

Implémentation de la méthode des échelles multiples en calcul symbolique : outil d'analyse analytique de systèmes dynamiques non-linéaires

V. Mahé¹

¹ Nantes Université, Ecole Centrale Nantes, CNRS, GeM, UMR 6183, F-44000 Nantes, France, vincent.mahé@ec-nantes.fr

Résumé —

Un outil numérique permettant l'étude analytique de systèmes dynamiques faiblement couplés et faiblement non-linéaires est présenté. Les approches analytiques offrent des atouts majeurs pour la compréhension de phénomènes complexes ainsi que l'analyse paramétrique. Malheureusement, la lourdeur des calculs impliqués freine l'utilisation de ces approches. L'outil implémente la méthode des échelles multiples en calcul symbolique, permettant ainsi l'obtention d'expressions analytiques de réponses forcées et l'information sur leur stabilité en quelques secondes.

Mots clés — dynamique non-linéaire ; méthode des échelles multiples ; calcul symbolique

1 Introduction

Les systèmes dynamiques non-linéaires peuvent être analysés via des approches expérimentales, numériques et analytiques. Les études expérimentales sont essentielles pour valider les modèles, mais elles sont coûteuses et limitées dans la variations des paramètres système. Les méthodes numériques formulées dans le domaine fréquentiel sont extrêmement efficaces dans l'étude de systèmes fortement non-linéaires et comprenant de nombreux degrés de liberté [1, 2, 3, 4]. Cependant, la précision de ces méthodes vient avec un coût de calcul qui demeure relativement élevé, et leur robustesse n'est pas toujours satisfaisante. Cela peut rendre très fastidieux des études paramétriques poussées, et donc limiter la compréhension du système. Les méthodes analytiques sont un parfait complément aux approches précédentes. Elles s'appliquent à des systèmes comprenant peu de degrés de liberté, typiquement issus de modèles simplifiés, et permettent d'obtenir des solutions faisant intervenir explicitement les paramètres du système. Cela permet une compréhension profonde des phénomènes mis en jeu, un temps de simulation presque nul, facilitant grandement les études paramétriques [5, 6], et même l'obtention de règles de design simples, ce qui peut s'avérer très précieux dans le dimensionnement de système mécaniques, comme des absorbeurs de vibrations [7].

Parmi les approches analytiques couramment utilisées pour traiter des systèmes dynamiques faiblement non-linéaires, on peut citer l'équilibrage harmonique (HBM pour *Harmonic Balance Method*), Lindstedt-Poincaré (LP), le moyennage (AVG pour *Averaging*), ou encore la méthode des échelles multiples (MMS pour *Method of Multiple Scales*) [8]. La HBM et LP supposent une solution périodique *a priori*, alors que l'AVG et la MMS peuvent capturer des modulations lentes de la réponse en amplitude et en phase via la prise en compte d'échelles de temps distinctes. Cette différence fondamentale facilite l'étude de stabilité de solutions en régime permanent avec l'AVG et la MMS, car l'introduction d'une perturbation est triviale, alors qu'une analyse complémentaire est requise avec la HBM et LP [9]. La forme normale est une autre approche dont la philosophie consiste à déterminer un changement de coordonnées permettant de réduire les équations du mouvement à une forme plus simple, facilitant ainsi l'analyse analytique [10].

L'utilisation d'approches analytiques est systématiquement confrontée à la complexité des méthodes de résolution ainsi que la lourdeur des calculs impliqués. Ces freins sont exacerbés lorsque l'on cherche à raffiner la précision des solutions approchées. Pour des approches par perturbation cela implique typiquement des enrichissements de séries asymptotiques, menant à la manipulation d'expressions de plus en plus lourdes. De manière similaire, le raffinement des solutions obtenues par la forme normale conduit à

des changements de coordonnées et des systèmes réduits plus conséquents. Pour la HBM, une précision accrue implique de retenir davantage d’harmoniques, menant à des systèmes d’équations non-linéaires de plus en plus grands et rarement résolubles. Afin de surmonter ces lourds développements, des études précurseuses ont évoqué l’utilisation du calcul symbolique pour automatiser l’application de la MMS [9, 11, 12]. C’est sur cette méthode que se concentre cet article car elle est plus générale que LP et l’AVG, elle génère des systèmes plus aptes à la résolution analytique que la HBM, et le traitement des résonances internes est plus aisé qu’avec la forme normale.

Deux codes de calcul symbolique ont implémenté la MMS et ont été distribués. Le premier, conçu par Nayfeh et Chin [13] et codé en Maple et Wolfram (langage de Mathematica), comprenait plusieurs versions de la MMS (ainsi que d’autres méthodes de perturbations). Malheureusement, ce code ne semble plus être accessible. Un autre code, développé en 2000 par Khanin et al. [14] et codé en Wolfram, est lui toujours existant. Cependant, le besoin d’une licence Mathematica réduit considérablement son accessibilité. De plus, d’après la description faite par les auteurs, il semble limité concernant la prise en compte de forçages paramétriques, n’implémente pas d’analyse de stabilité, ne communique pas avec \LaTeX , complexifiant grandement la lecture des expressions analytiques obtenues, et ne vient pas avec une documentation détaillée. Récemment, un code de calcul symbolique implémentant plusieurs versions de la forme normale a été écrit en Julia [10], et s’avère extrêmement précieux pour effectuer des analyses analytiques avancées.

Pour combler l’absence d’un outil accessible et simple d’utilisation permettant l’application de la MMS, et ainsi l’analyse analytique de systèmes non-linéaires, le package Python `oscilate` a été développé [15]. Il implémente la MMS en calcul symbolique en s’appuyant sur la librairie SymPy. Ce code s’applique à des systèmes discrets de N degrés de liberté, faiblement couplés et faiblement non-linéaires. Il permet l’obtention des équations gouvernant l’évolution lente des amplitudes et phases de la réponse. Ces équations peuvent ensuite être utilisées pour déterminer sous forme d’expression analytique la réponse en régime permanent ainsi ses zones de stabilité. L’affichage des résultats se fait en \LaTeX , facilitant grandement la lecture des longues expressions souvent rencontrées dans ces développements analytiques. Le gain de temps pour des oscillateurs complexes est très élevé, passant de quelques jours, semaines ou mois de calcul à quelques secondes ou minutes. De plus, le package vient avec une documentation complète, facilitant sa prise en main.

La méthode des échelles multiples est brièvement rappelée en section 2, son implémentation est présentée en section 3, et les possibilités offertes par le package sont discutées en section 4.

2 Méthode des échelles multiples

Afin de faciliter la compréhension du code présenté en section 3, la MMS est brièvement rappelée ci-après. Elle est illustrée sur le cas simple d’un oscillateur de Duffing faiblement non-linéaire et faiblement forcé au voisinage de sa résonance principale. Le lecteur est invité à consulter [8, 15] pour le cas de N oscillateurs couplés et sujets à des forçages excitant des résonances secondaires.

L’équation du mouvement est donnée par

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = F \cos(\omega t), \quad (1)$$

où t est le temps, $x(t)$ le déplacement, $(\dot{\bullet}) = d(\bullet)/dt$, ω_0^2 , c , γ correspondent à la raideur, au coefficient d’amortissement visqueux et au coefficient non-linéaire de l’oscillateur, et $F \cos(\omega t)$ est le forçage harmonique auquel il est sujet. Le cas d’une faible nonlinéarité et d’un faible forçage se traduit par une mise à l’échelle, effectuée en introduisant un petit paramètre $\varepsilon \ll 1$ et les paramètres échelonnés $\gamma = \varepsilon \tilde{\gamma}$, $F = \varepsilon \tilde{F}$.

La MMS consiste à introduire des échelles de temps distinctes : une rapide (associée aux oscillations) et des lentes (associées aux modulations d’amplitude et de phase), puis à rechercher la réponse de l’oscillateur sous la forme d’une série asymptotique. Cela se traduit par

$$t_0 = t, \quad t_1 = \varepsilon t, \dots, \quad t_{N_e} = \varepsilon^{N_e} t, \quad (2)$$

$$x(t; \varepsilon) = x_0(t_0, t_1, \dots, t_{N_e}) + \varepsilon x_1(t_0, t_1, \dots, t_{N_e}) + \dots + \varepsilon^{N_e} x_{N_e}(t_0, t_1, \dots, t_{N_e}) + O(\varepsilon^{N_e}). \quad (3)$$

La petitesse des termes de la série asymptotique ainsi que la lenteur des échelles de temps sont contrôlés par le petit paramètre ε . N_e désigne l’ordre de troncature de la série asymptotique ainsi que l’ordre de

l'échelle de temps la plus lente. Les dérivées temporelles seront par la suite dénotées $D_i(\bullet) = \partial(\bullet)/\partial t_i$. L'introduction des échelles de temps (2) et de la série asymptotique (3) dans l'équation du mouvement (1) mène au système d'équations linéaires suivant, organisé par puissances d' ε :

$$\begin{cases} \varepsilon^0 \rightarrow D_0 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0, \\ \varepsilon^1 \rightarrow D_0 x_1 + \omega_0^2 x_1 = f_1(x_0, D_1 x_0, D_0 D_1 x_0, t_0, t_1), \\ \vdots \\ \varepsilon^{N_e} \rightarrow D_0 x_{N_e} + \omega_0^2 x_{N_e} = f_{N_e}(x_0, \dots, t_0, t_1). \end{cases} \quad (4)$$

Les fonctions f_i , $i = 1, \dots, N_e$, agissent comme des termes de forçage. Les équations du système (4) peuvent être résolues successivement afin d'exprimer chaque terme x_i de la série asymptotique en fonction des précédents, x_j , $j < i$. La solution complète sera alors écrite en fonction de x_0 , dont l'expression constituera la fonction génératrice.

D'après la première équation, on a

$$x_0 = a \cos(\omega_0 t_0 + \phi) = a \cos(\omega t - \beta), \quad (5)$$

avec la pulsation d'oscillations $\omega = \omega_0 + \varepsilon \sigma$, σ représentant un désaccord par rapport à la fréquence propre, et où l'on a introduit l'amplitude a , la phase ϕ et la phase relative $\beta = \sigma t_1 - \phi$ de la solution au premier ordre. L'amplitude $a(t_1, \dots, t_{N_e})$ et la phase $\beta(t_1, \dots, t_{N_e})$ dépendent des temps lents. Cette dépendance est décrite par les équations d'évolution (aussi dites de *modulation*), obtenues lors de la résolution itérative du système. En effet, lors de la résolution, des termes équivalents à des termes de forçage harmoniques en t_0 et de pulsation ω_0 apparaissent dans les équations, provoquant une divergence de la solution. Pour que cette dernière reste bornée, ces termes de forçage, appelés termes séculaires, doivent être éliminés. Cela mène à des conditions de non-sécularité qui, une fois combinées, forment les équations d'évolution suivantes :

$$\begin{cases} \dot{a} &= f_a(a, \beta), \\ a\dot{\beta} &= f_\beta(a, \beta). \end{cases} \quad (6)$$

La solution en régime permanent peut maintenant être calculée en résolvant le système (6) pour $\dot{a} = \dot{\beta} = 0$, et sa stabilité s'obtient en étudiant les valeurs propres de la Jacobienne associée.

3 Implémentation de la méthode

Cette section présente une vue d'ensemble de l'organisation du package `oscilate` (voir [15] pour une description détaillée). Le package comporte trois classes principales, toutes dans le module `MMS`. Elles sont illustrées en bleu dans la Fig. 1 et décrites ci-dessous :

1. `Dynamical_system` : Définition du système dynamique étudié. Cela comprend le temps, les coordonnées des oscillateurs, les équations du mouvement, les termes de forçage (donnés indépendamment des équations), et les fréquences propres (qui servent ensuite pour déterminer les résonances internes).
2. `Multiple_scales_system` : Transformation du système dynamique en vue de l'application de la méthode des échelles multiples. C'est à ce stade que sont introduites les échelles de temps et les séries asymptotiques afin de construire un système d'équations linéaires. La méthode `apply_MMS()` peut ensuite être utilisée pour résoudre le système, menant à l'obtention des équations d'évolution et des expressions de chaque terme des séries asymptotiques.
3. `Steady_state` : Analyse des solutions en régime permanent. Permet d'évaluer les résultats précédents en régime permanent et, si des solutions analytiques existent pour des *backbone curves* ou des réponses forcées, de les calculer et d'évaluer leur stabilité.

Les résultats (équations d'évolution, solutions en régime permanent, zone de stabilités, ...) sont retournés sous forme d'expressions \LaTeX . Un utilitaire est disponible pour tracer les solutions en régime permanent, ce qui requiert de donner des valeurs numériques aux paramètres symboliques du système.

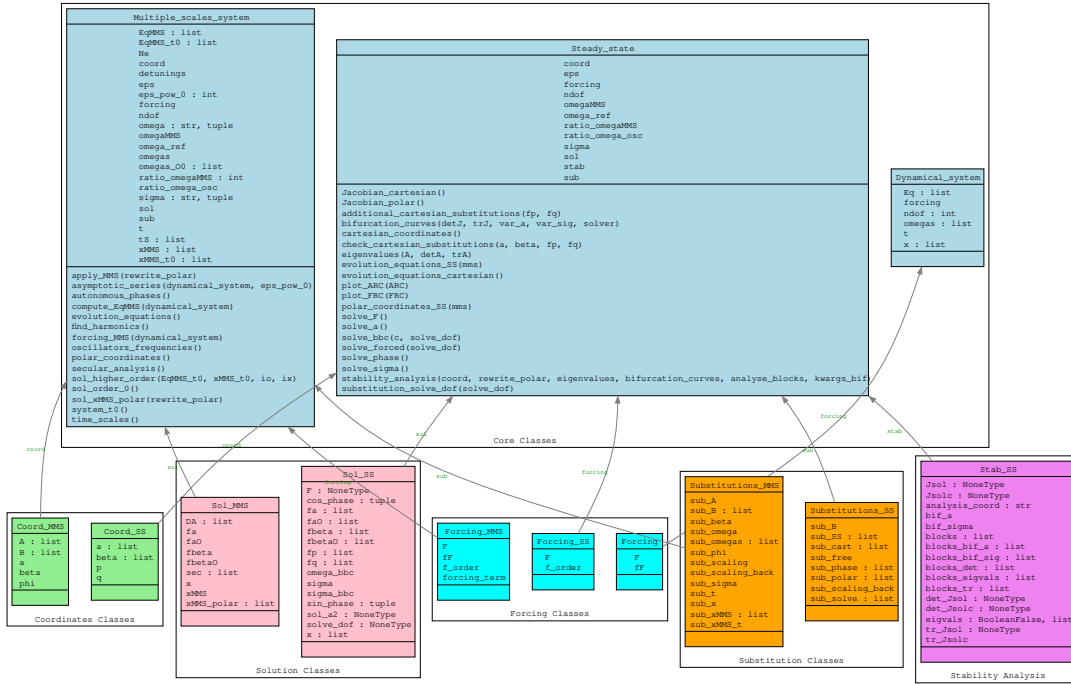


FIGURE 1 – Architecture du package `oscilate`. Les trois classes principales sont représentées en bleu, et leur connection avec les classes secondaires est illustrées par les flèches grises.

4 Applications

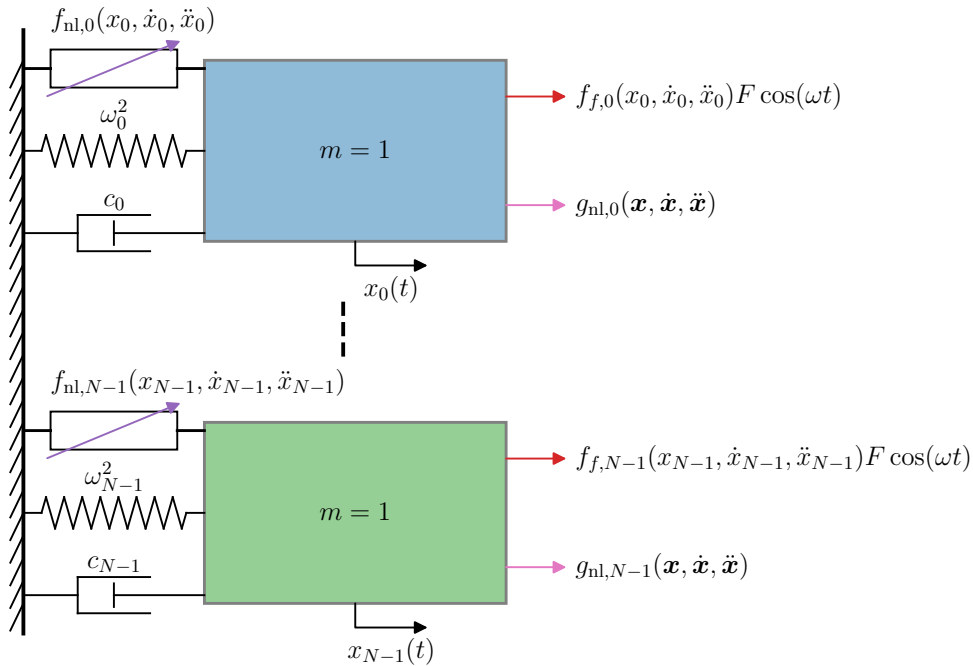


FIGURE 2 – Illustration de N oscillateurs faiblement non-linéaires, faiblement couplés, dans des conditions de résonance interne, et sujets à des forçages directs ou paramétriques

Le type de système pouvant être traité par `oscilate` est illustré en Fig. 2 et possède typiquement les caractéristiques suivantes :

- N oscillateurs faiblement couplés et conservatifs au premier ordre
- Oscillateurs faiblement non-linéaires, avec des nonlinéarités de type polynomial
- Toute relation de résonance interne

- Forçage faible ou fort (loin d'une résonance linéaire pour le forçage fort)
- Forçage paramétrique

Dix exemples de systèmes sont traités dans la documentation du package [15]. Il est à noter que comme pour toute approche numérique, le temps de calcul augmente considérablement avec le nombre de degrés de liberté. Toutefois, les approches analytiques étant destinées à des systèmes de petite taille, cela ne constitue pas un frein à l'utilisation. De plus, le cas de forçages directs multi-harmoniques n'est pas encore traité, mais il est prévu de l'intégrer dans une future version du package.

L'application de la MMS à ces systèmes permet :

- L'obtention des équations d'évolution avec une précision contrôlée par N_e , l'ordre maximal des expansions
- L'expression des solutions en fonction de l'amplitude et la phase des solutions au premier ordre
- Si une solution analytique existe pour une réponse en régime permanent, il est possible
 - ▶ De calculer cette solution forcée
 - ▶ De calculer la *backbone curve* associée
 - ▶ D'évaluer sa stabilité en analysant la Jacobienne du système au temps lent
 - ▶ De passer en coordonnées cartésiennes (peut être nécessaire pour l'analyse de stabilité)

Une version antérieure du package a été utilisée pour l'étude de systèmes non-linéaires à N (indéfini) et 2 degrés de libertés, faiblement couplés, faiblement nonlinéaires (bien que le nombre de termes nonlinéaires puisse être très important), sujets à des forçages directs et paramétriques simultanés, en résonance interne 1 : 1 et pour des réponses directes et sous-harmoniques. Des comparaisons avec des simulations numériques ont montré une excellente précision des solutions analytiques obtenues, notamment dans la capture de points d'intérêt (décalage d'antirésonance [16]), la prédiction de zones d'instabilités [17], et même l'obtention de solutions purement non-linéaires telles que des solutions sous-harmoniques [18, 19] et localisées [20]. Ces solutions analytiques ont également été confrontées à des résultats expérimentaux, montrant une excellente précision [21, 22].

5 Conclusion

Le package Python `oscilate`, implémentant la méthode des échelles multiples en calcul symbolique, facilite grandement l'analyse analytique de systèmes dynamiques non-linéaires. Il permet l'obtention des équations d'évolution ainsi que leur analyse en régime permanent, menant à la fois aux réponses non-linéaires et à l'information sur leur stabilité. Le package se veut simple d'utilisation, notamment via la disponibilité d'une documentation complète, l'affichage \LaTeX des solutions analytiques, et le choix de Python comme langage, largement utilisé dans la communauté.

Références

- [1] S. Baguet, R. Dufour, B. Prabel, L. Xie. *Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems*, Mechanical Systems and Signal Processing, 445-461, 2017.
- [2] B. Cochelin, L. Guillot, A. Lazarus, O. Thomas, C. Vergez. *A purely frequency based Floquet-Hill formulation for the efficient stability computation of periodic solutions of ordinary differential systems*, Journal of Computational Physics, 109477, 2020.
- [3] B. Cochelin, M. Debeurre, A. Grolet, O. Thomas. *Finite element computation of nonlinear modes and frequency response of geometrically exact beam structures*, Journal of Sound and Vibration, 548, 2023.
- [4] M. Legrand, C. Pierre. *A compact, equality-based weighted residual formulation for periodic solutions of systems undergoing frictional occurrences*, Journal of Structural Dynamics, 2024.
- [5] C. Giraud-Audine, Z. A. Shami, O. Thomas. *A nonlinear piezoelectric shunt absorber with a 2 : 1 internal resonance : Theory*, Mechanical Systems and Signal Processing, 108768, 2022.
- [6] W. Lacarbonara, Y. Shen. *Nonlinear dispersion properties of metamaterial beams hosting nonlinear resonators and stop band optimization*, Mechanical Systems and Signal Processing, 109920, 2023.
- [7] H. Mahé, A. Renault, O. Thomas. *Dispositif d'amortissement pendulaire*, brevet 3055037, 2018.

- [8] A. H. Nayfeh. *Perturbation methods*, Wiley-VCH, 1973.
- [9] T. D. Burton, Z. Rahman. *On higher order methods of multiple scales in non-linear oscillations-periodic steady state response*, Journal of Sound and Vibration, 369-379, 1989.
- [10] A. De Figueiredo Stabile, C. Touzé. *Normal form analysis of nonlinear oscillator equations with automated arbitrary order expansions*, Journal of Theoretical, Computational and Applied Mechanics, 13234, 2025.
- [11] A. Hassan. *Use Of Transformations With The Higher Order Method Of Multiple Scales To Determine The Steady State Periodic Response Of Harmonically Excited Non-linear Oscillators, Part I : Transformation Of Derivative*, Journal of Sound and Vibration, 1-19, 1994.
- [12] A. Luongo, A. Paolone. *On the Reconstitution Problem in the Multiple Time-Scale Method*, Nonlinear Dynamics, 135-158, 1999.
- [13] C. Chin, A. H. Nayfeh. *Perturbation methods with Maple and Mathematica*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1999.
- [14] M. Cartmell, A. Gilbert, R. Khanin. *A computerised implementation of the multiple scales perturbation method using Mathematica*, Computers & Structures, 565-575, 2000.
- [15] V. Mahe. *OSCILATE : A Python implementation of the Method of Multiple Scales using SymPy for symbolic computation*, Software Heritage, <https://archive.softwareheritage.org/swh:1:snp:2d8da922ecec0ffef43c467543f05c6363d76ee0;origin=https://github.com/VinceECN/OSCILATE>, 2025.
- [16] A. Grolet, V. Mahé, H. Mahé, A. Renault, O. Thomas. *On the dynamic stability and efficiency of centrifugal pendulum vibration absorbers with rotating pendulums*, Journal of Sound and Vibration, 117157, 2022.
- [17] A. Grolet, V. Mahé, H. Mahé, A. Renault, O. Thomas. *Dynamic stability and efficiency of centrifugal double pendulum vibration absorbers*, Mechanism and Machine Theory, 105649, 2024.
- [18] A. Grolet, V. Mahé, H. Mahé, A. Renault, O. Thomas. *Subharmonic centrifugal pendulum vibration absorbers allowing a rotational mobility*, Mechanical Systems and Signal Processing, 109125, 2022.
- [19] A. Grolet, V. Mahé, H. Mahé, A. Renault, O. Thomas. *On the stability of pairs of subharmonic centrifugal pendulum vibration absorbers allowing a rotational mobility*, Nonlinear Dynamics, 17859–17886, 2023.
- [20] A. Grolet, V. Mahé, H. Mahé, A. Renault, O. Thomas. *The localised response and filtering performance of centrifugal pendulum vibration absorbers allowing a rotational mobility*, Journal of Sound and Vibration, 118028, 2024.
- [21] A. Grolet, V. Mahé, H. Mahé, A. Renault, O. Thomas. *Experimental investigation of the direct and subharmonic responses of a new design of centrifugal pendulum vibration absorber*, Mechanism and Machine Theory, 105401, 2023.
- [22] A. Grolet, V. Mahé, H. Mahé, A. Renault, O. Thomas. *Experimental validation of a centrifugal double pendulum vibration absorber model*, Journal of Sound and Vibration, 119032, 2025.