

Décomposition de domaines avec recouvrement en IGA : une méthode hybride mortar/collocation

A. Gagnaire¹, D. Dureisseix¹, A. Duval¹, T. Elguedj¹

¹ Univ Lyon, CNRS, INSA Lyon, LaMCoS, UMR5259, 69621 Villeurbanne, France, arnaud.duval@cnrs.fr

Résumé — Le calcul de structures sur des géométries industrielles complexes en analyse isogéométriques (IGA) implique la prise en compte de plusieurs patches. Dans la plupart des cas, ces derniers présentent un recouvrement. La méthode présentée ici est une décomposition de domaines IGA recouvrants pour laquelle la paramétrisation de la zone recouvrante n'est pas requise. Elle s'appuie sur la méthode mortar et sur l'utilisation de points de collocation pour appliquer des conditions de couplage.

Mots clés — analyse isogéométrique, décomposition de domaines, collocation

1 Introduction

La modélisation IGA de structures complexes industrielles nécessite une représentation impliquant plusieurs patches (Fig. 1). Ceci peut être directement issu de la méthode utilisée pour créer la géométrie ou permettre de simplifier et optimiser une géométrie donnée à l'aide de *templates*.

Ces différents patches peuvent présenter des frontières communes [2] ou se recouvrir [3]. Par ailleurs, cette modélisation en plusieurs patches est particulièrement adaptée aux méthodes de décomposition de domaines [4, 5] pour accélérer le calcul de structures.

Le cas du couplage de domaines recouvrants peut s'avérer complexe dans le cas de maillages non conformes car il implique alors de générer une paramétrisation de l'intersection des domaines à coupler (Fig. 2). La méthode présentée ici permet de coupler des patches IGA recouvrants en utilisant une méthode mortar pour laquelle les conditions de couplage sont imposées *via* des points de collocation, permettant ainsi de s'affranchir d'un maillage de la zone d'intersection.

2 Méthode hybride mortar/collocation

On s'intéresse ici au couplage de deux domaines Ω_1 et Ω_2 présentant un recouvrement. Le champ de déplacement dans ces deux domaines est noté respectivement \vec{u}_1 et \vec{u}_2 . Réaliser le couplage de ces deux domaines implique l'égalité des déplacements dans la zone recouvrante :

$$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{0} \quad \text{sur} \quad \Omega_1 \cap \Omega_2$$

Le couplage avec la méthode mortar implique le calcul de l'intégrale suivante :

$$\int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \vec{\lambda} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) dV,$$

où $\vec{\lambda}$ est un multiplicateur de Lagrange.

Afin de s'affranchir de la définition d'un maillage sur la zone d'intersection pour calculer ce terme intégral, ce dernier est remplacé par une somme sur un jeu de n points de collocation situés aux coordonnées x_k :

$$\sum_{k=1}^n \vec{\lambda}(x_k) (\vec{u}_1(x_k) - \vec{u}_2(x_k)) = 0 \quad (1)$$

Cependant, cette approche est limitée en terme de continuité de la solution couplée, qui sera au mieux C^0 . L'un des principaux avantages de l'IGA et de ses fonctions à haute régularité est alors perdu.

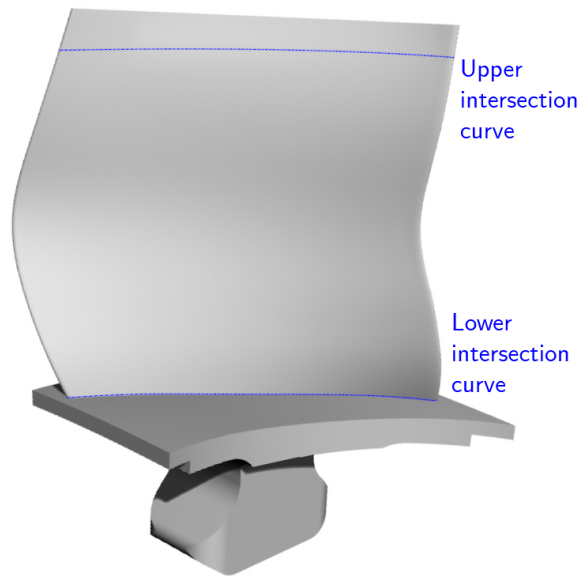


FIGURE 1 – Exemple d’une structure industrielle (aube de turboréacteur) composée de plusieurs patches IGA recouvrants (d’après [1])

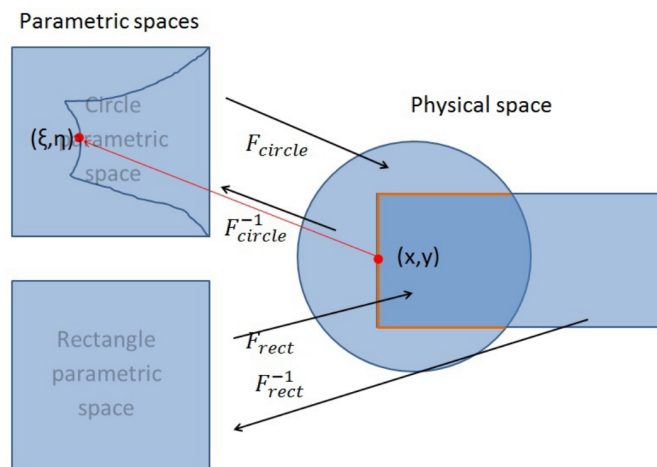


FIGURE 2 – Paramétrisation de l’intersection dans le cas de domaines recouvrants (d’après [3]).

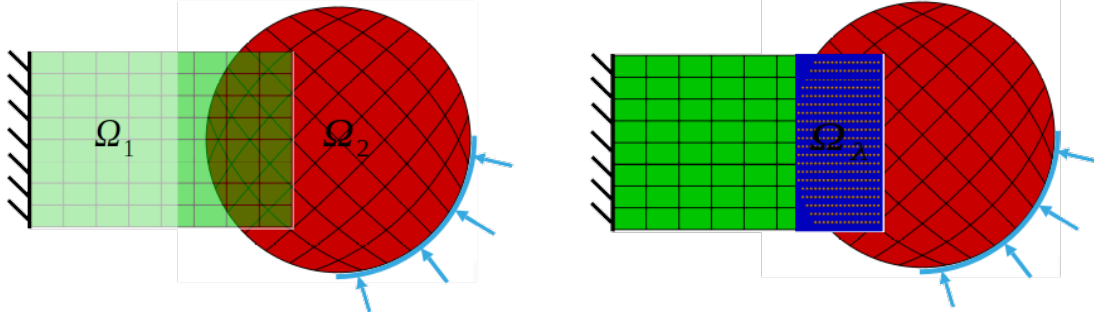


FIGURE 3 – Assemblage de deux domaines Ω_1 et Ω_2 recouvrants. Le domaine Ω_λ est le support des multiplicateurs de Lagrange et englobe les points de collocation.

Afin de prendre en compte une continuité plus élevée, les déplacements \vec{u}_i et multiplicateurs $\vec{\lambda}$ peuvent être remplacés par un développement de Taylor (ici au premier ordre) en x_0 :

$$\vec{u}_i(x) \approx \vec{x}_0 + \vec{\nabla} u_i(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

La contribution de chaque point de collocation est prise en compte sous la forme d'une intégrale sur des disques (dans un cas 2D) ω_k de diamètre d :

$$\sum_{k=1}^n \int_{\omega_k} \vec{\lambda}(x_k) (\vec{u}_1(x_k) - \vec{u}_2(x_k)) d\omega_k = 0$$

En introduisant l'approximation de Taylor de \vec{u}_i et $\vec{\lambda}$ (Eq. 2), les termes intégraux peuvent être calculés analytiquement :

$$\sum_{k=1}^n \vec{\lambda}(x_k) (\vec{u}_1(x_k) - \vec{u}_2(x_k)) + \kappa \vec{\nabla} \vec{\lambda}(x_k) (\vec{\nabla} u_1(x_k) - \vec{\nabla} u_2(x_k)) = 0,$$

où $\kappa = \frac{d^2}{8}$ est un coefficient de pondération.

À l'image des méthodes immergées, l'espace des multiplicateurs de Lagrange λ est défini sur un maillage de support en arrière-plan, totalement indépendant des paramétrisations des deux domaines.

Afin de ne pas doubler la raideur dans la zone de recouvrement, celle-ci est pondérée par un coefficient α_i lors de la construction de la matrice de raideur pour les points d'intégration situés dans l'intersection des deux domaines.

Le système discret obtenu peut ensuite être résolu, soit de façon directe avec un solveur monolithique, soit avec une méthode de décomposition de domaines itérative de type FETI.

3 Mise en œuvre sur un cas simple

Le cas étudié est l'assemblage d'un rectangle et d'un disque aux paramétrisations non conformes (Fig. 3). Le patch support des multiplicateurs de Lagrange est défini de façon à être plus grand que la zone recouvrante. La pondération des raideurs dans l'intersection est faite en utilisant des coefficients constants. La structure est encastrée sur un bord du domaine 1 et un chargement réparti est appliqué sur un bord du domaine 2.

Les résultats en déplacement sont présentés Fig. 4. Les champs de déplacement obtenus satisfont visuellement la condition de couplage et ne présentent pas de saut aux frontières des patches.

La solution IGA obtenue est comparée à une solution de référence obtenue par la méthode des éléments finis avec un maillage de 100 000 éléments. L'erreur L^2 sur le déplacement est présentée à la figure 5. Une erreur maximale de 3 % est observée sur les zones présentant une singularité (encastrement et coin) et est inférieure à 1,5 % sur le reste du modèle.

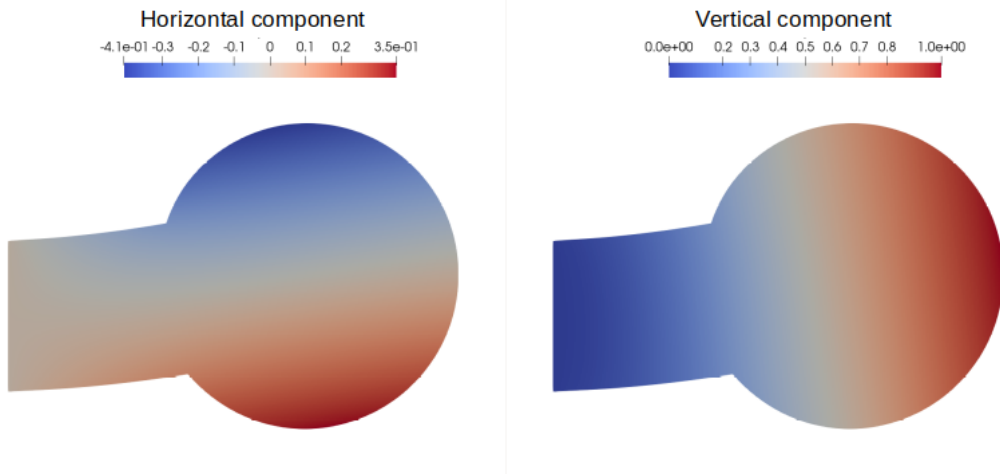


FIGURE 4 – Champ de déplacement dans la configuration déformée.

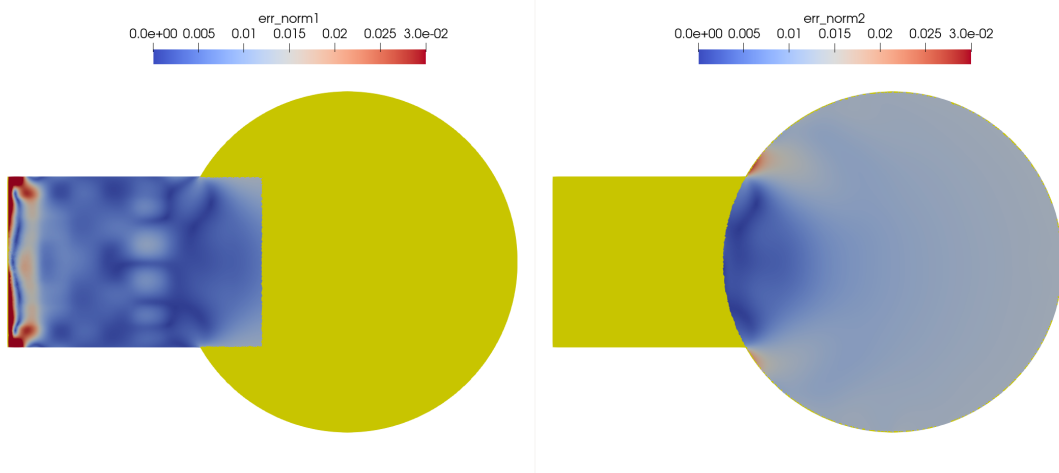


FIGURE 5 – Erreur L^2 sur la solution obtenue sur les domaines Ω_1 et Ω_2 par rapport à une solution de référence calculée par éléments finis.

4 Conclusion

La méthode de couplage de domaines recouvrants décrite permet de s'affranchir de la définition explicite de la zone d'intersection. Par rapport à une méthode de collocation usuelle, la prise en compte des gradients *via* un développement de Taylor permet d'améliorer la régularité de la solution obtenue. Dans le cas d'une analyse de structure simple, la solution obtenue est satisfaisante par rapport à une référence obtenue par éléments finis.

Les travaux futurs viseront à mettre en place des critères pour les choix de la paramétrisation du domaine des multiplicateurs de Lagrange (degré, niveau de raffinement) et de la définition des points (ou disques) de collocation (nombre, distribution, rayon). Une analyse de la convergence de la méthode sera menée et cette dernière sera expérimentée sur des cas industriels présentant une géométrie complexe.

Références

- [1] Marie Guerder, Arnaud Duval, Thomas Elguedj, and Damien Dam. Volumetric embedded entities for the IsoGeometric Analysis of complex structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 417 :116426, December 2023.
- [2] T. Hirschler, R. Bouclier, D. Dureisseix, A. Duval, T. Elguedj, and J. Morlier. A dual domain decomposition algorithm for the analysis of non-conforming isogeometric Kirchhoff–Love shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 357 :112578, December 2019.
- [3] Michel Bercovier and Ilya Soloveichik. Overlapping non Matching Meshes Domain Decomposition Method in Isogeometric Analysis, February 2015. Number : arXiv :1502.03756 arXiv :1502.03756 [math].
- [4] Robin Bouclier and Jean-Charles Passieux. A Nitsche-based non-intrusive coupling strategy for global/local isogeometric structural analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 340 :253–277, October 2018.
- [5] Stefan K. Kleiss, Clemens Pechstein, Bert Jüttler, and Satyendra Tomar. IETI – Isogeometric Tearing and Interconnecting. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 247-248 :201–215, November 2012.