudre un problème local. Si on arrive à réduire le coût de calcul de l'étape couplée en ne s'intéressant qu'à certains points de l'espace, on peut alors espérer réduire significativement les temps de calcul. Le traitement du couplage de maillages différents peut se faire de la même manière que pour les discrétisations temporelles, en considérant cette

fois des intersections d'éléments triangulaires (en 2D) ou tétraédriques (en 3D) dont un calcul efficace peut être fait en suivant l'algorithme décrit dans [11].

Enfin, cette contribution ouvre aussi la porte vers des couplages entre modèles de différents niveaux de fidélité. Alors qu'un enjeu est actuellement de tirer parti des données tout en garantissant le respect de la physique, on peut envisager d'étendre ces travaux à du couplage entre un modèle purement physique et un modèle reposant en partie sur des données. La méthode LATIN-PGD semble à même de coupler ces modèles et offre de plus la possibilité de tirer parti de la réduction de modèles pour enrichir les modèles si besoin.

Références

- [1] H.-J. Bungartz, F. Lindner, B. Gatzhammer, M. Mehl, K. Scheufele, A. Shukaev, B. Uekermann, *preCICE – A fully parallel library for multi-physics surface coupling*, Computers & Fluids, ScienceDirect, 250-258, 2016.
- [2] P. Conti, M. Guo, A. Manzoni, A. Frangi, S. L. Brunton, J. N. Kuntz, *Multi-fidelity reduced-order surrogate modeling*, Proc. R. Soc., A.480 :20230655, 2024.
- [3] D. Dureisseix, P. Ladevèze, B. A. Schrefler, *A LATIN computational strategy for multiphysics problems : application to poroelasticity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons, 1489-1510, 2003.
- [4] É. Foulatier, D. Néron, F. Louf, P.-A. Boucard, *A strategy with to parametrized nonlinear strongly coupled thermo-poroelasticity problems*, Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences, Springer, 12 :32, 2025.
- [5] O. Coussy, *Poromechanics*, John Wiley & Sons, 2004.
- [6] T. Almani, K. Kumar, A. Dogru, G. Singh, M.F. Wheeler, *COvergence analysis of multirate fixed-stress split iterative schemes for coupling flow with geomechanics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, ScienceDirect, 180-207, 2016.
- [7] D. Dureisseix, H. Bavestrello, *Information transfer between incompatible finite element meshes : Application to coupled thermo-viscoelasticity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, ScienceDirect, 6523-6541, 2006.
- [8] C. Bernardi, Y. Maday, A.T. Patera, *Domain decomposition by the mortar element method*, Asymptotic and numerical methods for partial differential equations with critical parameters, 296–286 1993.
- [9] M. J. Gander, C. Japhet, *An Algorithm for Non-Matching Grid Projections with Linear Complexity*, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII, Springer, 2009.
- [10] D. Néron, D. Dureisseix, *A computational strategy for poroelastic problems with a time interface between coupled physics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 783-804, 2008.
- [11] C. McCoid, M. J. Gander, *Interection of Tetrahedra*, ACM Transactions on Mathematical Software, Association for Computing Machinery, 1-26, 2025.