

# Calcul de modes normaux non linéaires : comparaison entre une forme normale unimodale et un calcul par HBM/MAN

A. Grolet<sup>1</sup>, A. de Figueiredo Stable<sup>2</sup>, C. Touzé<sup>2</sup>, O. Thomas<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LISPEN, Arts et Métiers, Lille, aurelien.grolet@ensam.eu

<sup>2</sup> IMSIA, ENSTA, Institut Polytechnique de Paris, Palaiseau

**Résumé** — On propose ici une comparaison entre deux méthodes de calcul de mode non linéaire. On considère d'une part le calcul d'une forme normale complexe unimodale, et d'autre part la résolution par équilibrage harmonique (HBM) couplée à une méthode asymptotique (numérique) (MAN). On montre que le premier pas d'une procédure HBM/MAN est équivalent aux résultats donnés par la forme normale complexe. On peut alors réinterpréter les résultats d'une continuation HBM/MAN comme un modèle réduit défini par morceaux, chaque tronçon correspondant à un intervalle d'amplitude donné. La comparaison est illustrée sur un système à deux ddl et sur une poutre console discrétisée par éléments finis géométriquement exacts.

**Mots clés** — forme normale complexe unimodale, HBM/MAN, modèles réduits.

## 1 Introduction

Cette étude considère le calcul de modèle réduit unimodal pour des systèmes dynamiques non linéaires. On propose un parallèle entre le calcul d'une forme normale complexe, mise en œuvre au sein de la méthode de paramétrisation des variétés invariantes [1, 2] et le calcul d'un mode non linéaire par la méthode de l'équilibrage harmonique (que l'on nommera sous son acronyme anglais HBM pour *Harmonic Balance Method*) couplée à une procédure asymptotique-numérique (MAN) [8, 9].

Dans les deux cas, une paramétrisation de la variété invariante associée au mode non linéaire considéré, et définie comme variété invariante tangente au sous-espace propre [6], est obtenue. Bien que différentes en apparence, on montre que ces paramétrisations sont très similaires. En se basant sur les résultats de la forme normale, on propose une modification de l'approximation HBM classiquement utilisée pour faire apparaître explicitement les composantes de la dynamique réduite. On montre alors que l'on obtient des équations similaires à celles obtenues lors de la résolution des équations de la HBM par la méthode asymptotique-numérique.

Cette comparaison permet d'interpréter le mode non linéaire calculé par HBM/MAN comme un modèle réduit défini par morceaux. Le premier tronçon, calculé à partir d'une amplitude nulle, correspond à la solution obtenue par la forme normale. La procédure de continuation par MAN permet d'étendre les résultats de la forme normale en calculant de nouvelles branches sur lesquelles la convergence de la solution est assurée grâce à une estimation automatisée du rayon de convergence des séries entières [8].

La comparaison est illustrée sur un système à deux degrés de liberté (ddl) et sur une poutre console discrétisée en éléments finis géométriquement exacts.

## 2 Description du système et de la procédure

Pour simplifier la présentation, on considère que le système dynamique étudié est écrit sous la forme d'une équation algèbro-différentielle quadratique (voir par exemple [9]) donnée par :

$$A\dot{y} = Ly + Q(y, y). \quad (1)$$

avec  $y$  le vecteur des ddl de taille  $N$ ,  $A$  et  $L$  des matrices constantes de taille  $N$  et  $Q$  un opérateur quadratique.

## 2.1 Forme normale complexe unimodale

Pour le calcul d'une forme normale complexe unimodale [1, 2], on recherche un changement de variable  $W$  et une dynamique réduite  $f$  tel que :

$$y = W(z) \text{ et } \dot{z} = f(z),$$

où  $z = (z_1, z_2)$  est la coordonnée normale complexe de dimension 2 (réduction à un mode non linéaire) avec  $\bar{z}_1 = z_2$ . En pratique  $W$  et  $f$  sont calculés à l'aide de développements polynomiaux sous la forme suivante :

$$y = W(z) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2} W_{\alpha\beta} z_1^\alpha z_2^\beta \text{ et } \dot{z} = f(z) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2} f_{\alpha\beta} z_1^\alpha z_2^\beta$$

En utilisant un style forme normale dans la méthode de paramétrisation des variétés invariantes, la dynamique réduite est recherchée sous la forme la plus simple possible, ne contenant que les termes résonnants pour le mode considéré [5, 1]. Celle-ci peut être écrite explicitement sous la forme suivante, toujours sous hypothèse de réduction à un mode non linéaire :

$$\dot{z}_1 = \lambda(z_1, z_2) z_1 = \lambda_0 z_1 + \lambda_2 z_1^2 z_2 + \lambda_4 z_1^3 z_2^2 + \dots$$

la dynamique réduite pour  $z_2$  étant donnée par le conjugué de l'équation précédente.

En introduisant la représentation polaire  $z_1 = \rho e^{i\theta}$  et en substituant dans la dynamique réduite, on obtient  $\dot{z}_1 = \lambda(\rho^2) z_1$ , ce qui mène à :

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + i\dot{\theta} = \lambda(\rho^2)$$

En posant  $\lambda = \mu + i\omega$ , on obtient alors la dynamique réduite exprimée en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho \mu(\rho^2) = \rho (\mu_0 + \mu_2 \rho^2 + \dots + \mu_D \rho^D), \\ \dot{\theta} &= \omega(\rho^2) = \omega_0 + \omega_2 \rho^2 + \dots + \omega_D \rho^D. \end{aligned}$$

où  $D$  est le degré de la forme normale.

Dans le cas conservatif, on montre que  $\mu = 0$  et donc que  $\rho$  est constant. Par conséquent  $\omega = \omega(\rho^2)$  est également constant. L'intégration de la dynamique réduite est immédiate et donne  $\rho(t) = \rho_0$  et  $\theta(t) = \omega(\rho_0)t + \theta_0$ . On note que la relation  $\omega = \omega(\rho^2)$  donne directement l'expression de la relation amplitude-fréquence, aussi appelée *backbone curve* en anglais.

Dans le cas amorti, on a :  $\mu = \mu_0 + \mu_2 \rho^2 + \dots$ , où  $\mu_0$  est le taux d'amortissement linéaire du mode considéré. L'intégration (numérique) de la dynamique réduite donne alors le taux d'amortissement  $\mu = \mu(\rho(t)^2)$  et la fréquence instantanée  $\omega = \omega(\rho(t)^2)$  du mouvement.

Une fois la dynamique réduite intégrée, la reconstruction du vecteur des ddl  $y$  est donné par le changement de variable et s'écrit :

$$y(t) = W(z(t)) = \sum_{\substack{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \\ \alpha + \beta \leq D}} W_{\alpha\beta} \rho(t)^{\alpha+\beta} e^{i(\alpha-\beta)\theta(t)}.$$

Cette dernière expression peut aussi se réécrire sous la forme suivante :

$$y(t) = \sum_{|h| \leq D} y_h(\rho(t)) e^{ih\theta(t)}. \quad (2)$$

avec :

$$y_h(\rho) = \sum_{d=|h|, |h|+2, \dots, D} W_{\frac{d+h}{2}, \frac{d-h}{2}} \rho^d$$

On reconnaît alors dans l'équation (2) un développement harmonique de type HBM où les coefficients  $y_h$  sont développés en série entière en fonction d'un paramètre  $\rho$ . Dans le cas conservatif, cela correspond exactement à la procédure réalisée lors d'un calcul par HBM/MAN. Dans le cas amorti, les procédures restent très similaires, à l'exception que le paramètre  $\rho$  dépend du temps.

## 2.2 Solution par équilibrage harmonique

Les résultats de la partie précédente suggèrent d'adapter le développement classique de la HBM pour rechercher les solutions sous la forme suivante [3] :

$$y(t) = \sum_{|h| \leq H} y_h(\rho(t)) e^{ih\theta(t)}$$

où les  $y_h$  correspondent aux coefficients de Fourier (inconnus). Les variables  $\rho$  et  $\theta$  sont définies par une dynamique réduite, elle aussi inconnue, et supposée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho\mu(\rho), \\ \dot{\theta} &= \omega(\rho), \end{aligned}$$

En substituant ces développements dans les équations du mouvement et en équilibrant les coefficients de chaque harmonique, on obtient une série de  $2H + 1$  équations, l'équation pour l'harmonique  $h \in [-H, H]$  étant donnée par :

$$(ih\omega A - L) y_h + \rho\mu A \partial_\rho y_h = \sum_{k+l=h} Q(y_k, y_l) \quad (3)$$

La résolution de  $y_h$ ,  $\mu$  et  $\omega$  en fonction de  $\rho$  à partir de ces équations permet en théorie de calculer les modes non linéaires du système (conservatifs ou non). Cependant, l'équation (3) est une équation différentielle sous-déterminée et la résolution dans le cas général peut s'avérer difficile.

Dans la suite de cette présentation, on se place dans le cas conservatif. Le cas amorti est traité dans [3]. Sans dissipation, on a  $\mu = 0$ , l'amplitude  $\rho$  est alors constante et correspond au niveau d'énergie, et  $\omega = \omega(\rho)$ . Les équations (3) se réduisent alors à (pour  $h \in [-H, H]$ ) :

$$(ih\omega A - L) y_h = \sum_{k+l=h} Q(y_k, y_l)$$

Les équations précédentes sont exactement les équations de la HBM classique. On peut alors développer  $y_h$  et  $\omega$  en série entière du paramètre  $\rho$ . Cela revient à utiliser une méthode asymptotique pour résoudre les équations de la HBM en identifiant le paramètre de continuation à l'amplitude  $\rho$  de la variable normale.

Dans le cas conservatif, les variables sont alors recherchées sous la forme suivante :

$$y_h = \sum_{n=0}^D y_{hn} \rho^n, \text{ et } \omega = \sum_{n=0}^D \omega_n \rho^n$$

et la résolution suit la procédure classique de résolution HBM/MAN décrite par exemple dans [8] et utilisée par exemple dans le logiciel de continuation MANLAB [9].

On note cependant qu'en imitant la procédure de calcul de la forme normale, on peut calculer la première branche du mode non linéaire à partir d'une amplitude nulle (solution d'équilibre statique), voir [3] pour plus de détails. Ce point est important et diffère de la procédure utilisée habituellement en continuation numérique pour ce type de problème, et mise en œuvre en particulier dans MANLAB, où un algorithme de descente de Newton est utilisé pour trouver un premier point de calcul à amplitude non nulle.

Pour le calcul des branches suivantes, on utilise la méthode asymptotique à partir du dernier point acceptable de la branche précédente (continuation à partir d'une solution périodique). Le rayon de convergence de chaque branche est estimé en supposant que toute l'erreur est contenue dans le premier terme négligé [8].

## 2.3 Commentaires

Les sections précédentes montrent que, dans le cas conservatif, le calcul d'un mode non linéaire par HBM/MAN peut être comparé à un calcul de forme normale complexe si on identifie le paramètre de continuation avec l'amplitude  $\rho$  de la variable normale. On note cependant une légère différence au

niveau des termes contenus dans les développements. Pour la forme normale, la reconstruction du vecteur des ddl s'écrit :

$$y(t) = \sum_{|h| \leq D} \sum_{d=|h|, |h|+2, \dots, D} W_{\frac{d+h}{2} \frac{d-h}{2}} \rho^d e^{ih\theta(t)}. \quad (4)$$

alors que dans le cas de la solution obtenue par équilibrage harmonique, proposée dans la section 2.2, elle s'écrit :

$$y(t) = \sum_{|h| \leq H} \sum_{d=0}^D y_{hd} \rho^d e^{ih\theta(t)}, \quad (5)$$

Dans le cas de la forme normale (4), le développement a une forme particulière (les coefficients des harmoniques paires (resp. impaires) ne contiennent que des puissances paires (resp. impaires) de  $\rho$ ) et le nombre d'harmoniques est imposé par le degré  $D$  de la forme normale. De plus, le calcul est uniquement valable au voisinage de l'origine, i.e. pour de faibles amplitudes de  $\rho$ . La forme trop restrictive du développement en forme normale empêche de reprendre le calcul à partir d'une solution périodique non nulle.

Dans le cas de la procédure d'équilibrage harmonique (5), ces restrictions sont levées. Le nombre d'harmoniques  $H$  est indépendant du degré des séries entières  $D$  et la structure du développement permet d'appliquer une procédure de continuation à partir de solutions périodiques non nulles (HBM/MAN). La première branche calculée par HBM/MAN correspond à la branche calculée par forme normale, et les branches suivantes, obtenues par continuation, permettent d'étendre les résultats de la forme normale. Le résultat peut être interprété comme un modèle réduit donné par morceau, chaque morceau correspondant à une branche du diagramme calculée par HBM/MAN. Un intérêt important de cette comparaison est aussi de proposer un calcul de forme normale par morceaux, ce qui lève les limitations usuelles de la méthode, qui est fondée sur une théorie locale et des développements asymptotiques [12]. On obtient au final plusieurs modèles réduits qui sont valables sur une gamme d'amplitude donnée.

### 3 Exemples numériques

#### 3.1 Système à deux ddl

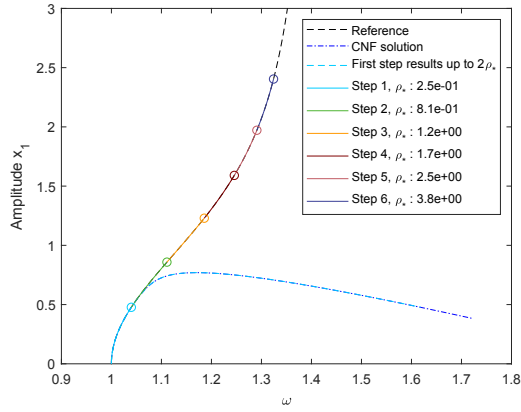
Dans cette section, on considère un système à deux degrés de liberté avec une non-linéarité cubique. Ce système a été défini dans [10] et a été utilisé à de nombreuses reprises. Les équations du mouvement sont données par :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_1^3 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + 2x_2 - x_1 &= 0. \end{aligned}$$

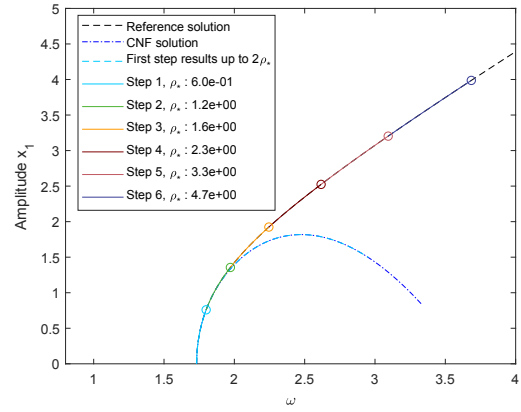
Après transformation des équations du mouvement sous la forme d'un système algébro-différentiel quadratique, les modes non linéaires du système sont calculés par la méthode de la forme normale complexe (sous hypothèse unimodale) et par la procédure d'équilibrage harmonique. Pour chaque mode, le nombre d'harmoniques est fixé à  $H = 11$  et le degré des développements asymptotiques (MAN ou forme normale) est fixé à  $D = 11$ . Une solution de référence est calculée par HBM avec MANLAB avec  $H = 21$  harmoniques.

Les *backbone curves* obtenues pour chaque mode et pour chaque méthode sont représentés sur la figure 1. Dans chaque graphique, la solution de référence est représentée en courbe pointillée noire, les courbes bleues pointillées représentent la solution forme normale complexe et les courbes en traits continus représentent les solutions obtenues par équilibrage harmonique. Pour ces dernières, les cercles indiquent les points de redémarrage de la continuation.

Pour chaque mode, on observe que la première branche de la solution obtenue par équilibrage harmonique donnent des résultats strictement identiques à ceux obtenus à partir de la forme normale complexe. Cette solution diverge de la solution de référence lorsque l'amplitude augmente. En utilisant la procédure de continuation HBM/MAN, on peut étendre les résultats de la forme normale complexe à des amplitudes plus importantes, tout en restant en parfait accord avec la solution de référence.



(a) Backbone curve, mode 1



(b) Backbone curve, mode 2

FIGURE 1 – *Backbone curves* pour le système conservatif à deux ddl. Comparaison entre la forme normale (CNF), la HBM/ANM (HBNF) et une solution de référence

## 3.2 Poutre console

### 3.2.1 Description du modèle

Dans cette section, on considère un système donné par la discrétisation en éléments finis d'une poutre console par des éléments de poutre géométriquement exacts. Seuls les mouvements dans le plan sont considérés. Le modèle est décrit en détail dans [11], on rappelle ici seulement les éléments essentiels.

La poutre est droite avec une section rectangulaire uniforme. Elle est discrétisée par des éléments finis géométriquement exacts basés sur une cinématique de Timoshenko interpolée par des fonctions quadratiques. La rotation des sections droites dans le plan est représentée par un nombre complexe unitaire et la contrainte d'unitarité est imposée en utilisant des multiplicateurs de Lagrange. Au total, il y a cinq champs de variables à interpoler (2 champs de déplacement (axial et transverse), les deux composantes du nombre complexe représentant la rotation et le champ de multiplicateur de Lagrange). Les champs de déplacement sont normalisés par rapport à la longueur de la poutre, résultant en un modèle qui ne dépend que d'un seul paramètre  $\eta = I/(SL^2)$  (où  $L$  est la longueur de la poutre,  $S$  l'aire de la section droite et  $I$  le moment quadratique par rapport à l'axe de flexion).

Dans l'application, la poutre est discrétisée en 30 éléments avec 3 nœuds par élément et 5 ddl par nœud. Après reformulation sous la forme d'une équation algèbro-différentielle quadratique, le modèle contient 1500 variables (240 ddl physiques, 60 multiplicateurs de Lagrange et 1200 variables auxiliaires nécessaires à une reformulation quadratique des non-linéarités).

### 3.2.2 Résultats

On considère dans la suite le calcul du premier mode de flexion de la poutre console. Une solution de référence est calculée avec MANLAB (HBM avec  $H = 20$  harmoniques, MAN avec un degré  $D = 20$ ).

La solution forme normale est calculée pour plusieurs degrés maximum  $D = 3, 5, 7, 15$  et cette solution est comparée à la solution obtenue par la méthode d'équilibrage harmonique proposée à la section 2.2 pour  $H = 7$  et  $D = 7$ .

La *backbone curve* du premier mode de flexion est représentée sur la figure 2 pour les différentes méthodes. Le calcul d'une telle solution pour de hautes amplitudes reste un défi pour les modèles réduits. En effet, comme montré dans [1], la variété invariante du premier mode non linéaire pour une poutre console se replie sur elle-même et donc possède un point de rebroussement. Ce comportement géométrique dans l'espace des phases implique que les méthodes de réduction fondées sur des idées linéaires ont beaucoup de mal à représenter ce comportement. A contrario, la méthode de paramétrisation des variétés invariantes avec le style forme normale permet de passer le point de repliement [1]. Pour la solution forme normale (dénotée CNF sur le graphique pour Complex Normal Form), on observe une convergence des résultats pour des amplitudes transverses inférieures à 0.65 seulement, les amplitudes supérieures ne peuvent pas être représentées convenablement du fait de la nature intrinsèquement locale

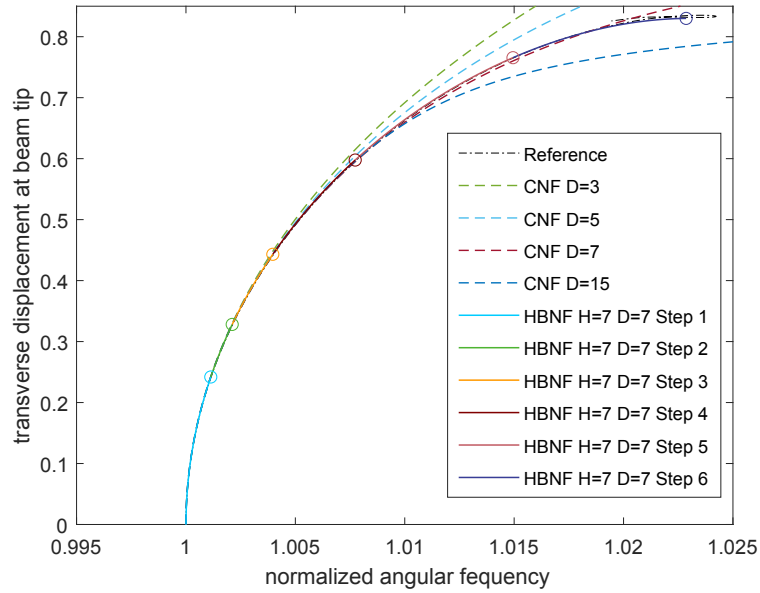


FIGURE 2 – *Backbone curves* pour le premier mode de la poutre cantilever. Comparaison entre la forme normale (CNF), la HBM/MAN (HBNF) et une solution de référence

de la forme normale.

La méthode d'équilibrage harmonique proposée à la section 2.2 permet de contourner cette limitation grâce à la procédure de continuation. La solution est obtenue sous la forme d'une collection de branches, sur lesquelles la convergence de la solution est assurée grâce à une estimation du rayon de convergence de chaque branche. Le résultat peut toujours être interprété en termes de modèle réduit, celui-ci étant défini par morceaux.

## 4 Conclusion

Cette étude propose de faire un lien explicite entre la méthode de la forme normale et la méthode HBM/MAN pour le calcul de modèles réduits d'équations non linéaires conservatives, avec application aux systèmes vibrants en ne considérant qu'un seul mode non linéaire. La dynamique a alors lieu sur une variété invariante bidimensionnelle.

En identifiant le paramètre de continuation de la MAN à l'amplitude de la variable normale, et en identifiant la décomposition HBM à une relation non linéaire entre les coordonnées physiques et les coordonnées normales, la méthode de la HBM/MAN permet d'étendre les résultats de la forme normale à des amplitudes arbitraires. La solution obtenue par HBM/MAN peut être interprétée comme un modèle réduit défini par morceaux, chaque tronçon correspondant à une branche du diagramme. Les méthodes ont été présentées sur deux exemples numériques qui illustrent l'adéquation entre la solution forme normale et la première branche calculée par HBM/MAN à partir d'une amplitude nulle.

Plusieurs voies restent à explorer, en particulier : (i) l'application de la procédure de continuation sur l'équation (3) dans le cas amorti, (ii) la construction de modèles réduits à plusieurs modes par la procédure de l'équilibrage harmonique (HBM multi-fréquences résolue par MAN multi-paramètres), (iii) la construction de réponses forcées à partir des modèles réduits obtenus par HBM/MAN.

## Références

- [1] A. Vizzaccaro, A. Opreni, L. Salles, A. Frangi and C. Touzé : *High order direct parametrisation of invariant manifolds for model order reduction of finite element structures : application to large amplitude vibrations and uncovering of a folding point*, *Nonlinear Dynamics*, 110, 525-571, 2022.
- [2] A. Vizzaccaro, G. Gobat, A. Frangi and C. Touzé : *Direct parametrisation of invariant manifolds for forced non-autonomous systems including superharmonic resonances*, *Nonlinear Dynamics*, 112, 6255-6290, 2024.

- [3] A. Grolet, C. Touzé, A. de Figueiredo Stabile, O. Thomas. *A harmonic balance normal form parametrisation for single mode reduction of nonlinear vibrating systems*, Comm. Nonlinear Science Numerical Simulations, under review, 2025.
- [4] A. Grolet, A. Vizzaccaro, M. Debeurre, O. Thomas. *High order invariant manifold model reduction for systems with non-polynomial non-linearities : Geometrically exact finite element structures and validity limit*, Int. J. Nonlinear Mechanics, 105138, 2025.
- [5] A. Haro, M. Canadell, J.-L. Figueras, A. Luque and J.-M. Mondelo : The parameterization method for invariant manifolds. From rigorous results to effective computations. Springer, 2016.
- [6] S. W. Shaw, C. Pierre. *Non-linear normal modes and invariant manifolds*, J. Sound Vib., 170-173, 1991.
- [7] G. Haller and S. Ponsioen. *Nonlinear normal modes and spectral submanifolds : existence, uniqueness and use in model reduction*, Nonlinear Dynamics, 1493–1534, 2016.
- [8] B. Cochelin. *A path-following technique via an asymptotic-numerical method*, Computers & Structures, 1181–1192, 1994.
- [9] L. Guillot, B. Cochelin, and C. Vergez. *A generic and efficient Taylor series-based continuation method using a quadratic recast of smooth nonlinear systems*, Int. J. Num. Meth. Eng., 261–280, 2019.
- [10] G. Kerschen, M. Peeters, J.C. Golinval, and A.F. Vakakis. *Nonlinear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist*, Mech. Systems Signal Proc., 170–194, 2009.
- [11] M. Debeurre, A. Grolet, B. Cochelin, and O. Thomas. *Finite element computation of nonlinear modes and frequency response of geometrically exact beam structures*, J. Sound Vib., 117534, 2023.
- [12] C.-H. Lamarque, C. Touzé and O. Thomas : *An upper bound for validity limits of asymptotic analytical approaches based on normal form theory*, Nonlinear Dynamics, vol. 70(3), 1931-1949, 2012.