

# Développement d'une méthode non intrusive de couplage global-local pour une analyse cyclique directe

V. Lalleman<sup>1</sup>, V. Magnier<sup>1</sup>, P. Gosselet<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, UMR 9013 – LaMcube – Laboratoire de Mécanique, Multiphysique, Multiéchelle, F-59000 Lille, France

**Résumé** — Ce travail présente le développement d'une méthode de couplage global-local compatible avec la méthode cyclique directe pour la détermination des cycles limites en élastoviscoplasticité, par un pilotage Python du logiciel *Abaqus*. Plusieurs améliorations ont été introduites afin d'accélérer la convergence et de réduire le temps de calcul, notamment l'intégration de l'accélération d'Aitken, l'utilisation des chargements multiples dans le modèle global, ainsi que la suppression du modèle auxiliaire traditionnellement employé pour déterminer le chargement à imposer dans le modèle global. La méthode s'avère efficace pour analyser des systèmes globalement élastiques linéaires avec des zones d'intérêt élastoplastiques.

**Mots clés** — Couplage global-local, analyse cyclique directe, *Abaqus*, approche globale en temps.

## 1 Introduction

Le développement et l'optimisation de structures complexes sont souvent des challenges pour les ingénieurs qui doivent combiner précision, fiabilité et temps de calcul limité. La méthode des éléments finis est maintenant un outil très ancré en industrie pour la conception et l'analyse des structures mécaniques. Cependant, la présence de phénomènes locaux (comme les concentrations de contraintes, la plasticité, l'usure etc.) nécessite un raffinement local du maillage dans les zones affectées afin d'obtenir une précision suffisante. Les multiples modifications du maillage, qui nécessitent souvent de le refaire intégralement, et sa validation entraînent alors une augmentation importante du temps de préparation qui dépasse largement le temps de calcul (jusqu'à 4 fois selon certaines estimations).

Le couplage global-local non intrusif ([1, 2, 3]) est une approche numérique permettant de combiner précision et limitation du temps de préparation. Elle consiste à diviser un problème donné en un modèle global reprenant la structure complète avec un maillage relativement grossier, et des modèles locaux sur les zones d'intérêt, porteurs de complexité mécanique et plus finement discrétisés. Ces modèles interagissent ainsi de façon itérative à chaque incrément de temps en s'échangeant des informations jusqu'à s'approcher de la solution obtenue avec une résolution par éléments finis classique (un unique modèle). Le principal intérêt est ainsi de concentrer les efforts de l'ingénieur sur les modèles locaux, et donc de limiter le temps de création des maillages, tout en préservant la cohérence globale de la structure.

En parallèle de cette méthode, il est régulièrement nécessaire en industrie de s'intéresser au comportement en fatigue des systèmes mécaniques. Dans cette optique, plusieurs méthodes ont été développées comme la méthode des sauts de cycles [4] ou la méthode LATIN [5] qui permettent d'accélérer la recherche du cycle limite et ainsi d'éviter de simuler l'intégralité des cycles. Des travaux sur la combinaison du couplage global-local avec ces méthodes de détermination de cycle limite ont déjà été réalisés [2]. Nous souhaitons ici procéder de manière analogue en nous penchant sur l'analyse cyclique directe [6].

Le couplage global-local a été implémenté dans plusieurs codes industriels, dont *Abaqus*. Dans les dernières versions, son utilisation est possible à travers la co-simulation [7], qui permet de faire interagir plusieurs solveurs numériques dans le but de résoudre des problèmes multiphysiques ou multidomains, à travers l'échange d'informations (déplacement, effort, température, pression, etc.) entre les différents modèles. Le couplage global-local est ainsi réalisé entre deux solveurs *Abaqus/Standard* : un pour le global et un second pour le local. Cependant, la co-simulation n'est pas compatible aujourd'hui avec la résolution cyclique directe.

Ce travail présente les étapes du développement d'une méthode de couplage global-local compatible avec l'analyse cyclique directe dans *Abaqus* et les idées mises en place dans le but de réduire le temps de résolution.

## 2 Développement de la méthode

### 2.1 Présentation de la méthode de couplage global-local usuelle

La présentation s'appuie sur le cas académique de la modélisation d'un essai de traction cyclique (de période  $T$ ) sur une plaque rectangulaire 2D percée. On distingue plusieurs modèles (voir Figure 1). Le modèle global représente de façon simple l'ensemble de la structure, alors que le modèle local  $\Omega_F$  représente finement la zone d'intérêt. On distingue dans le global  $\Omega_G$  le modèle auxiliaire  $\Omega_A$  qui couvre la zone d'intérêt et la zone complémentaire  $\Omega_C$ . La référence est constituée du modèle complémentaire et du modèle local fin.

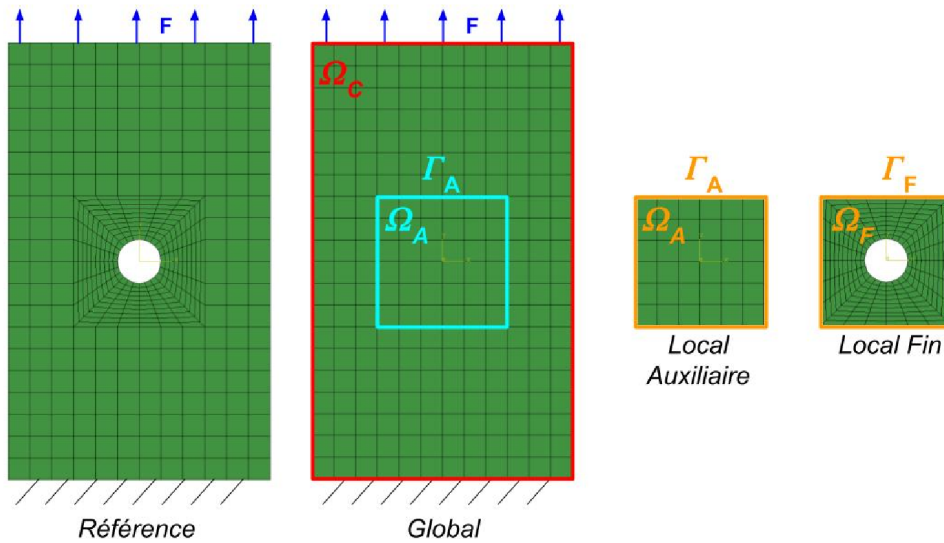


FIGURE 1 – Exemple d'application du couplage global-local : Traction sur une plaque trouée

La simulation est conduite sur  $n$  cycles. Chaque cycle est discrétisé en pas de temps. La méthode consiste à déterminer pour chaque pas de temps le chargement  $p$  à appliquer sur  $\Gamma_A = \partial\Omega^A$  permettant de simuler le remplacement dans le modèle global du domaine auxiliaire par le domaine de substitution. Ce chargement correspond ainsi à la correction du déséquilibre entre la zone complémentaire du modèle global et le bord du modèle fin.

L'algorithme 1 synthétise la méthode. On note  $\lambda$  les flux d'efforts à l'interface (en particulier les réactions aux encastremets).

---

#### Algorithm 1 Couplage global-local séquentiel

---

```

for  $t$  in step  $t < nT$  do
  Initialisation arbitraire de  $p_0$  et résidu  $|r_0| > \epsilon$ 
  while  $|r_j| > \epsilon$  do
    Résoudre pb. global avec chargement  $p_j$  sur  $\Gamma_A$ . Extraire  $u_{\Gamma_A}$ .
    Résoudre pb. local fin et auxiliaire en imposant déplacement  $u_{\Gamma_A}$ . Calculer la réaction  $\lambda_F$  et  $\lambda_A$ .
    Déterminer le résidu :  $r_j = -(\lambda_F + \lambda_C) = -(\lambda_F + p_j - \lambda_A)$ 
    Mettre à jour le chargement :  $p_{j+1} = p_j + r_j$ 
  end while
end for

```

---

## 2.2 Présentation de l'analyse cyclique directe

L'analyse cyclique directe repose sur la représentation de la réponse sous forme d'une série de Fourier, ce qui permet de résoudre l'état stabilisé sans simuler l'ensemble des cycles mais uniquement sur une période. La réponse périodique est décomposée sous la forme donnée dans l'équation (1) où  $N$  est le nombre de termes dans le développement de Fourier, et  $a_0, a_k, b_k$  les coefficients de déplacement associés à chaque degré de liberté du problème. L'évolution des autres variables est décrite uniquement sur un cycle.

$$u(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(k \frac{2\pi}{T} t) + b_k \sin(k \frac{2\pi}{T} t)] \quad (1)$$

Les coefficients sont déterminés dans *Abaqus* à l'aide d'une méthode de Newton modifiée, en cherchant à annuler la projection du résidu d'équilibre sur les modes de Fourier.

## 2.3 Analyse cyclique directe dans le couplage global-local

Dans [7], le couplage global-local a été efficacement mis en œuvre dans *Abaqus* via les fonctionnalités de co-simulation. Malheureusement, *Abaqus* n'autorisant pas dans sa version actuelle d'utiliser en parallèle de la cosimulation avec de l'analyse directe cyclique, le développement d'une nouvelle méthode de couplage pilotée en python est nécessaire. L'idée principale est de procéder à une inversion de la boucle de résolution en procédant au transfert d'informations entre les modèles global et local sur l'ensemble des pas de temps et non plus à chaque incrément. L'équilibre est donc recherché directement sur l'ensemble du cycle. Cela correspond à une approche de type *Schwarz waveform relaxation* [8]. Cette méthode espace-temps s'écrit naturellement sous forme matricielle. Chaque matrice est de dimension  $(n, m)$  avec  $n$  le nombre de degrés de liberté couplés et  $m$  le nombre d'incrément temporels décrivant le cycle.

À l'itération  $j$  du couplage global-local, on note ainsi :

- $P_j$  la matrice des chargement, de composante  $p_{j,x,t}$  le chargement sur le ddl  $x$  à instant  $t$ ;
- $U_j$  la matrice des déplacement, de composante  $u_{j,x,t}$  le déplacement du ddl  $x$  à instant  $t$ ;
- $\Lambda_j$  la matrice des efforts de réaction, de composante  $\lambda_{j,x,t}$  au ddl  $x$  à l'instant  $t$ ;
- $R_j$  la matrice des résidus, de composante  $r_{j,x,t}$  le résidu au ddl  $x$  à l'instant  $t$ .

L'analyse cyclique peut ainsi être introduite dans les modèles global et local. L'algorithme 2 décrit la méthode améliorée par les techniques ci-dessous.

## 3 Diminution du temps de résolution

### 3.1 Suppression du modèle auxiliaire

Pour évaluer le résidu, il est nécessaire de connaître la réaction de la zone complémentaire  $\lambda_C$ . Celle-ci n'est pas facilement accessible et une technique usuelle consiste à utiliser l'équilibre de l'interface globale  $p = \lambda_C + \lambda_A$  après avoir déterminé  $\lambda_A$  qui peut-être obtenu en résolvant un problème de Dirichlet sur le domaine auxiliaire. Comme ce dernier est très grossier et qu'il peut être résolu en parallèle du calcul fin, cela est assez indolore.

Néanmoins, nous proposons d'obtenir  $\lambda_A$  par un simple post-processing du calcul global. Pour cela, il suffit de réclamer, dans le fichier de commande (.inp), le calcul des forces nodales élémentaires (mot-clé NFORC) dans le sous-domaine auxiliaire du modèle local. Après quoi on peut calculer  $\lambda_A$  à partir du fichier résultat (.odb) en utilisant une routine en python capable d'ouvrir le fichier et d'extraire les forces nodales élémentaires. Cela permet d'éviter la création explicite du modèle auxiliaire (il suffit de repérer ses éléments dans le modèle global), et sa résolution.

### 3.2 Multiple Load Cases

Le *Multiple Load Cases* est une fonctionnalité d'*Abaqus* permettant la résolution de plusieurs états de chargement indépendants à partir d'une unique détermination de la matrice de rigidité : les chargements

sont représentés par un membre de droite matriciel et une seule descente-remontée sur la factorisation de la matrice permet de résoudre tous les cas.

Cette fonctionnalité est exploitable dans le cas d'un problème global élastique linéaire quasi-statique où il n'y a pas de dépendance dans la résolution des pas de temps globaux.

### 3.3 Accélération d'Aitken

Tout comme pour les méthodes de couplage global-local usuelles, il est possible d'utiliser le facteur de relaxation pour diminuer le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la précision souhaitée [9]. Une relaxation couramment utilisée est celle d'Aitken, bien connue pour son efficacité et son coût quasi-nul car elle ne requiert que deux produits scalaires (espace-temps dans notre cas). Un unique facteur de relaxation est alors imposé pour l'ensemble du cycle. En imposant  $\omega_1 = 1$  et en réutilisant les termes définis dans la section 2.3, l'expression générale du coefficient d'Aitken devient celle explicitée dans (2) :

$$\forall j > 0, \omega_{j+1} = \omega_j \frac{\text{tr}(R_{j-1}^T (R_j - R_{j-1}))}{\text{tr}((R_j - R_{j-1})^T (R_j - R_{j-1}))} \quad (2)$$

$$P_{j+1} = P_j + \omega_{j+1} R_j$$

où  $A^T$  représente la transposée de la matrice  $A$  et  $\text{tr}$  est l'opérateur de trace des matrices carrées.

### 3.4 Mise à jour de l'algorithme de couplage

L'algorithme 2 détaille la version pilotée par python mise à jour avec ces trois dernières propositions. La suppression de la géométrie auxiliaire dans le modèle local, l'utilisation d'une méthode de type *Multi Load Case* dans le modèle global et l'utilisation de la relaxation d'Aitken pour la détermination des coefficients de relaxation permettent ainsi respectivement de diminuer le temps de calcul du local, de réduire celui du global et enfin de réduire le nombre d'itérations pour atteindre le critère de précision.

---

#### Algorithm 2 Couplage global en temps via python et accéléré

---

```

Initialisation arbitraire de  $P_0$  et résidu  $r_0 > \varepsilon$ 
while  $r_j > \varepsilon$  do
    Résoudre global sur l'ensemble des pas de temps via Multiple Load Case  $P_j$ . Calculer  $U_{\Gamma_G}$ 
    Extraire  $\Lambda_{A,j}$  à partir de la routine basée sur NFORC
    Résoudre local fin par DCA avec déplacement imposé  $U_{\Gamma_G}$ . Calculer  $\Lambda_F$ .
    Calculer le résidu :  $R_j = -(\Lambda_{F,j} + P_j - \Lambda_{A,j})$  et  $r_j = \max_t \|R_j(t)\|$ 
    Calculer  $\omega_{j+1}$  par (2)
    Mettre à jour le chargement :  $P_{j+1} = P_j + \omega_{j+1} R_j$ 
end while

```

---

## 4 Validation

La méthodologie est utilisée sur un essai de traction cyclique d'une plaque trouée en 2D, à l'image de la Figure 1. La plaque est encadrée au niveau de sa base inférieure. Le déplacement de traction cyclique, de motif triangulaire comme affiché sur la figure 2, est imposé sur la face supérieure de la plaque. La valeur maximale du déplacement a été définie de telle sorte que la zone de plastification se limite au patch local, ce qui est pertinent dans le cadre du couplage global-local. Les propriétés élastoplastiques correspondent à celles d'un acier de type S235 : réponse bilinéaire en traction uniaxiale avec module de Young 210 GPa, limite élastique 235 MPa, module d'érouissage 1,5 GPa, coefficient de Poisson 0,3. La valeur de la précision  $\varepsilon$  pour le résidu de couplage a été définie expérimentalement et est égale ici à  $10^{-4}$ . Les résultats présentés dans les différentes sous-section sont extraits à l'instant  $t = 0,5s$ , c'est-à-dire à l'instant où le chargement est le plus important.

Deux géométries sont utilisées :

- une plaque avec un trou ;
- une plaque avec 2 trous.

Les résultats sont comparés avec ceux obtenus avec le modèle « direct » qui correspond à un modèle monolithique comprenant l'intégralité de la géométrie réelle sur lequel on applique une analyse cyclique directe.

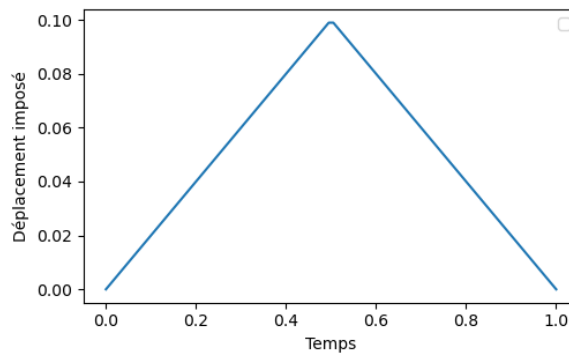


FIGURE 2 – Motif cyclique du chargement imposé

#### 4.1 Cas de la plaque à 1 trou

Les figures 3 et 4 montrent les résultats obtenus avec le modèle direct et ceux obtenus avec le couplage. Le comparatif des performances est affiché dans le tableau 1. Pour les lignes de couplage, le temps est affiché sous la forme (#iterations × (temps global + temps local)). On note alors une bonne précision des résultats du modèle couplé vis-à-vis du modèle direct avec un écart relatif de 6,3% pour la plasticité équivalente cumulée maximale et de 0.007% pour la contrainte équivalente de Von Mises maximale. Les méthodologies détaillées dans la section 3 ont toutes été efficaces, avec un temps de résolution plus de deux fois plus court pour le modèle couplé accéléré que pour le modèle couplé sans accélération (216 secondes pour le premier contre 490 secondes pour le second).

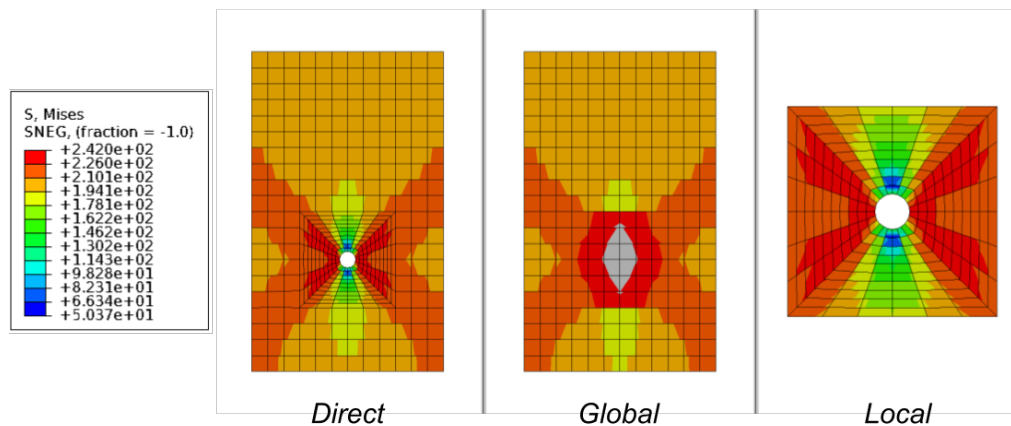


FIGURE 3 – Résultats de l'essai de traction sur la plaque avec deux trous (Contrainte) - 1 trou

TABLE 1 – Résultats - Géométrie avec 1 trou

Modèle	Accélération	Degrés de liberté	Temps (s)	Contrainte eq. de Von Mises max (MPa)	Déformation plastique max (éq. cumulée)
Direct	x	2928	22	242,0	4.063e-03
global-local	Sans	1638 + 1584	14 × (14 + 21)	241,9	3.822e-03
global-local	Avec	1638 + 1584	9 × (9 + 15)	241,9	3.822e-03

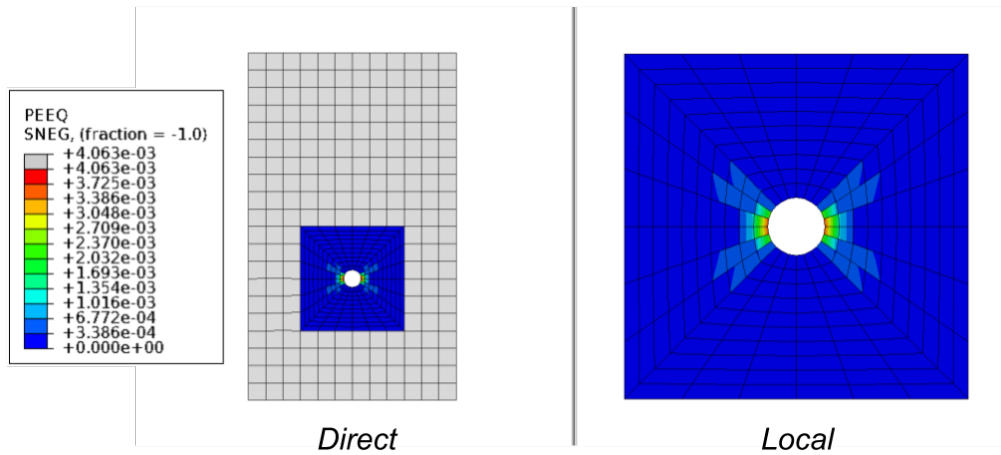


FIGURE 4 – Résultats de l’essai de traction sur la plaque avec deux trous (Plasticité) - 1 trou

## 4.2 Cas de la plaque à 2 trous

La plaque contient cette fois-ci deux perçages, ce qui permet de montrer la possibilité d’avoir plusieurs modèle locaux avec cette méthodologie. De plus, les trous sont suffisamment proches pour comparer d’abord les résultats obtenus en intégrant les deux perçages dans un unique patch, puis en utilisant un patch par perçage. Dans ce second cas, les modèles locaux partagent alors une frontière. Les résultats obtenus avec le modèle direct et avec le modèle couplé pour la géométrie avec les deux trous sont visibles dans les figures 5 et 6 et les performances obtenues sont détaillées dans le tableau 2.

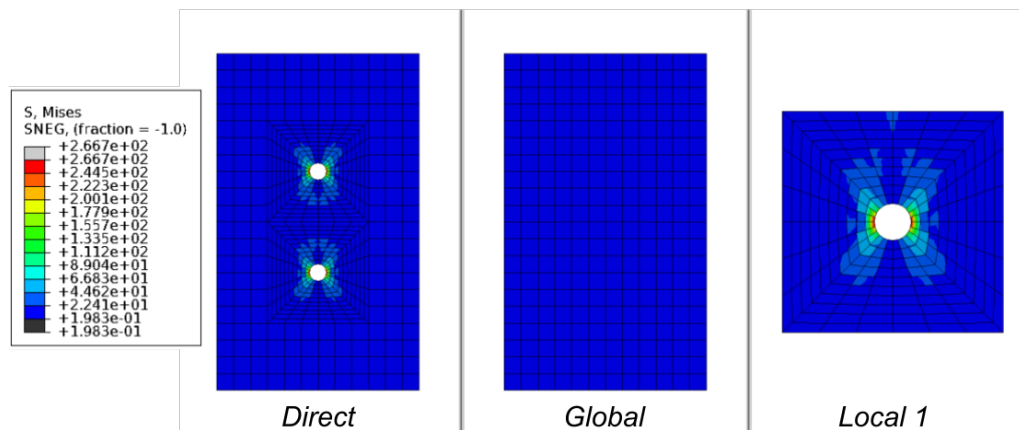


FIGURE 5 – Résultats de l’essai de traction sur la plaque avec deux trous (Contrainte) - 2 trous

TABLE 2 – Résultats - Géométrie avec 2 trous

Modèle	Nombre de patches	Acc.	Degrés de liberté	Temps (s)	S (MPa)	Plasticité
Direct	x	x	4218	22	241	3.460e-03
global-local	1	Sans	1638 + 2550	$7 \times (14 + 23)$	240,4	3.382e-03
global-local	1	Avec	1638 + 2550	$7 \times (9 + 18)$	240,4	3.382e-03
global-local	2	Sans	1638 + 2 × 1584	$8 \times (14 + 21)$	240,4	3.382e-03
global-local	2	Avec	1638 + 2 × 1584	$6 \times (9 + 15)$	240,4	3.382e-03

À nouveau, la méthode de couplage global-local a permis d’avoir des résultats proches de ceux obtenus avec la méthode direct avec des écarts relatifs de 0,25% pour la contrainte maximale et de 9% pour la plasticité maximale. Les idées mises en place dans la section 3 ont également permis de réduire

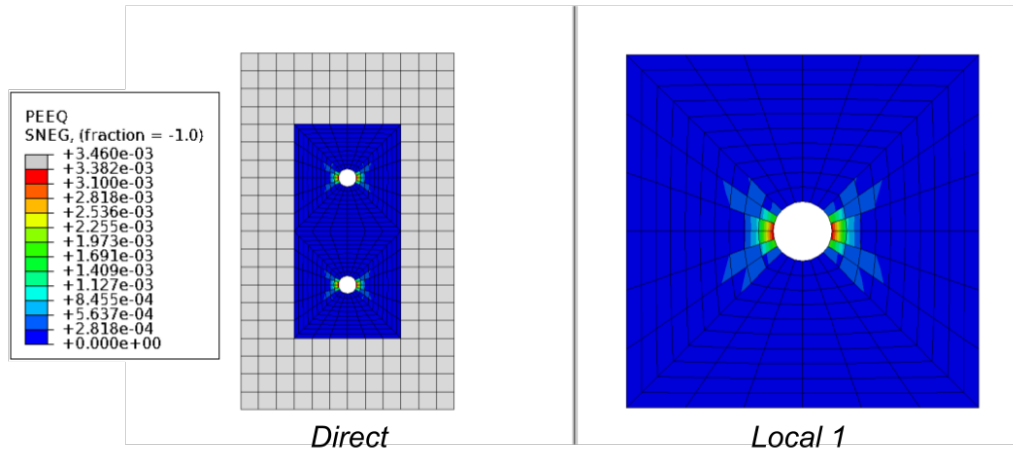


FIGURE 6 – Résultats de l’essai de traction sur la plaque avec deux trous (Plasticité) - 2 trous

le temps de résolution total pour le modèle avec un patch (189 secondes contre 259 secondes) et pour le modèle avec deux patches (144 secondes contre 280 secondes). Le calcul est alors plus rapide avec la division du modèle local en deux patches qu’avec le modèle n’ayant qu’un seul patch local en raison de la parallélisation des calculs locaux réalisée à l’aide de la bibliothèque *multiprocessing* qui permet de créer un process par patch. Sur ce dernier point, l’architecture permet de lancer les résolutions en version synchrone (toutes les résolutions locales doivent être terminées pour lancer la résolution globale) ou en version asynchrone (lancement du global dès qu’une résolution locale est terminée) permettant dans certains cas d’avoir de meilleures performances. Les résultats présentés ici ont été obtenus avec la version synchrone.

Le fait que la résolution directe soit plus rapide que la méthode couplée est usuel dans le cas du couplage global/local. La méthode n’est pas employée pour un gain de temps en termes de résolution, mais pour un gain de temps sur la préparation du modèle (pas de nécessité de modifier la géométrie et le maillage). Le temps de résolution plus court pour le modèle direct est dû à la résolution unique de chaque incrément. La méthode de couplage global/local nécessite à l’inverse une résolution multiple (1 par itération de calcul) de chaque incrément, et un lancement séquentiel du modèle global, puis du local.

### 4.3 Pertinence computationnelle du couplage global-local

L’intérêt premier du couplage global-local est d’éviter la création d’un modèle monolithique qui requiert un effort de maillage significatif sur les cas réels. Les exemples précédents ont montré que la méthode approche correctement le calcul direct, le niveau du résidu ayant été réglé suffisamment bas, les écarts s’expliquent principalement par des différences de développement des séries de Fourier entre le modèle monolithique et les modèles locaux.

Le cas de l’association couplage global-local et analyse cyclique directe permet d’envisager, grâce aux améliorations présentées dans ce papier, des situations où l’approche couplée est même plus performante d’un point de vue temps de calcul. Tant que le modèle global reste linéaire et que les modèles locaux restent de taille modérée, leur coût de calcul en fonction du nombre de degrés de liberté croît significativement moins vite que celui d’une analyse directe cyclique sur le modèle monolithique.

À partir d’une simple régression, il a été possible d’estimer la taille du problème complémentaire (en conservant les deux patches non-linéaires à l’identique) à partir de laquelle l’approche partitionnée serait plus efficace. Dans ce cas on voit que la limite se situe aux alentours de 33 000 degrés de liberté. Différents temps de calcul sont regroupés dans le tableau 3.

## 5 Conclusion

Ce papier a présenté le développement d’une méthode de couplage global-local pilotée en Python, compatible avec la méthode d’analyse cyclique directe. Ces deux méthodologies ont déjà été largement

TABLE 3 – Performances - Méthode directe vs Méthode couplée

Direct		Couplage global-local	
Nombre de ddl	Temps (s)	Nombre de ddl	Temps (s)
4218	26,18	4806	124,81
7242	39,99	7830	128,15
10266	55,03	10854	135,75
32946	155,40	33534	152,30

décrites dans la littérature, mais n’avaient encore jamais été combinées, malgré l’utilisation d’autres approches de détermination du cycle limite en couplage global-local. La combinaison de ces deux méthodes a permis d’obtenir des résultats proches de ceux obtenus avec une analyse cyclique directe monolithique en évitant les difficultés de remaillage qui très souvent prennent plus de temps que le calcul.

Dans un second temps, nous avons présenté l’intégration de différentes stratégies visant à réduire le temps de résolution, applicables également dans un cadre de couplage global-local sans analyse cyclique directe. Les essais réalisés sur le cas test de traction d’une plaque trouée ont mis en évidence l’efficacité de ces améliorations. Ce cadre d’application a rendu envisageable des situations où le calcul partitionné était plus efficace que le calcul monolithique.

Enfin, afin de favoriser la reproductibilité des résultats et de faciliter la diffusion de la méthode au sein de la communauté scientifique, un dépôt Git sera prochainement créé pour rendre le code open source.

## 6 Références bibliographiques

### Références

- [1] O. Allix, P. Gosselet. *Non Intrusive global-local Coupling Techniques in Solid Mechanics : An Introduction to Different Coupling Strategies and Acceleration Techniques*, Modeling in Engineering Using Innovative Numerical Methods for Solids and Fluids, Springer Nature Switzerland AG, 203-220, 2020.
- [2] M. Blanchard, O. Allix, P. Gosselet, G. Desmeure. *Space/time global-local noninvasive coupling strategy : Application to viscoplastic structures*, Finite Elements in Analysis and Design, Elsevier, 1-12, 2019.
- [3] L. Gendre, O. Allix, P. Gosselet, F. Comte. *Non-intrusive and exact global-local techniques for structural problems with local plasticity*, Computational Mechanics, Springer Verlag, 233-245, 2009.
- [4] S. Savalle and J.P. Culie *Méthodes de calcul associées aux lois de comportement cyclique et d’endommagement*, La recherche aérospatiale, 5, 263-278, 1978
- [5] P. Ladevèze. *La méthode à grand incrément pour l’analyse de structures à comportement non-linéaire décrit par variables internes*, C.R.A.S 309 Série II, 11, 309, 1095–1099, 1989
- [6] H. Maitournam, B. Pommier, J-J. Thomas *Détermination de la réponse asymptotique d’une structure anélastique sous chargement thermodynamique cyclique*, C. R. Mécanique, 330, 703-708, 2002
- [7] O. Bettinotti, S. Guinard, E. Véron, P. Gosselet. *On the implementation in Abaqus of the global–local iterative coupling and acceleration techniques*, Finite Elements in Analysis and Design, Elsevier, 104-152, 2024
- [8] M. J. Gander, A. M. Stuart M. *Space-time continuous analysis of waveform relaxation for the heat equation*, SIAM J. Sci. Comput., 19, 2014-2031, 1998
- [9] A. Nouy, F. Pled *A multiscale method for semi-linear elliptic equations with localized uncertainties and nonlinearities*, ESAIM : M2AN, 1763-1802, 2018
- [10] M. Smith. *ABAQUS/Standard User’s Manual, Version 6.9*, Dassault Systèmes Simulia Corp, 2009.