

Solveur explicite multi-pas de temps avec couplage mortar coque/coque et 3D/coque pour la simulation du flambage dynamique non-linéaire

A-K. Chau¹, M. Brun¹, P. Ventura¹, H. Zahrouni¹, M. Potier-Ferry¹

¹ Université de Lorraine, CNRS, Arts et Métiers Institute of Technology, LEM3, F-57000 Metz, France, michael.brun@univ-lorraine.fr

Résumé — Le flambage dynamique de structures minces est simulé en utilisant des éléments 3D-coques, dits à 7 paramètres, via l'utilisation du concept "Enhanced Assumed Strain" (EAS) [1]. Ces éléments 3D-coques sont collés à des éléments hexaédriques à 20 noeuds via la méthode mortar. Dans le cadre des grandes déformations, des solveurs implicites sont développés, basés sur la méthode classique de Newton-Raphson (NR) et la Méthode Asymptotique Numérique (MAN), dans l'environnement MATLAB. Des solveurs explicites mono-pas de temps et multi-pas de temps sont aussi développés, à l'aide d'un traitement original du champ EAS. Des forces suiveuses peuvent être introduites dans les deux solveurs, tandis que le cas de l'élastoplasticité en grandes déformations est traité via la méthode de décomposition multiplicative du tenseur gradient de la transformation [2] en formulation Lagrangienne actualisée.

Mots clés — instabilités structures minces, non-linéarités géométriques et matériaux, éléments 3D-coques à 7 paramètres, éléments hexaédriques, collage mortar, Méthode Asymptotique Numérique, calculs explicites multi-pas de temps

1 Introduction

Les structures minces, largement adoptées dans les domaines de l'ingénierie mécanique et du génie civil, sont sujettes aux instabilités géométriques comme le flambement, le voilement et le déversement. L'objectif de notre étude est d'analyser les instabilités dynamiques de structures minces en développant des éléments 3D-coques, basés sur la cinématique de Mindlin-Reissner et pourvus du concept d'EAS ("Enhanced Assumed Strain", [1]), permettant de prendre en compte une loi constitutive 3D sans avoir recours à une stratégie de condensation. On parle alors d'éléments coques à 7 paramètres : six inconnues cinématiques (déplacement de la surface moyenne et variation des vecteurs directeurs de la coque) et un champ EAS de déformation additionnelle incompatible, piloté au niveau élémentaire par une condition d'orthogonalité afin de limiter les problèmes de verrouillage.

L'analyse des instabilités est conduite dans l'environnement MATLAB [3], dans un premier temps, suivant une technique classique comme la méthode de Newton-Raphson (NR) en dynamique implicite. La méthode NR de référence est comparée à la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) basée sur le développement en série de Taylor (ou approximations de Padé) d'un paramètre d'homotopie ϵ qui permet de passer des équations sans les termes quadratiques aux équations réelles (avec les termes quadratiques) [4]. Pour chaque pas de chargement, la MAN établit une succession de problèmes linéaires qui admettent la même matrice tangente, réduisant ainsi les temps de calcul, par rapport à des méthodes correctives comme la méthode NR, basée sur la mise à jour de la matrice tangente à chaque itération.

L'élément 3D-coque a été reformulé en Lagrangien actualisé afin d'implémenter la stratégie proposée par Simo [2] pour la prise en compte de l'élastoplasticité en grandes déformations. En dynamique implicite, la méthode NR est validée avec des non-linéarités géométriques et matériaux pour de nombreux cas de flambage. Des solveurs explicites sont aussi visés : outre le schéma classique de la Différence Centrée, nous proposons un solveur explicite multi-pas de temps basé sur la méthode HATI ("Heterogeneous Asynchronous Time Integrator"), permettant le couplage des sous-domaines avec des pas de temps dif-

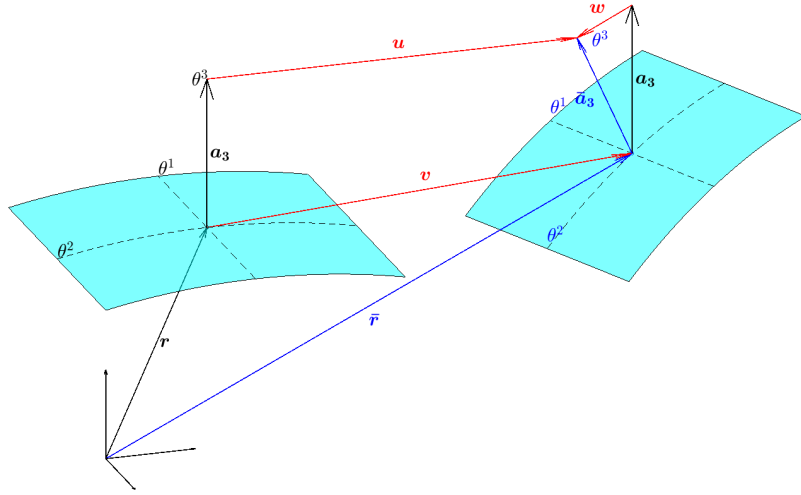


FIGURE 1 – Géométrie et cinématique de l'élément coque

férents [5, 6, 7]. Par ailleurs, pour l'élément coque à 7 paramètres, un traitement original de la condition d'orthogonalité pour le champ EAS est proposé, permettant de préserver l'efficacité des solveurs explicites. Parallèlement aux développements concernant l'élément 3D-coque, des éléments hexaédriques à 20 noeuds sont développés, afin de fournir des solutions de référence. Enfin, du fait du cadre très général dans lequel les solveurs implicites et explicites sont développés, des discrétisations spatiales variées sont prospectées (éléments coques triangulaire, quadrangulaire, éléments spectraux de degré quelconque), ainsi que leur collage via les stratégies sous-domaines de type mortar.

L'ensemble de ce travail est détaillé dans le manuscrit de thèse déposé début novembre 2025. Ici, sans entrer dans les détails théoriques des solveurs et éléments (formulation Lagrangienne actualisée, élasto-plasticité en grandes déformations, traitement de l'EAS en explicite, collages mortar), nous illustrons les possibilités du code développé au sein du LEM3 grâce à un cas test couplé. Il compare des calculs implicites et explicites, pour une structure mince, décomposée en plusieurs sous-domaines, mêlant des éléments coques à 7 paramètres quadratiques, triangulaires ou quadrangulaires dans le plan moyen, des éléments coques spectraux avec un degré 4 pour les polynômes de Lagrange, et enfin des éléments hexaédriques à 20 noeuds.

2 Collage d'éléments 3D-coques pour les poutres à parois minces

2.1 Cinématique de l'élément 3D-coque

La formulation proposée par [1] a été largement utilisée dans les études d'instabilités de structures minces avec de grandes non-linéarités géométriques [8, 9, 10]. Par rapport à l'élément coque à 5 paramètres basé sur une cinématique de Mindlin-Reissner, cette formulation permet de prendre en compte le changement d'épaisseur ainsi que le concept EAS proposé par [11], conduisant à un élément coque à 7 paramètres.

La cinématique de l'élément est décrite dans la Figure 1 : un point matériel représenté par x dans sa configuration initiale et \bar{x} dans sa configuration déformée est défini par :

$$x(\theta^1, \theta^2) = r(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 a_3(\theta^1, \theta^2), \quad \bar{x}(\theta^1, \theta^2) = \bar{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}_3(\theta^1, \theta^2) \quad (1)$$

où r et \bar{r} sont les projections du point matériel sur le plan moyen de la coque dans les deux configurations. Les vecteurs a_3 et \bar{a}_3 désignent les vecteurs directeurs de la coque dans les deux configurations. $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ sont les coordonnées curvilignes de la coque. Le champ de déplacement entre les deux confi-

gurations est alors donné par :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{v}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{w}(\theta^1, \theta^2) \quad (2)$$

où \mathbf{v} est le déplacement dans le plan moyen et \mathbf{w} est le vecteur correspondant à la différence des vecteurs directeurs entre les deux configurations. La cinématique de la coque est donc définie par 6 paramètres. Classiquement, les vecteurs des bases covariantes \mathbf{g}_i , $i = 1, 2, 3$, et contravariantes \mathbf{g}^j , $j = 1, 2, 3$, sont déduits des hypothèses cinématiques précédentes, ce qui permet d'exprimer le tenseur de déformation de Green-Lagrange :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta^i} \mathbf{g}_j + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta^j} \mathbf{g}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta^i} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta^j} \right) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = [\mathbf{E}_{ij}^l(\mathbf{u}) + \mathbf{E}_{ij}^{nl}(\mathbf{u})] \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (3)$$

où $\mathbf{E}^l(\mathbf{u})$ correspond à la partie linéaire du tenseur de Green-Lagrange et $\mathbf{E}^{nl}(\mathbf{u})$ à la partie non-linéaire. Afin d'éviter des problèmes de verrouillage, notamment lorsque la coque est soumise à des effets dominants de flexion, une déformation additionnelle est prise en compte suivant le concept EAS, conduisant à une formulation coque à 7 paramètres. La déformation additionnelle linéaire dans l'épaisseur de la coque est donnée par $\tilde{\mathbf{E}} = \theta^3 \tilde{\beta}_{33} \mathbf{g}^3 \otimes \mathbf{g}^3$ avec $\tilde{\beta}_{33} = \tilde{\beta}_{33}(\theta^1, \theta^2)$. Le tenseur de Green-Lagrange devient alors :

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) = \mathbf{E}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}^l(\mathbf{u}) + \mathbf{E}^{nl}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{E}} \quad (4)$$

Par ailleurs, le champ additionnel EAS $\tilde{\mathbf{E}}$ vérifie la condition d'orthogonalité suivante :

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}})^T : \tilde{\mathbf{E}} d\Omega = 0 \quad (5)$$

où $\mathbf{S}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}})$ désigne le second tenseur de Piola-Kirchhoff.

2.2 Discrétisation éléments finis

Suivant [1], les approximations du champ de déplacement et de la géométrie s'appuient sur un élément quadrilatéral à 8 nœuds :

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n N^k \mathbf{v}^k + \theta^3 N^k \mathbf{w}^k, \quad \mathbf{x} = \sum_{k=1}^n N^k \mathbf{r}^k + \theta^3 N^k \mathbf{a}_3^k \quad (6)$$

où la fonction de forme N^k , relative au nœud k , dépend des coordonnées curvilignes (θ^1, θ^2) et le nombre de nœuds de l'élément est $n = 8$. Les inconnues pour un élément 3D-coque sont regroupées dans un vecteur élémentaire \mathbf{q} , constitué des déplacements moyens \mathbf{v}_k et des changements de vecteurs directeurs \mathbf{w}_k , pour k allant de 1 à 8. L'approximation spatiale du champ de déplacement s'écrit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (7)$$

où \mathbf{N} est la matrice des fonctions de forme. Le lecteur pourra se référer à [10] pour les détails de la discrétisation éléments finis de l'élément 3D-coque.

Il est important de noter que chaque nœud k de l'élément fini 3D-coque est associé à un vecteur directeur \mathbf{a}_3^k . Pour des structures courbes dont les normales théoriques sont parfaitement connues, les vecteurs normaux au plan moyen sont connus sans ambiguïté. Pour les poutres, dont les sections sont composées de parois minces, ou les coques présentant des raidisseurs, une stratégie doit être mise en œuvre comme la méthode Mortar adaptée aux spécificités de l'élément coque considéré.

2.3 Collage Mortar

Le problème du collage âme-semelle est illustré dans la Figure 2 qui montre l'ambiguïté du vecteur directeur pour les nœuds aux interfaces dans les cas d'une poutre à parois minces avec une section en L et en T. Dans la stratégie Mortar, on distingue l'élément 3D-coque esclave (Shell A) de l'élément 3D-coque maître (Shell B). Le collage par la technique Mortar est basé sur le principe des travaux virtuels :

$$\begin{aligned} \delta W_{int}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) &= \delta W_{ext} + \delta W_{interface}(\boldsymbol{\lambda}) \\ \text{avec : } \delta W_{interface}(\boldsymbol{\lambda}) &= \int_S \boldsymbol{\lambda} (\delta \mathbf{u}_A - \delta \mathbf{u}_B) dS \end{aligned} \quad (8)$$

où δW_{int} , δW_{ext} sont les énergies virtuelles interne et externe, complétées par l'énergie virtuelle d'interface, dépendante du champ des multiplicateurs de Lagrange λ . La surface S sur laquelle est calculée l'énergie virtuelle d'interface est relative à la section de l'élément 3D-coque esclave, telle que représentée sur la Figure 3 pour les profilés en L et en T. Le cas du collage pour le profilé en T correspond également à un collage d'un raidisseur sur une structure coque. Il est important de noter que la surface de collage, représentée dans la Figure 2, a une largeur qui correspond à l'épaisseur de la coque esclave.

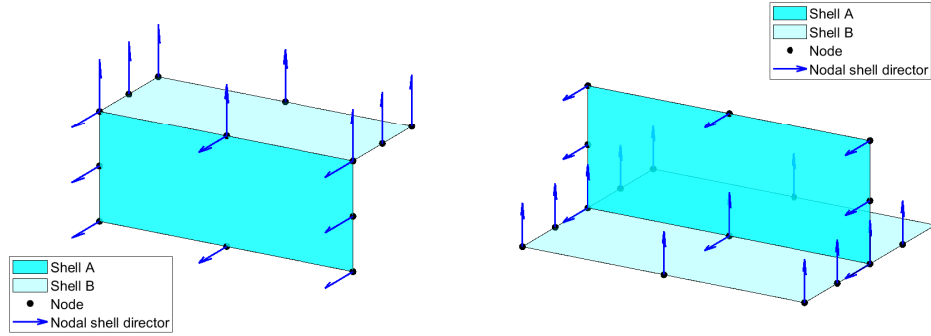


FIGURE 2 – Profilés minces en L et en T avec discontinuité des vecteurs directeurs aux interfaces âme-semelle. "Shell A" désigne l'élément de coque esclave pour le couplage Mortar tandis que "Shell B" désigne l'élément de coque maître.

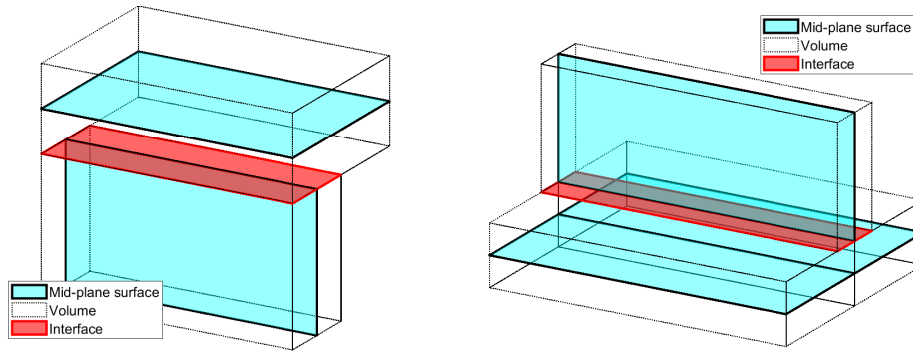


FIGURE 3 – Couplage suivant la technique de Mortar sur la tranche de l'élément coque esclave ("Shell A") pour des poutres à parois minces en L et en T

En se basant sur la cinématique des deux éléments 3D-coques telle que décrite précédemment, le collage consiste alors à assurer la continuité des déplacements esclave-maître sur la surface S . Les approximations des champs de déplacements virtuels pour les coques esclave (Shell A) et maître (Shell B) s'expriment alors par :

$$\delta u_A = \mathbf{N}_A \delta q_A \quad , \quad \delta u_B = \mathbf{N}_B \delta q_B \quad (9)$$

où \mathbf{N}_A , \mathbf{N}_B sont les matrices des fonctions de forme, définies sur la surface S , et δq_A , δq_B regroupent les degrés de liberté virtuels des nœuds des coques A et B, comprenant les déplacements en plan moyen ainsi que les changements de vecteurs directeurs. Conformément à la méthode Mortar standard, l'approximation spatiale du champ des multiplicateurs de Lagrange suit la discrétisation de la partie esclave, c'est-à-dire :

$$\lambda = \mathbf{N}_A \Lambda \quad (10)$$

où Λ est le vecteur regroupant les multiplicateurs de Lagrange. En prenant en compte les différentes discrétisations spatiales, l'énergie virtuelle d'interface s'écrit :

$$\delta W_{interface}(\lambda) = \delta q_A^T \mathbf{L}_A^T \Lambda + \delta q_B^T \mathbf{L}_B^T \Lambda \quad (11)$$

où \mathbf{L}_A et \mathbf{L}_B constituent les matrices de contraintes de Mortar, obtenues par intégration de produit de fonctions de forme sur la surface de collage S :

$$\mathbf{L}_A = \int_S \mathbf{N}_A^T \mathbf{N}_A dS \quad , \quad \mathbf{L}_B = \int_S \mathbf{N}_A^T \mathbf{N}_B dS \quad (12)$$

Nous considérons une forme plus compacte, en regroupant les inconnues cinématiques relatives aux deux sous domaines $\mathbf{q}^{(1)}$ et $\mathbf{q}^{(2)}$ dans un seul vecteur global comme ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_A & \mathbf{L}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_A \\ \mathbf{q}_B \end{bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (13)$$

et l'énergie virtuelle d'interface s'écrit :

$$\delta W_{interface}(\boldsymbol{\lambda}) = \delta \mathbf{q}^T \int_{\Gamma_h} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Lambda} d\Gamma \quad (14)$$

Dans la suite, nous présentons succinctement un schéma de résolution temporelle, basé sur le schéma explicite de la différence centrée (CD : "Central Difference"). Les solveurs implicites, incluant la schéma de Newmark implicite avec la méthode de Newton-Raphson (NR) et le schéma implicite basée sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN), ne sont pas détaillés. Pour cette dernière méthode, le lecteur pourra se référer à [12].

2.4 Solveur explicite avec le schéma de la Différence Centrée

Tout d'abord, l'équation du mouvement discrète est donnée ci-dessous au temps t_{n+1} , correspondant au temps final du pas de temps explicite $[t_n, t_{n+1}]$ [13] :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_{n+1/2} + \mathbf{f}_{int,n+1} - \mathbf{f}_{ext,n+1} - \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Lambda}_{n+1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{L} \dot{\mathbf{q}}_{n+1} - \hat{\mathbf{B}}_{n+1} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (15)$$

où $\hat{\mathbf{M}}$ est la matrice de masse "lumpée" (matrice de masse rendue diagonale), via des techniques de "Selective Mass Scaling" appropriée à l'élément coque à 7 paramètres [14]. La seconde équation exprime l'ensemble des conditions cinématiques, incluant des vitesses bloquées ou imposées, ainsi que les collages de Mortar explicités précédemment. Le pas de temps du schéma explicite est noté $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Le schéma de la différence centrée au temps t_{n+1} fournit les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{n+1/2} &= \dot{\mathbf{q}}_n + 0.5\Delta t \ddot{\mathbf{q}}_n \\ \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_{n+1/2} \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + 0.5\Delta t \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \end{aligned} \quad (16)$$

Les inconnues de notre problème sont les inconnues cinématiques (déplacement, vitesse et accélération) ainsi que les multiplicateurs de Lagrange au temps t_{n+1} . Comme le déplacement \mathbf{q}_{n+1} est directement obtenu par le schéma explicite, il reste à résoudre les vitesse, accélération et multiplicateur de Lagrange. La condition cinématique (collage dual par la méthode de Mortar) est donc également exprimée en vitesse, de même que les conditions de Dirichlet classiques. A partir des équations précédentes, Eq.(15) et Eq.(16), l'accélération en fin de pas de temps est décomposée en une partie dépendante uniquement des forces externes, internes et visqueuses, partie nommée "free", et une partie uniquement dépendante des multiplicateurs de Lagrange :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} &= -\hat{\mathbf{M}}^{-1} \left(\mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_{n+1/2} + \mathbf{f}_{int,n+1} - \mathbf{f}_{ext,n+1} \right) + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Lambda}_{n+1} \\ &= \ddot{\mathbf{q}}_{n+1,free} + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Lambda}_{n+1} \end{aligned} \quad (17)$$

où la partie free, $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1,free}$, est calculée en premier, sans prendre en compte les conditions cinématiques. En termes de vitesse en fin de pas de temps, on obtient la relation suivante :

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_{n+1/2} + 0.5\Delta t \left(\ddot{\mathbf{q}}_{n+1,free} + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Lambda}_{n+1} \right) \quad (18)$$

A présent, l'expression précédente est employée dans la condition cinématique du système en Eq.(15), conduisant à :

$$\mathbf{H}\mathbf{\Lambda}_{n+1} = \mathbf{B}_{n+1} - \mathbf{L} \left(\dot{\mathbf{q}}_{n+1/2} + 0.5\Delta t \ddot{\mathbf{q}}_{n+1,free} \right) \quad (19)$$

où l'opérateur d'interface, noté \mathbf{H} , est donné par :

$$\mathbf{H} = 0.5\Delta t \mathbf{L}\hat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{L}^T \quad (20)$$

Les multiplicateurs de Lagrange sont obtenus en résolvant l'équation d'interface Eq. (19). Les accélérations sont ensuite calculées via Eq. (17), ainsi que les vitesses via Eq. (18). Dans le cas où la matrice de contraintes \mathbf{L} n'évolue pas au cours du temps, l'opérateur \mathbf{H} est calculé et factorisé (décomposition LU) à l'initialisation de la simulation. Si la condition cinématique est non-linéaire, par exemple comme l'imposition d'un mouvement de corps rigide pour une extrémité d'un cylindre en torsion, la matrice de contraintes \mathbf{L} doit être recalculée à chaque pas de temps. Les étapes du calcul explicite sont résumées dans l'Algorithme 1.

Algorithm 1 Central Difference (explicit) algorithm for nonlinear dynamics considering the time step $[t_n, t_{n+1}]$

Time-step-size Δt , matrices \mathbf{L} and \mathbf{H} solution at $t_n : (\cdot)_n$

Compute \mathbf{q}_{n+1} and $\dot{\mathbf{q}}_{n+1/2}$ using Eq. (16)

Loop on elements : Compute force vectors $\mathbf{f}_{int,n+1}$ and $\mathbf{f}_{ext,n+1}$

Compute $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1,free}$ using Eq. (17)

Update $\mathbf{L}(\mathbf{q}_{n+1})$, \mathbf{H} for nonlinear kinematic constraints

Compute $\mathbf{\Lambda}_{n+1}$ using Eq. (19)

Compute $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ and $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ using Eq. (17) and Eq. (18)

3 Application numérique : flambage dynamique d'un toit cylindrique décomposé en quatre sous domaines coques à 7 paramètres et hexaèdres

Nous considérons un toit cylindrique décomposé en quatre sous-domaines, illustré dans la Figure 4. Le problème est non-linéaire géométrique et le matériau est supposé élastique (loi de Saint-Venant Kirchhoff). L'objectif ici est principalement de prospector la pertinence des collages Mortar, en utilisant différents types d'éléments finis (coque à 7 paramètres, solides hexaédriques quadratiques) et différents types de solveur. Tout d'abord, nous employons des solveurs implicites, incluant le schéma implicite de Newmark (schéma de l'accélération moyenne) avec la méthode de Newton-Raphson (NR) ainsi que la méthode asymptotique numérique (MAN) en dynamique en développant les séries entières ou approximations de Padé suivant un paramètre d'homotopie ε [12]. Ensuite, le schéma explicite (CD), présenté brièvement dans cette communication, est adopté.

Les caractéristiques principales des sous-domaines (type d'éléments, maillage) représentés dans la Figure 4, sont listées ci-dessous :

- Sous-domaine 1 (SD1) : 4×4 éléments coques à 7 paramètres, quadrangulaires, quadratiques (8 noeuds dans le plan moyen), initialement proposés par [1],
- Sous-domaine 2 (SD2) : 6×6 éléments de même formulation (coque à 7 paramètres), quadratiques, mais triangulaires à 6 noeuds,
- Sous-domaine 3 (SD3) : 3×3 éléments de même formulation (coque à 7 paramètres), quadrangulaires dans le plan moyen, avec des polynômes de Lagrange de degré 4 en utilisant l'intégration de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) (élément spectral à 25 points GLLs dans le plan moyen),
- Sous-domaine 4 (SD4) : $4 \times 4 \times 2$ éléments solides hexaédriques, quadratiques (20 noeuds).

Le couplage entre les sous-domaines est réalisé via la stratégie standard de mortar, en introduisant des multiplicateurs de Lagrange au niveau des différentes interfaces non-compatibles pour les deux interface coque - coque, et non-compatibles avec éléments hétérogènes pour les deux autres interfaces

(collage solide - coque). En plus de la force verticale P_z provoquant le flambement, nous introduisons une force tangente perturbatrice initiale et maintenue constante P_x qui a pour effet de briser la symétrie du problème. Pour le modèle de référence, nous adoptons un maillage homogène, c'est-à-dire composé uniquement d'éléments coques quadrangulaires à 8 noeuds. La force externe est croissante sur une durée de $0.2s$ puis est maintenue constante jusqu'à la fin de la simulation à $0.3s$. Le calcul de référence est donné par le solveur implicite NR avec une précision du résidu à 10^{-4} . Le schéma temporel utilisé est de type α -généralisé [15], permettant d'introduire un léger amortissement numérique (rayon spectral $\rho_\infty = 0.9$ pour le schéma HHT [16]).

Quelques configurations à différents instants sont données dans la Figure 5. Visuellement, le phénomène de claquage dynamique est bien observé, avec des collages aux interfaces qui semblent se comporter parfaitement grâce au collage mortar.

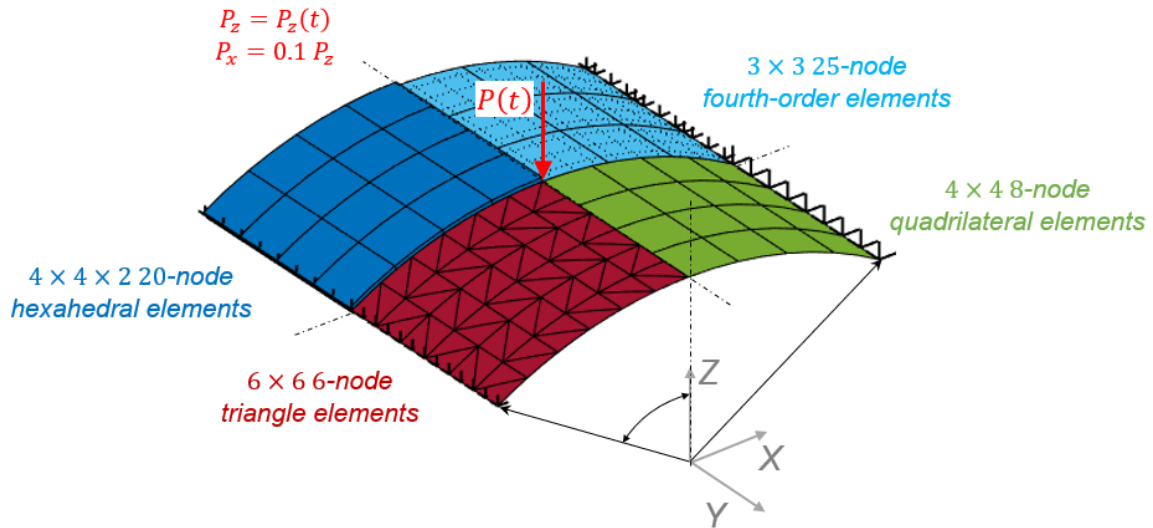


FIGURE 4 – Test toit cylindrique décomposé en sous-domaines : SD1 en vert (éléments classiques coques quadrangulaires [17]), SD2 en rouge (éléments coques triangulaires), SD3 en bleu clair (éléments spectraux coques avec polynôme de Lagrange de degré 4, 25 noeuds GLL dans le plan moyen), SD4 en bleu foncé (éléments hexaédriques à 20 noeuds).

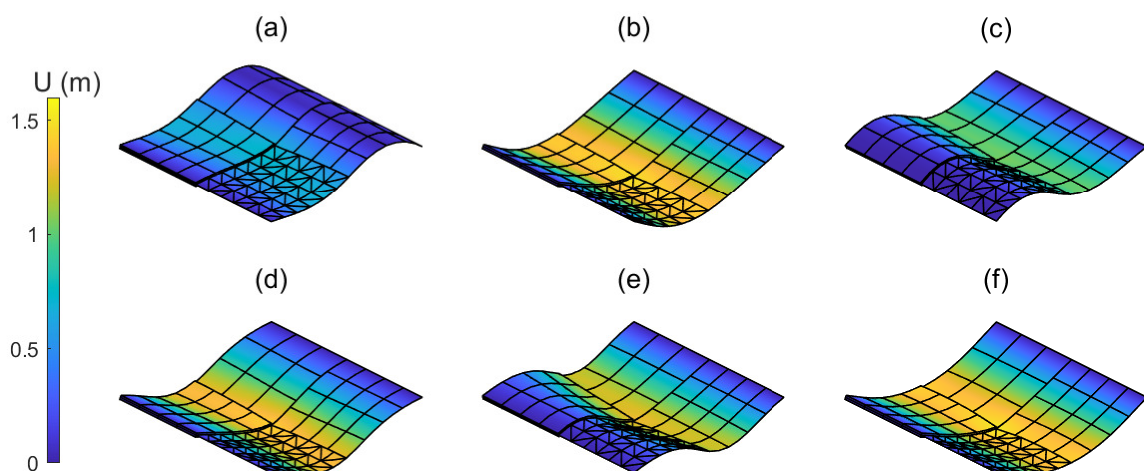


FIGURE 5 – Test toit cylindrique : configurations déformées pour quelques instants et isovaleurs du champ de déplacement U : (a) $t = 0.11s$, (b) $t = 0.12s$, (c) $t = 0.13s$, (d) $t = 0.17s$, (e) $t = 0.18s$, (f) $t = 0.26s$

De façon plus quantitative, les histoires de déplacement en temps au point de chargement obtenues

par les solveurs implicites NR et MAN sont tracées dans la Figure 6(a), et comparées au calcul de référence (maillage homogène coque et solveur NR). Le résultat NR avec des sous-domaines colle parfaitement à la référence. Des légers décalages sont visibles entre la solution MAN et les deux autres, dans la phase exhibant des vibrations hautes fréquences autour d’une position flambée. Ces légères différences peuvent s’interpréter via l’étude de l’évolution de la taille du pas de temps au cours de la simulation, donnée en Figure 6(b). En effet, il est noté que les deux solutions NR utilisent le même pas de temps, égal à 2.5ms , qui n’évolue pas sur la durée d’observation. Par contre, pour le solveur MAN, le pas de temps adaptatif commence avec une valeur plus importante que le solveur NR, jusqu’au flambement autour de 0.1s . Ensuite, le pas de temps MAN chute et s’adapte de sorte que l’ordre de troncature de la série reste entre 15 et 40 (série selon le paramètre d’homotopie ε avec des approximants de Padé).

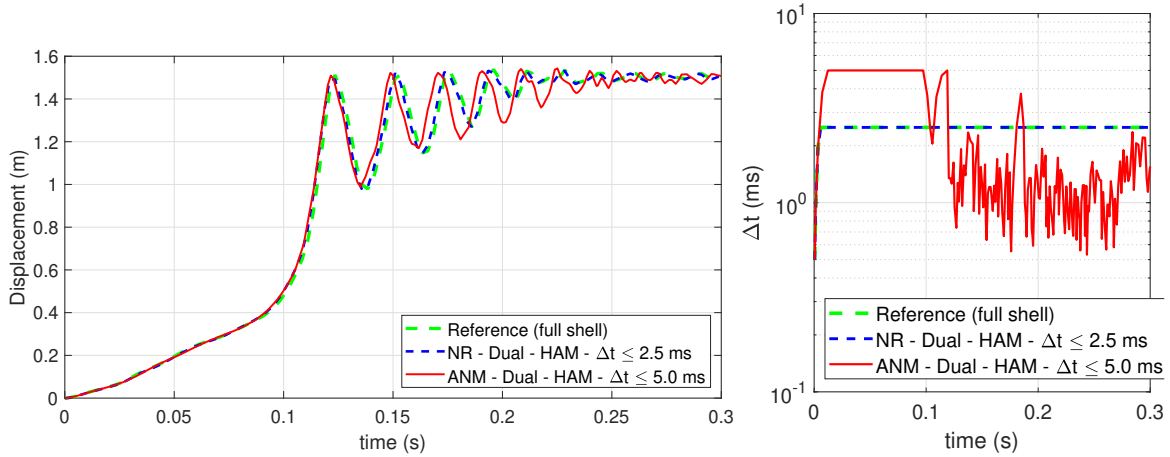


FIGURE 6 – Calcul implicite avec les stratégies Newton-Raphson (NR) et MAN avec un schéma temporel de type α -généralisé (HAM) : déplacement du point de chargement en temps et taille des pas de temps

Pour le calcul explicite, les stratégies multi-pas de temps sont mobilisées, basées les intégrateurs temporels dits HATI. Les sous-domaines 1 et 2 sont intégrés en temps avec le macro pas de temps $\Delta t_m = 25.0\text{s}$ tandis que les sous-domaines 3 et 4 sont intégrés avec le micro pas de temps $\Delta t_j = 2.5\text{s}$. Le pas de temps macro est piloté par le sous-domaine 2 (aves les éléments coques quadratiques triangulaires) tandis que le pas de temps micro est piloté par le sous-domaine 4 modélisé avec des éléments solides. Pour l’amortissement, nous adoptons un simple amortissement visqueux proportionnel à la matrice de masse lumpée. Les résultats en termes de déplacement au point de chargement sont donnés en Figure 7(a) : les résultats du calcul implicite avec un schéma temporel de type α -généralisé (HAM) sont très bien retrouvés par le calcul explicite, dans sa version mono-pas de temps (on prend alors le micro pas de temps) et dans sa version multi-pas de temps. Il est aussi intéressant de tracer l’erreur relative en énergie, qui est définie comme la somme des énergies interne et cinétique à laquelle on retranche les énergies externes et de dissipation par viscosité, le tout normalisé par l’énergie maximale dans le système au cours du temps. En effet, cela permet de vérifier la bonne prise en compte du champ EAS dans le calcul explicite ainsi que les couplages complexes considérés. Dans la Figure 7(b), nous constatons que l’erreur en énergie est négligeable pour le calcul explicite mono-pas de temps (de l’ordre de 10^{-9}), mais augmente de façon plus notable pour le calcul multi-pas de temps (de l’ordre de 1%). Ce résultat était attendu compte tenu des spécificités des méthodes multi-pas de temps adoptées : présence de dissipation artificielle à l’interface, perte d’un ordre de convergence pour le couplage de schémas d’ordre 2 en multi-pas de temps, mais garantie de stabilité. Notons que cette légère dissipation n’affecte pas la prédiction globale en déplacement comme souligné en Figure 7(a).

4 Conclusion

Nous développons des solveurs, basés sur des schémas d’intégration temporelle implicite et explicite. Côté implicite, les méthodes α -généralisées, introduisant une dissipation numérique contrôlée, prennent en compte un pas de temps adaptatif afin d’optimiser l’intégration temporelle. Deux stratégies implicites de résolution sont mises en œuvre : la méthode classique de Newton–Raphson (NR) et la Méthode

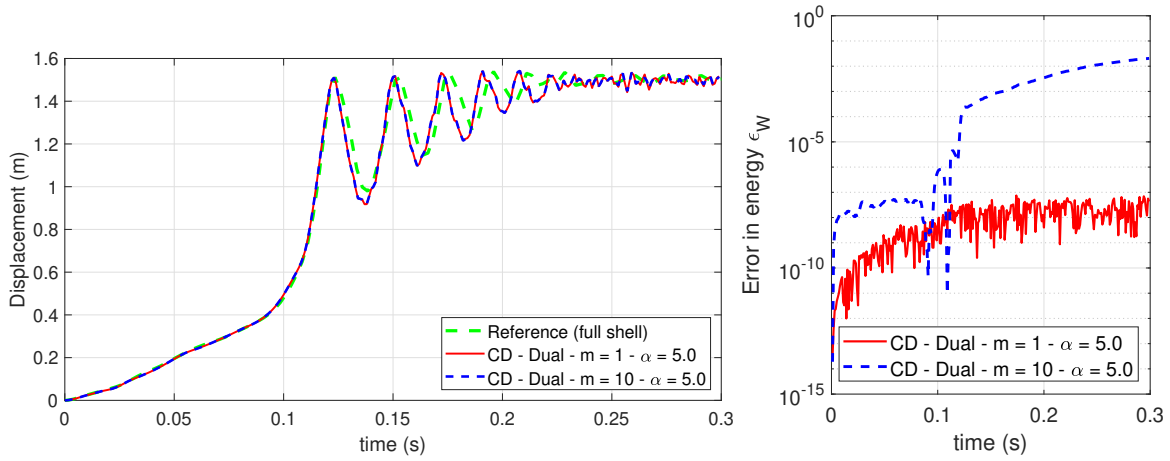


FIGURE 7 – Calcul explicite mono-pas de temps et multi-pas de temps ($\Delta t_m = 25.0s$, $\Delta t_j = 2.5s$, c'est-à-dire avec un rapport de pas de temps $m = 10$), en prenant en compte une matrice de Rayleigh $C = 5.0\hat{M}$ avec \hat{M} désignant la matrice de masse lumpée pour le calcul explicite : déplacement du point de chargement en temps et erreur relative en énergie ϵ_W

Asymptotique Numérique (MAN). Côté explicite, outre le schéma classique de la Différence Centrée, nous proposons un solveur explicite multi-pas de temps, permettant le couplage des sous-domaines en temps. Pour l'élément coque à 7 paramètres, un traitement original de la condition d'orthogonalité est proposé, permettant de préserver l'efficacité des solveurs explicites.

Le code est validé en considérant des cas tests exigeants : tests de conservation des quantités de mouvement et d'énergie pour des modèles avec des maillages non-conformes, flambage dynamique ("snap-through") et changement de branches en post-flambement, présence de forces suiveuses, ainsi que des tests sous chargements impulsionsnels et grandes déformations pour des matériaux élasto-plastiques. Dans ce papier, nous avons validé les trois solveurs pour un cas complexe de flambage dynamique de toit cylindrique décomposé en quatre sous-domaines avec des maillages incompatibles et des éléments hétérogènes (triangulaire, quadrangulaire, coque, élément hexaèdre solide, éléments spectraux).

Le travail de thèse propose un cadre général et cohérent, couvrant de nombreux aspects de la dynamique linéaire (propagation d'ondes) et non linéaire géométrique et matériau pour les structures minces sensibles aux phénomènes de flambage [18, 19, 12, 14]. Le cadre théorique et le code qui en sont issus sont mobilisables pour des études académiques et des applications d'ingénierie de taille moyenne, constituant une base solide pour des extensions vers la mécanique du contact, des calculs explicites hautes performances, et des problèmes de film-substrat ou d'interaction sol-structure dans des milieux non-bornés.

Références

- [1] N. Büchter, E. Ramm, and D. Roehl. Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :2551–2568, 1994.
- [2] J.C. Simo. Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99 :61–112, 1992.
- [3] MATLAB. *version 9.13.0 (R2022b)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2022.
- [4] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*. Hermès-Lavoisier, Paris, 2007.
- [5] Y. Le Notre, M. Brun, C. Grenat, and A. Gravouil. A new micro HATI second order preserving for transient dynamics. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 12 :9, 2025.
- [6] M. Brun, A. Gravouil, A. Combescure, and A. Limam. Two FETI-based heterogeneous time step coupling methods for Newmark and α -schemes derived from the energy method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283 :130–176, 2015.

- [7] A. Gravouil and A. Combescure. A multi-time-step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :199–225, 2001.
- [8] E. Ramm and W.A. Wall. Shell structures - a sensitive interrelation between physics and numerics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60 :381 – 427, 2004.
- [9] S. Baguet and B. Cochelin. On the behaviour of the ANM continuation in the presence of bifurcation. *Communication in Numerical Methods in Engineering*, 19 :459–471, 2003.
- [10] H. Zahrouni, B. Cochelin, and M. Poitier-Ferry. Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175 :71–85, 1999.
- [11] J.C. Simo and M.S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29 :1595–1638, 1990.
- [12] A-K. Chau, M. Brun, P. Ventura, H. Zahrouni, and M. Potier-Ferry. Asymptotic numerical method for dynamic buckling of shell structures with follower pressure. *International Journal of Solids and Structures*, 308 :113135, 2025.
- [13] T. Belytschko, W.K. Liu, and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 2006.
- [14] A-K. Chau, M. Brun, P. Ventura, H. Zahrouni, and M. Potier-Ferry. Explicit dynamics and buckling simulations with 7-p shell elements and enhanced assumed strain. *Finite Elements in Analysis and Design*, 247 :104346, 2025.
- [15] J. Chung and G. M. Hulbert. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation - the generalized-alpha method. *J. Appl. Mech.-Trans*, ASME 60 :371–375, 1993.
- [16] H. M. Hilber, T. J. R. Hughes, and R. L. Taylor. Improved numerical dissipation for the time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5 :283–292, 1977.
- [17] N. Büchter and E. Ramm. Shell theory versus degeneration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 34 :39–59, 1992.
- [18] A-K. Chau, M. Brun, and T. Elguedj. Hybrid Asynchronous Isogeometric Perfectly Matched Layer for transient elastodynamics. *Computers and Geotechnics*, 158 :105387, 2023.
- [19] A-K. Chau, M. Brun, P. Ventura, H. Zahrouni, and M. Potier-Ferry. Non-linear buckling analysis of thin-walled beams modeled with 7-parameter shell elements. *Thin-Walled Structures*, 201 :111994, 2024.