

Méthode de méta-modélisation par décomposition de domaines et processus Gaussiens pour la prédiction de fonctions de réponse en fréquences de structures incertaines

E. Denimal Goy¹

¹ Inria, Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole polytechnique, IPP, Palaiseau, France, enora.denimal-goy@inria.fr

Résumé — L'utilisation de méthodes de méta-modélisation est une stratégie classique pour limiter le coût numérique associé aux études de propagation d'incertitudes. Une quantité d'intérêt classique pour les systèmes dynamiques est la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF). Ce travail présente une stratégie de méta-modélisation basée sur la décomposition de domaines, en exploitant les phénomènes de résonance et anti-résonance, et des processus Gaussiens pour pouvoir construire efficacement un méta-modèle de FRF. Les résultats sont illustrés sur un modèle éléments finis de poutre.

Mots clés — vibration, Fonction de Réponse en Fréquence, méta-modèle, processus Gaussien.

1 Introduction

Les systèmes mécaniques sont soumis à de nombreuses incertitudes. Elles peuvent par exemple provenir d'erreur de modélisation ou de variables environnementales amenées à évoluer dans le temps. Afin d'assurer des structures fiables et efficaces, il est nécessaire de prendre en compte ces incertitudes dans les phases de dimensionnement. En dimensionnement vibratoire, une quantité d'intérêt classique est la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF). La propagation d'incertitudes représente un coût numérique élevé car de nombreux paramètres doivent être pris en compte et une étude paramétrique représenterait de nombreux appels au modèle coûteux numériquement. Une stratégie classique pour réduire et contrôler ce coût numérique est de remplacer ce modèle coûteux par un méta-modèle. Une fois construit, l'évaluation du méta-modèle est quasi-nulle et les études de propagation d'incertitudes peuvent être réalisées sur ce dernier plutôt que sur le modèle coûteux.

Plusieurs travaux se sont intéressés à la construction de méta-modèle pour les FRF [1]. La difficulté principale réside dans les variations fortes de la fonction autour des pics de résonance et anti-résonance, conduisant à une difficulté du méta-modèle à converger dans ces zones avec des phénomènes d'oscillations [2]. Plusieurs développements proposent de découper la FRF en plusieurs intervalles [5] définis par des fréquences d'intérêt. Cependant cette approche nécessite une connaissance préalable de la forme des FRF (nombre de résonances et anti-résonances), limitant l'utilisation pratique de cette approche. Cette méthode implique aussi que le nombre d'anti-résonances ne varie pas, ce qui limite l'étude à des systèmes de n oscillateurs découplés.

Ce travail propose une méthode originale de construction de méta-modèle pour la FRF entière d'une structure continue, c'est-à-dire que la dépendance spatiale est aussi apprise. Pour cela, la FRF est découpée en différents domaines, appelés *cluster* par la suite, délimités par les fréquences de résonance et anti-résonance qui varient spatialement et en fonction des incertitudes. Ces dernières sont calculées efficacement à l'aide d'un problème aux valeurs propres modifié. Afin de limiter les coûts de calculs, les limites des clusters sont prédites à l'aide de méta-modèle des fréquences de résonance et d'anti-résonance. Finalement, un méta-modèle de FRF par cluster est ensuite construit. Les résultats sont présentés sur un modèle éléments finis 3D d'une poutre.

2 Description de la méthodologie

2.1 Objectif général

Un système dynamique de la forme suivante est considéré dans l'étude :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (1)$$

avec \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} les matrices de masse, amortissement et raideur. \mathbf{X} est le vecteur des déplacements et le point représente la dérivée temporelle. \mathbf{F} est le vecteur d'excitation de la forme $\mathbf{F}_e \sin \omega t$ avec \mathbf{F}_e l'amplitude de forçage et ω la pulsation de l'excitation. On suppose dans cette étude que l'amortissement est faible. Pour des systèmes de cette forme, une grandeur d'intérêt classique est la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF), c'est-à-dire la réponse du système quand ω varie sur une plage de fréquences pour chaque degré de liberté (ddl) du système. Ce travail présente une méthodologie de construction de méta-modèle pour reconstruire cette FRF pour un ω quelconque et un ddl quelconque, et ce lorsque le système est incertain ou dépend de nombreux paramètres. La structure générale de la méthode est présentée dans un premier temps, avant d'être appliquée à un exemple.

2.2 Structure générale de la méthode

Dans la suite, les paramètres incertains sont notés ξ et x représente les coordonnées du point pour lequel la FRF est calculée. $\omega_R^{(i)}$ et $\omega_{AR}^{(j)}$ représentent les i -ème et j -ème fréquences de résonance et anti-résonance. Dans la suite, le méta-modèle d'une quantité d'intérêt z est noté \hat{z} . Les différentes étapes de la méthodologie proposée sont :

- Etape 1 : les méta-modèles $\hat{\omega}_R^{(i)}(\xi)$ des fréquences de résonance sont construits en utilisant une régression par processus Gaussien (GPR *Gaussian Process Regression*) et un ensemble d'apprentissage $\left\{ \left(\xi_k, \omega_R^{(i,k)} \right)_{k \in [1, N]} \right\}$,
- Etape 2 : les méta-modèles $\hat{\omega}_{AR}^{(j)}(x, \xi)$ des fréquences d'anti-résonances sont construits en combinant une classification par processus Gaussien (GPC *Gaussian process classification*), pour l'existence de l'anti-résonance, et un GPR ,pour la valeur de la fréquence, avec un ensemble d'apprentissage $\left\{ \left((x_k, \xi_k), \omega_{AR}^{(j,k)} \right)_{k \in [1, N]} \right\}$. Il est important de noter ici que les anti-résonances, à la différence des résonances, dépendent de la localisation sur la structure (dépendance en x ici),
- Etape 3 : un ensemble d'apprentissage pour la FRF est généré. Il est composée de N_{FRF} points d'entrée $((\omega_k, x_k, \xi_k))_{k \in [1, N_{FRF}]}$ et de leur évaluation \mathbf{y}_k ,
- Etape 4 : chacun de ces points est associé à un cluster en fonction de sa position par rapport aux résonances et anti-résonances. N_K clusters sont définis,
- Etape 5 : pour chaque cluster k , un méta-modèle $\widehat{FRF}^{(k)}$ de la FRF restreinte au domaine du cluster est construit avec un GPR.

Le méta-modèle final peut s'écrire :

$$FRF(x, \xi, \omega) \simeq \widehat{FRF}(x, \xi, \omega) = \sum_{k=1}^{N_K} \widehat{FRF}^{(k)}(x, \xi, \omega) \mathbb{1}_k(x, \xi, \omega) \quad (2)$$

avec $\mathbb{1}_k$ la fonction d'appartenance au cluster k , qui dépend directement de $\hat{\omega}_R^{(i)}(\xi)$ et $\hat{\omega}_{AR}^{(j)}(x, \xi)$.

2.3 Calcul des fréquences de résonance et d'anti-résonance

Les fréquences de résonances sont calculées de façon habituelle en résolvant le problème aux valeurs propres associé à l'Equation 1. Les fréquences d'anti-résonances à un ddl i peuvent être calculées en résolvant un problème aux valeurs propres modifié [3] où la colonne i de la matrice de raideur est remplacée par le vecteur d'excitation \mathbf{F}_e et où la colonne i de la matrice de masse est remplacée par un vecteur nul. Cette stratégie est utilisée à l'étape 2 pour générer l'ensemble d'apprentissage pour les anti-résonances. Cette approche permet de calculer de façon efficace les fréquences de résonances et d'anti-résonances.

2.4 Regression et classification par processus Gaussiens

Les méta-modèles sont construits avec des processus Gaussiens. Pour les GPR, les données sont supposées être générées par un processus $Y_i = f(X_i) + \varepsilon_i$ avec $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et f le modèle numérique coûteux. A partir d'un ensemble de N entrées/sorties (X_i, Y_i) , un GPR est construit avec une fonction de covariance κ , qui dépend d'hyperparamètres θ , et d'une fonction moyenne m . Cela permet de définir la matrice de covariance $K_{ij} = \kappa(\theta; X_i, X_j)$ et le vecteur $\mu = (f(X_1), \dots, f(X_N))$. Les hyperparamètres θ sont optimisés pour minimiser la vraisemblance. La prédiction du GPR à un nouveau point X_* est donnée par $\mu_* = K_*^T K^{-1} f$ avec K_* la matrice de covariance entre X_* et l'ensemble d'apprentissage (X_i) .

Les GPC sont utilisés pour la classification binaire : ici pour prédire l'existence ou non des différentes antirésonances. Ils sont construits à partir d'un ensemble d'apprentissage d'entrée $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N]$ et de sorties $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N]$ avec $y_k \in \{0, 1\}$ qui définit la classe d'appartenance de \mathbf{z}_k . La prédiction de la classe d'appartenance d'un nouveau point est faite en considérant une fonction latente g approximée avec un GPR et projetée sur un intervalle unitaire avec une fonction sigmoïde.

Les GPR et GPC sont construits avec le package python GPflow [4].

3 Présentation du modèle d'étude

Le modèle étudié est une poutre circulaire de rayon R et de longueur L en appui simple à chaque extrémité. Elle est illustrée Figure 1. Le module d'Young est de $2e11$ Pa, le module de cisaillement est de $7.1e10$ Pa, la masse volumique de 7800 kg/m^3 et le coefficient de Poisson est 0.3. La longueur de la poutre est de 1 m et le rayon est de 0.05 m. Un amortissement de Rayleigh de paramètres $\alpha = 0.66$ et $\beta = 1.2e-6$ est pris. La poutre est discrétisée avec 30 éléments poutre définis par 4 ddl à chaque nœud. L'excitation est localisée au ddl 5 et est appliquée verticalement et horizontalement avec une amplitude de $1/\sqrt{2}$. La plage de fréquence d'intérêt est $[100, 25000]$ Hz.

Dans la suite, un seul paramètre incertain est considéré afin d'illustrer au mieux la méthode. Il s'agit du module d'Young qui est décrit par une loi uniforme sur l'intervalle $[1.75, 2.25]e11$ Pa.

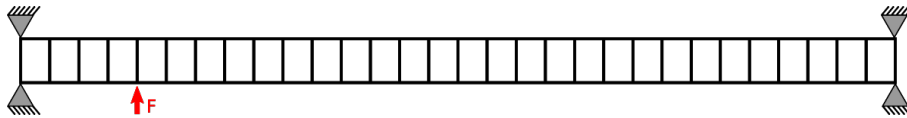


FIGURE 1 – Modèle d'étude

4 Résultats

4.1 Construction des méta-modèles pour les résonances et anti-résonances

Dans un premier temps, les ensembles d'apprentissage pour les fréquences de résonances et d'anti-résonances sont construits. En illustration, un ensemble d'entrée de 50 points est montré Figure 2(a). Il est généré avec une suite d'Halton. Pour chacun de ces points, les fréquences de résonances et les anti-résonances sont calculées avec les différents problèmes aux valeurs propres présentés dans la section 2.3. Les résultats obtenus sont donnés Figure 2(b). Dans la plage de fréquences considérée, quatre résonances et jusqu'à trois anti-résonances sont observées. Les fréquences de résonance ne dépendent pas du point d'observation, elles sont représentées par des barres verticales. On peut voir que les résonances plus basses sont moins impactées par l'incertitude sur le module d'Young. Comme attendu, les fréquences d'anti-résonances dépendent de la localisation, et donc ne sont pas toujours définies. Par exemple, proche de $L = 1$ m il n'y a pas d'anti-résonance alors que proche de $L = 0$ m il y a une anti-résonance entre chaque résonance.

Méta-modèle des résonances Un méta-modèle de type GPR est construit pour chaque fréquence de résonance. Une étude de convergence en faisant varier la taille de l'ensemble d'apprentissage de 10 à 500 points est réalisée. Pour chaque taille, 20 ensembles sont générés. Pour chaque ensemble, un GPR de chaque fréquence de résonance est construit. Un ensemble de validation de 10000 points est

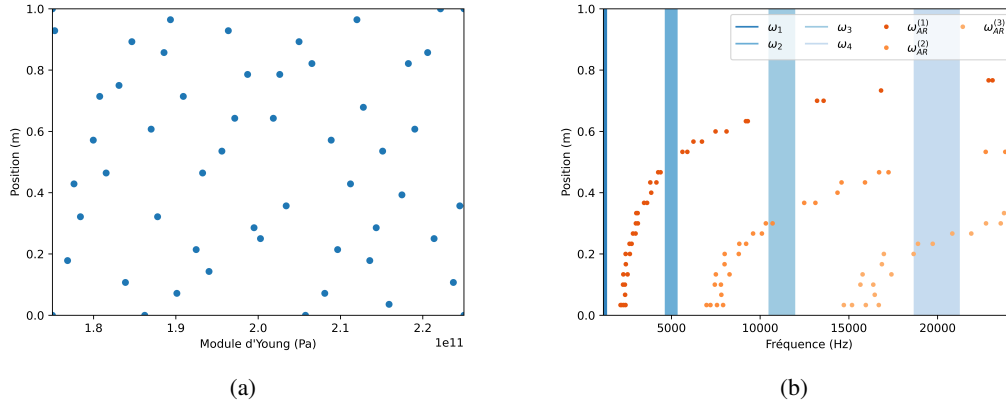


FIGURE 2 – Exemple d’ensemble d’apprentissage : ensemble d’entrée de 50 points (a) et calculs correspondants des fréquences de résonance et d’anti-résonance (b)

utilisé pour calculer l’erreur sous la forme de la *relative Mean Squared Error* (relMSE). Cette erreur est moyennée sur les 20 ensembles de même taille. L’évolution de la moyenne de cette erreur est donnée Figure 3(a). On remarque que l’erreur est systématiquement faible et que la convergence est atteinte avec 100 points d’apprentissage. A titre illustratif, les valeurs de fréquence de résonance en fonction de valeurs de références sont tracées Figure 3(b) pour la première fréquence de résonance. On peut observer que les prédictions sont toujours égales aux valeurs de référence et que le niveau de prédiction est excellent. Les résultats sont similaires pour les autres fréquences de résonance.

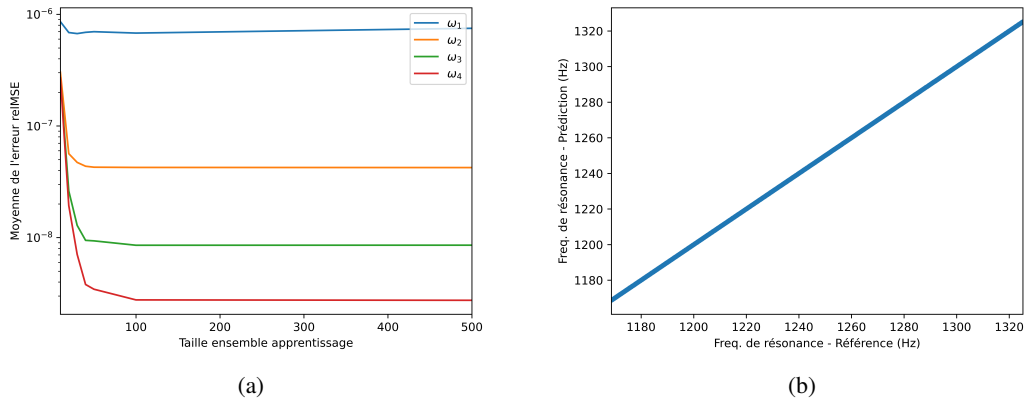


FIGURE 3 – Evolution sur l’erreur de régression pour les fréquences de résonances (a) – Prédications du GPR en fonction de valeurs de références pour la première fréquence de résonance (b)

Méta-modèle des anti-résonances La construction d’un méta-modèle pour les fréquences d’anti-résonance est plus complexe car ces dernières ne sont pas toujours définies. La création du méta-modèle est donc décomposée en deux temps : un premier où un GPC est construit afin de prédire l’existence ou non de chaque anti-résonance pour un module d’Young et une position donnée, un deuxième où un GPR est construit pour prédire la valeur de la fréquence. De façon similaire, cette étape est réalisée pour des ensembles d’apprentissage qui varient de 10 à 500 points, et pour lesquels 20 plans d’expérience sont générés pour chaque taille. Une erreur de classification est calculée en comptabilisant le nombre moyen de points mal classifiés sur un ensemble de validation de 10000 points. Pour chaque taille de plan d’expérience, la moyenne des erreurs de classification est calculée. Cette dernière est tracée Figure 4(a). Les niveaux d’erreur sont faibles pour toutes les anti-résonances. Par ailleurs, la convergence est plus rapide pour les deux premières anti-résonances et une erreur nulle est atteinte pour la première résonance dès 100 points d’apprentissage. A titre d’exemple, un résultat de prédiction obtenu pour la seconde anti-résonance avec un ensemble d’apprentissage de 100 points est donné Figure 4(c). En bleu et en vert sont représentées respectivement les zones d’existences et de non-existences de l’anti-résonance. Les points d’apprentissage sont en rouge. La prédiction de la zone d’existence est tracée en noire. On peut voir que

la zone d'existence est globalement très bien prédite, sauf dans une zone proche de la frontière d'existence. Cependant, à l'échelle du domaine, l'erreur de prédiction de l'existence reste faible et acceptable. Cette erreur peut être réduite en ajoutant des points, notamment proche de la frontière.

Dans un deuxième temps, un GPR est construit pour chaque anti-résonance afin de prédire sa fréquence en fonction du module d'Young et de la localisation dans les zones où elle est définie. De la même manière que pour les résonances, la moyenne de la relMSE sur 20 ensemble d'une même taille est calculée pour différentes tailles de plan d'expérience. L'évolution de cette erreur est tracée Figure 4(b). On remarque que l'erreur est faible même avec un faible nombre de points. Les prédictions d'un GPR de la deuxième anti-résonance construit avec 100 points d'apprentissage en fonction des valeurs de références sont données Figure 4(d).

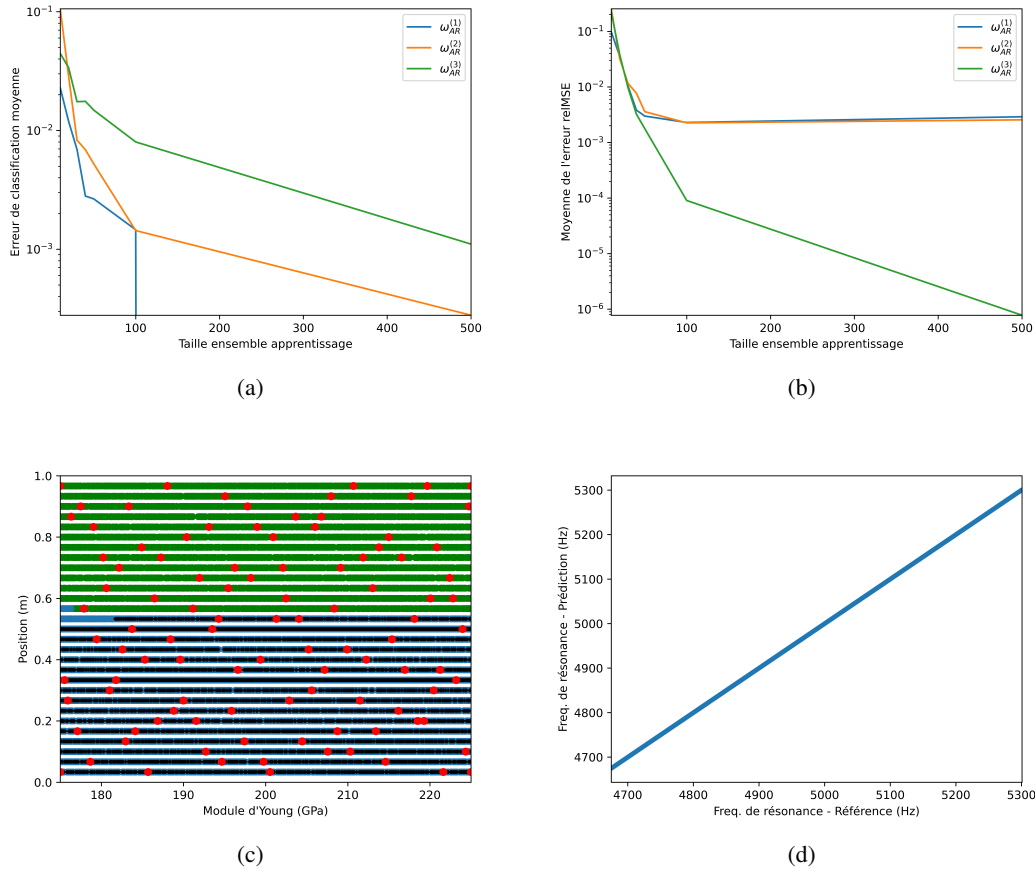


FIGURE 4 – Evolution de l'erreur moyenne de classification (a) et de régression (b) en fonction de la taille du plan d'expérience pour les différentes fréquences d'anti-résonance – (c) Prédiction de la classification pour la seconde anti-résonance : \bullet : training, \bullet : existence référence, \bullet : non-existence référence, \bullet : existence - prédiction – (d) Prédiction de la régression pour la seconde anti-résonance

Pour finir sur les résultats globaux, les prédictions (couplant GPC et GPR) et les valeurs de référence de l'ensemble de validation des différentes anti-résonances en fonction de la localisation sont tracées Figure 5. Les méta-modèles construits avec 100 points d'apprentissage sont utilisés. On remarque que pour chacun d'entre eux, les prédictions sont très précises et que chaque fréquence d'anti-résonance est prédite avec précision.

4.2 Construction du méta-modèle de la FRF

Dans un dernier temps, le méta-modèle de la FRF peut être construit. Cette dernière est divisée en différents domaines, appelés *clusters*, délimités par les pics de résonance et d'anti-résonance. Pour l'exemple traité, ce découpage est illustré Figure 6 où les traits verticaux représentent les fréquences de résonance et les points noirs les fréquences d'anti-résonances. Les différents clusters sont numérotés en rouge, 14 sont identifiés sur ce cas. Ce découpage est illustré pour une valeur du module d'Young, mais

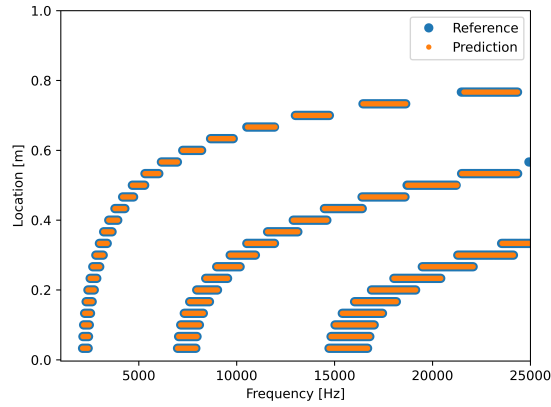


FIGURE 5 – Prédictions (orange) et références (bleu) des fréquences d’anti-résonance

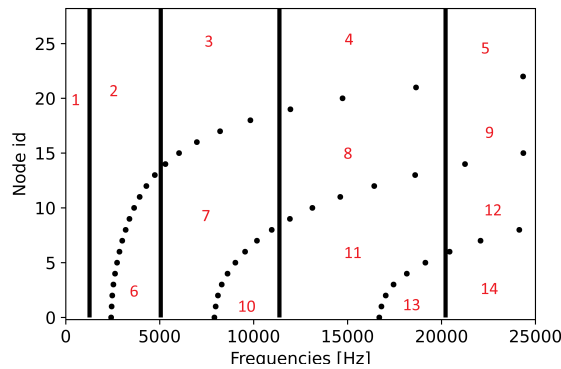


FIGURE 6 – Visualisation of the FRF clusters

il est à noter que ces frontières bougent avec l’incertitude dans le modèle. L’étape précédente (méta-modèles des fréquences de résonances et d’anti-résonance) permet de prédire à moindre coût la position de ces frontières pour tout point x sur la structure et toute valeur des paramètres incertains.

Une fois les différents clusters construits, les différents points de l’ensemble d’apprentissage de la FRF sont associés à un cluster, puis un méta-modèle est construit pour chaque cluster avec les observations de la FRF restreinte à ce cluster. L’intérêt de ce découpage est double : sur chaque cluster, la FRF est une fonction très régulière et facile à approximer par un GPR, et chaque GPR est construit avec peu de points, permettant de réduire le coût de calcul de la construction de ce dernier.

Dans la suite, cette stratégie est comparée à une approche "naïve" où un unique GPR serait construit avec tous les points d’apprentissage. Un ensemble d’apprentissage de 10000 points est généré et l’erreur absolue moyenne est calculée. Les résultats sont illustrés dans la suite avec des méta-modèles obtenus avec 5000 points d’apprentissage pour la FRF. Avec cet ensemble de point, l’erreur moyenne de prédiction est divisée par 6 en comparaison à une approche naïve avec un unique méta-modèle de la FRF.

Pour illustrer les résultats, les valeurs de prédictions de la FRF pour l’ensemble des points de validation sont tracées Figure 7, pour l’approche proposée en orange et pour l’approche avec un unique méta-modèle en vert. En bleu sont tracés les valeurs de référence. Sur cette figure, pour chaque pulsation, le degré de liberté et le module d’Young peuvent varier. Il est clair que la stratégie proposée est plus performante que l’approche basée sur un unique méta-modèle : les pics de résonances et anti-résonances sont beaucoup mieux représentés. Avec l’approche proposée, on observe parfois un décalage sur la prédiction des amplitudes proches des anti-résonances. Une piste d’explication serait une erreur sur la prédiction de l’existence ou non des anti-résonances (erreur de prédiction du GPC) qui pourrait impliquer que le GPR soit dans une zone d’extrapolation, et donc peu prédictif. Une seconde piste d’explication est que certains clusters ont un ensemble d’apprentissage plus petit que d’autres, limitant les performances des GPR locaux. Dans les deux cas, ces limitations peuvent être réduites en ajoutant des points aux ensemble d’apprentissage.

Les capacités de prédiction sont aussi illustrées en traçant la FRF pour un degré de liberté donné. Ainsi, pour un ddl donné, 1000 tirages sur le module d’Young sont réalisés. Les résultats sont illustrés

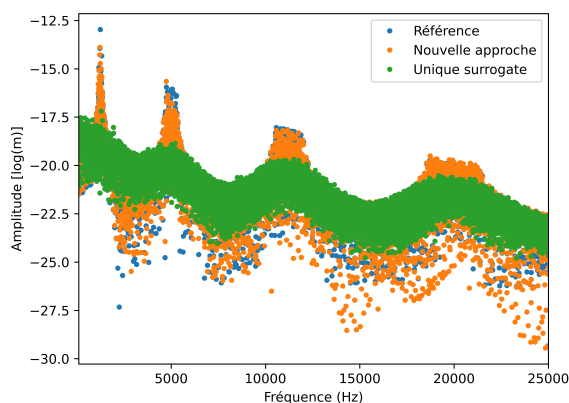


FIGURE 7 – Comparaison des valeurs de référence et des valeurs prédites des FRF avec un unique méta-modèle ou avec l’approche proposée

Figure 8 et Figure 9 pour les noeuds 10 et 17. Figures 8 et 9(a) montrent les 1000 FRF obtenues avec un unique méta-modèle. En noir sont tracés les valeurs min et max, en rouge la moyenne pour chaque fréquence d’excitation. Figures 8 et 9(b), les résultats sont illustrés pour l’approche de méta-modélisation avec clustering, et Figures 8 et 9(c) les résultats de référence sont donnés. De ces figures, on peut remarquer très clairement que l’approche naïve ne permet pas de capter les pics de résonances et d’anti-résonances qui sont toujours coupés. A l’inverse, l’approche avec cluster permet de capter ces pics et donc la structure de la FRF en tout point de l’espace. Dans le cas du noeud 10, les deux anti-résonances sont bien prédites. De façon similaire pour le noeud 17, alors même qu’il y a une seule anti-résonance, ceci est bien capturé par le méta-modèle. Malgré le fait que les FRFs aient des comportements très différents (nombres d’anti-résonances), le méta-modèle est capable de les prédire précisément. Figures 8 et 9(d) donnent la moyenne, en trait plein, ainsi que la moyenne \pm l’erreur standard de déviation, en pointillé. La référence est donnée en bleu, la prédiction avec l’approche avec cluster en orange, et la prédiction avec l’approche à un seul méta-modèle en vert. De ces figures, on peut voir que la moyenne et l’erreur standard de déviation sont parfaitement capturées avec la méthode proposée, alors que les prédictions sont de faibles qualités.

Finalement, il est à noter que la méthode proposée permet la construction d’un méta-modèle fonction de la localisation spatiale. C’est-à-dire que le même méta-modèle est utilisé pour reconstruire les Figures 8 et 9(b).

5 Conclusion et perspectives

Ce travail propose une méthode de propagation d’incertitude pour les FRF de systèmes dynamiques linéaires. La stratégie proposée consiste à découper la FRF en domaines délimités par les pics de résonance et d’anti-résonance. Ces frontières, elles-mêmes dépendantes de l’incertitude, sont apprises à l’aide de méta-modèles. Dans la mesure où les anti-résonances ne sont pas toujours définies, leur existence est prédite à l’aide d’un processus Gaussien de classification. La méthodologie est comparée à une approche naïve où un unique méta-modèle serait construit pour apprendre la FRF en tout point de la structure. La méthodologie est appliquée à un modèle élément fini 3D de poutre, et se montre efficace. Illustrée ici sur un cas académique simple, les résultats sont encourageants. Une première perspective est d’étendre ceci à un cas plus complexe, tant en complexité du modèle qu’en nombre de paramètres incertains. Une deuxième perspective est de proposer une méthode d’enrichissement séquentiel du plan d’expérience afin d’améliorer la qualité des prédictions du méta-modèle.

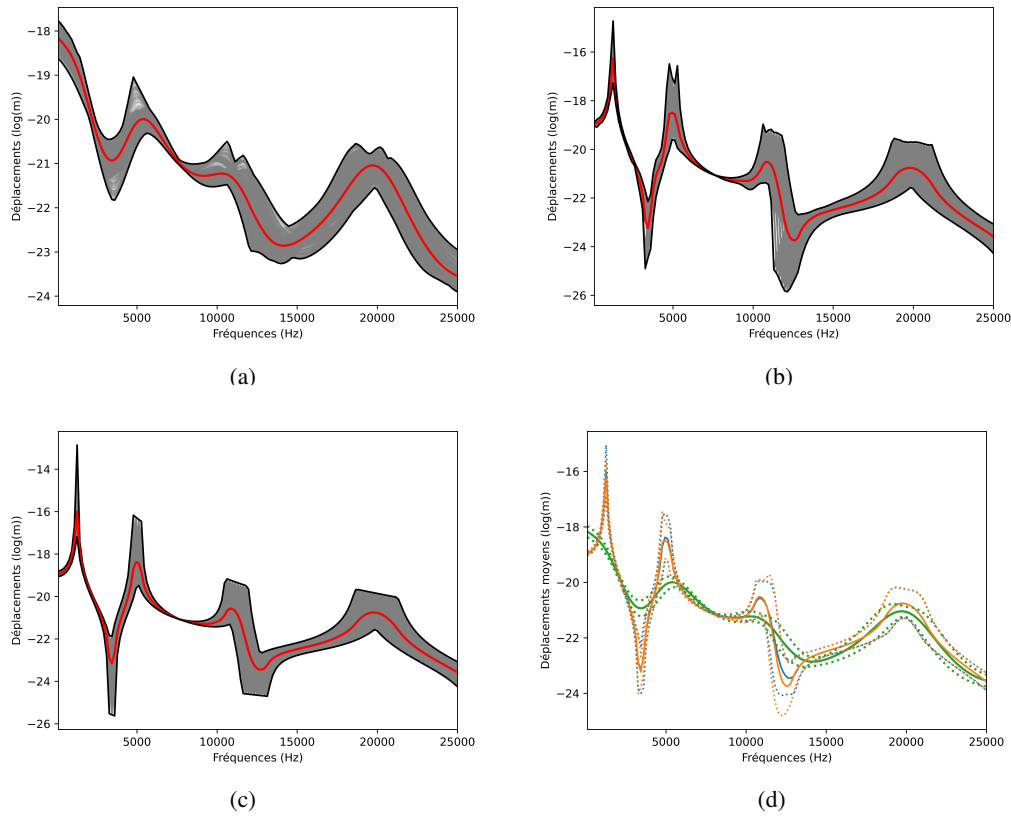


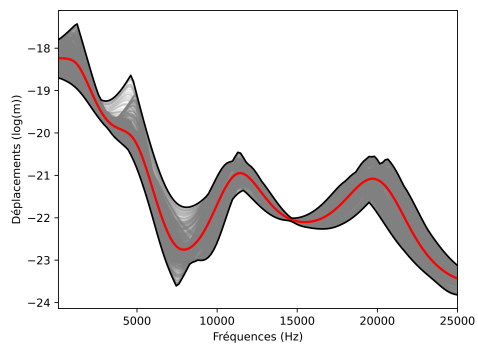
FIGURE 8 – Noeud 10 - 1000 tirages FRF - Approche avec un unique surrogate (a), clustering (b) et référence (c) - (d) Comparaison des moyennes (—) et moyennes \pm l'écart-type pour la référence (bleu), l'approche avec cluster (orange) et l'approche avec un unique méta-modèle (vert)

6 Remerciements

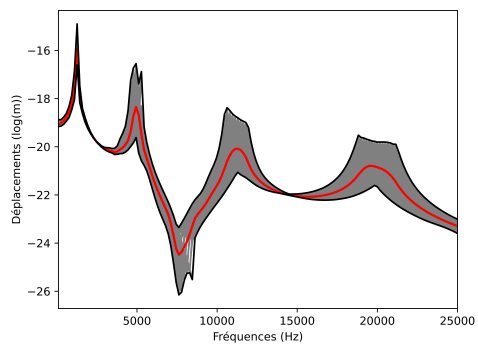
L'autrice remercie l'ANR pour son soutien financier au projet ANR JCJC MeMoRa n°ANR-23-CE51-0006.

Références

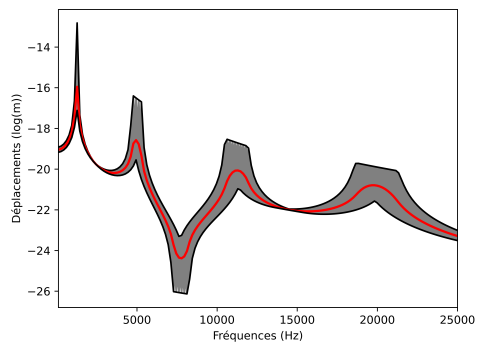
- [1] C. Fu, H. Zhao, W. Zhu, Z. Zheng, K. Lu. *A Review of Uncertainty Quantification Techniques for Frequency Responses of Mechanical Systems*, Archives of Computational Methods in Engineering, 2025.
- [2] E. Jacquelin, S. Adhikari, J-J. Sinou, M. Friswell. *Polynomial Chaos Expansion and Steady-State Response of a Class of Random Dynamical Systems*, Journal of Engineering Mechanics, 141(4) :04014145, 2015.
- [3] J. Jung, S. Goo, J. Kook. *Predicting anti-resonance frequencies using a novel eigenvalue formulation*, Finite Elements in Analysis and Design, 191 :103525, 2021.
- [4] A. G. G. Matthews, M. van der Wilk, et al. *GPflow : A Gaussian process library using TensorFlow*, Journal of Machine Learning Research, 18(40), 1–6, 2017.
- [5] V. Yaghoubi, S. Marelli, B. Sudret, T. Abrahamsson. *Sparse Polynomial Chaos Expansions of Frequency Response Functions Using Stochastic Frequency Transformation*, Probabilistic Engineering Mechanics, 48, 39–58, 2017.



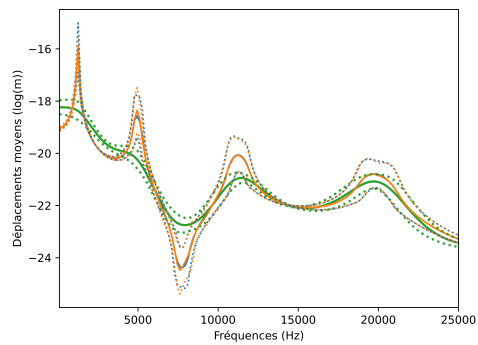
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 9 – Noeud 17 - 1000 tirages FRF - Approche avec un unique surrogate (a), clustering (b) et référence (c) - (d) Comparaison des moyennes (—) et moyennes \pm l'écart-type pour la référence (bleu), l'approche avec cluster (orange) et l'approche avec un unique méta-modèle (vert)