

Comparaison d'approches éléments finis pour le calcul à partir d'images

N. Mawassy¹, G. Legrain¹, V. Rey¹, X. Liu¹

¹ Nantes Université, École Centrale Nantes, CNRS, GeM, UMR 6183, F-44000, France
{nagham.mawassy}@gmail.com
{valentine.rey}@univ-nantes.fr
{gregory.legrain,xiaodong.liu}@ec-nantes.fr

Résumé — Cette étude compare différentes méthodes pour résoudre des problèmes géométriques complexes issus de calculs basés sur des images, en se limitant aux approches nécessitant peu de prétraitement géométrique : la méthode des éléments finis voxels, la méthode des éléments finis par décomposition conforme (CDFEM) et les méthodes de domaines fictifs. La géométrie est modélisée par des fonctions level-set, obtenues par segmentation ou recalculées à partir d'une surface maillée. Pour évaluer ces méthodes, des analyses de convergence sont réalisées sur des problèmes en 2D et 3D de complexité variable.

Mots clés — calculs sur images, X-FEM, CDFEM, domaines fictifs.

1 Introduction

L'intégration de la conception assistée par ordinateur (CAO) et de l'ingénierie assistée par ordinateur (IAO) est essentielle aux processus modernes d'ingénierie. Cependant, la transition des modèles géométriques vers des maillages prêts pour la simulation reste un point délicat, souvent marqué par des pertes de données, des imprécisions géométriques et un prétraitement fastidieux. Ces défis sont particulièrement aigus dans la fabrication additive, où la complexité géométrique des matériaux architecturés peut s'avérer problématique pour les techniques de maillage traditionnelles. Parallèlement, les calculs basés sur l'imagerie prennent une importance croissante, notamment en ingénierie biomédicale et en science des matériaux. Les simulations issues de données d'imagerie (tomographie ou IRM) exigent une représentation fidèle de géométries internes complexes, comme les structures osseuses poreuses, les interfaces de tissus mous ou les matériaux microstructurés [1]. La capacité à convertir de manière robuste ces données en maillages haute fidélité est cruciale pour des applications comme la conception de dispositifs médicaux sur mesure, la biomécanique des tissus ou l'analyse de composites hétérogènes [2, 3].

La méthode des éléments finis (FEM), bien que robuste et polyvalente, peut devenir délicate à mettre en œuvre lorsqu'elle est appliquée à des domaines géométriquement complexes ou issus d'images. Se restreindre aux maillages conformes, alignés sur les frontières et interfaces des matériaux, devient problématique avec l'augmentation de la complexité géométrique. La méthode peut alors peiner à concilier précision et efficacité calculatoire, incitant à explorer des approches alternatives.

Parmi celles-ci, la méthode des éléments finis voxels (FEM voxel), la méthode des éléments finis par décomposition conforme (CDFEM) et les méthodes de domaines fictifs (comme la Finite Cell Method) se distinguent. Elles exploitent les fonctions level-set pour représenter implicitement des géométries complexes et des changements topologiques, réduisant ainsi le besoin de raffinement manuel. La FEM voxel, adaptée aux calculs basés sur l'imagerie, voit son coût computationnel limité par la résolution de l'image sous-jacente. La CDFEM, quant à elle, décompose les maillages non conformes en éléments alignés sur les interfaces level-set, améliorant la précision aux interfaces sans modifier la structure du maillage, mais au prix de distorsions des mailles. Les méthodes de domaines fictifs, en utilisant des maillages totalement indépendants de la géométrie, offrent une flexibilité accrue pour les géométries complexes, avec des avancées récentes en schémas d'intégration et règles de quadrature qui améliorent leur efficacité.

D'autres approches, comme l'analyse isogéométrique (IGA) et les méthodes sans maillage (EFG

par exemple), visent aussi à surmonter ces défis. Dans le cas où les géométries CAO sont disponibles, l'IGA élimine la génération de maillage en utilisant directement cette paramétrisation, préservant la fidélité géométrique, mais peut être coûteuse si un raffinement local est nécessaire. Les méthodes sans maillage, bien que performantes pour les géométries complexes, nécessitent des solveurs spécialisés et potentiellement coûteux.

Cette étude vise à évaluer systématiquement les performances de la FEM voxel, de la CDFEM et des domaines fictifs, intégrées aux level-sets, pour automatiser la génération de maillage, préserver la fidélité géométrique et optimiser l'efficacité calculatoire, à travers différents exemples de complexité croissante.

2 Méthodes comparées

Considérons un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) sur lequel nous cherchons à résoudre des équations physiques telles que celles qui régissent la thermique ou la mécanique stationnaire. La représentation première de ce domaine peut être fournie sous forme d'une image (obtenue par microscopie ou tomographie), d'un nuage de points ou d'une représentation surfacique (obtenus à partir d'un scan surfacique ou du pré-traitement d'une image). La complexité géométrique de Ω fait que nous ne chercherons pas à construire de maillage conforme à partir de sa définition géométrique. Il est toutefois intéressant de préciser que ces modes de représentation peuvent aisément être convertis sous forme d'une fonction de niveau $\phi(\mathbf{x})$ qui servira de base aux stratégies présentées par la suite. Cette fonction de niveau est telle que la frontière de Ω : $\partial\Omega$ est l'iso-zéro de la fonction level-set :

$$\partial\Omega = \{\mathbf{x} | \phi(\mathbf{x}) = 0\}$$

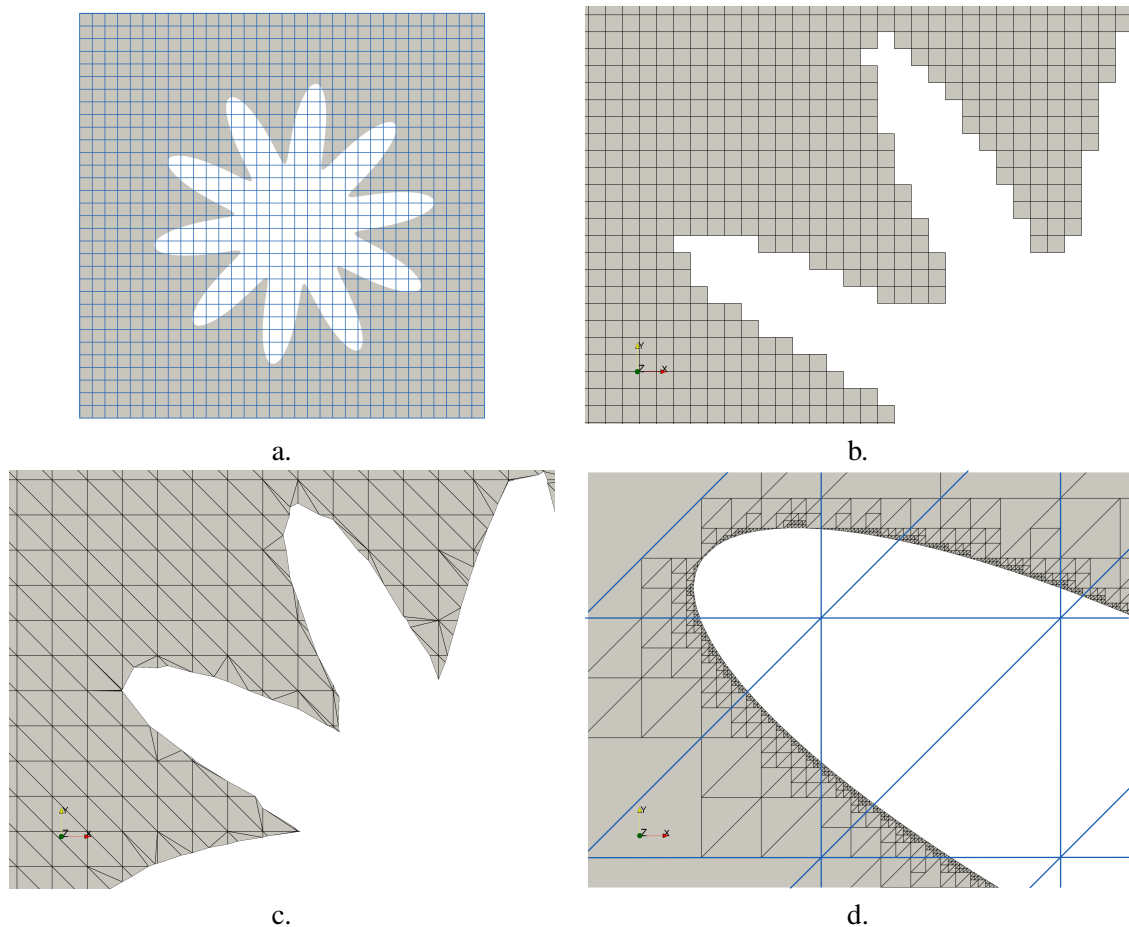


FIGURE 1 – Illustrations : a. Géométrie et maillage de base (32×32); b. Maillage voxel; c. Maillage CDFEM d. Maillage support à la géométrie des domaines fictifs.

2.1 Éléments finis voxels

Pour cette méthode, le processus commence par la création d'un maillage de base, qui sert de structure de référence pour les étapes suivantes. Contrairement aux techniques de maillage classiques, ce maillage de base est construit indépendamment de la géométrie des frontières du domaine. Cela permet de générer une grille simple et régulière qui n'a besoin que de chevaucher le domaine, sans devoir épouser précisément ses contours. Cette approche simplifie grandement le processus de maillage, surtout pour les géométries complexes, en évitant l'utilisation d'éléments alignés sur les frontières. Bien que l'approche puisse travailler directement à partir d'une image seuillée [4], nous utilisons ici la fonction de niveau pour réaliser le seuillage de la géométrie. Cette fonction est interpolée sur le maillage de base, ce qui permet de classer chaque élément du maillage comme étant à l'intérieur, à l'extérieur ou traversant la frontière du domaine. Une fois cette classification terminée, seuls les éléments situés entièrement à l'extérieur du domaine sont supprimés, conduisant ainsi à un maillage final qui représente le domaine d'intérêt Ω , comme illustré sur la Fig. 1 b.

Bien que les modèles basés sur les voxels offrent simplicité et efficacité numérique [5], ils produisent intrinsèquement des surfaces artificiellement crénelées en raison de leur approximation en escalier des frontières [6]. Ces imprécisions géométriques peuvent entraîner des oscillations locales prononcées des contraintes et une réduction de la précision de la solution.

2.2 Éléments finis par décomposition conforme

La méthode des éléments finis par décomposition conforme [7] (CDFEM) propose une approche pragmatique et efficace pour traiter les problèmes à géométrie complexe en utilisant un maillage de fond initialement indépendant des interfaces. Tout comme pour l'approche voxels, la CDFEM se base sur un maillage de fond non conforme (structuré ou non), qu'elle décompose ensuite en éléments alignés sur la géométrie des interfaces [7]. Le processus débute par la génération d'un ou plusieurs champs de fonctions level-set qui décrivent les interfaces sur le maillage de fond [7]. Ces champs level-set servent de base pour subdiviser les éléments non conformes en éléments conformes permettant ainsi une représentation précise des contours. Un code de calcul éléments finis standard peut ensuite être utilisé pour le calcul.

Une caractéristique clé de la CDFEM est sa capacité à introduire des nœuds supplémentaires aux endroits où les interfaces croisent les arêtes des éléments du maillage de fond [7]. Comme illustré sur la Fig. 1 c, l'interface level-set est approximée linéairement sur le maillage de base.

Bien que la CDFEM présente des avantages significatifs pour la prise en compte de la géométrie, l'intersection arbitraire des surfaces level-set avec le maillage de fond peut potentiellement conduire à des éléments conformes de qualité sous-optimale. Ce défi provient du fait que les points d'intersection sont déterminés uniquement par l'approximation level-set et la structure du maillage sous-jacent, sans contrôle explicite sur la forme ou le rapport d'aspect des éléments. De telles contraintes géométriques peuvent affecter la performance numérique et la précision de la discrétisation résultante. Cependant, Noble et al. [8] ont montré que des heuristiques simples peuvent être appliquées afin d'atténuer cette limitation.

2.2.1 Domaines fictifs

Les méthodes de domaines fictifs suscitent un intérêt croissant ces dernières années en raison de leurs caractéristiques avantageuses pour les processus de conception par analyse [9]. Le principe fondamental des méthodes de domaines fictifs réside dans leur capacité à dissocier la représentation géométrique du maillage de calcul. L'interaction entre géométrie et approximation se fait uniquement au niveau de l'intégration de la forme variationnelle du problème.

La méthode est illustrée sur la Fig. 1 d : la géométrie du domaine d'intégration est définie de manière indépendante du maillage de calcul, ce qui permet de dissocier précision géométrique et précision de l'approximation. Les variables inconnues restent associées aux sommets des éléments du maillage original, évitant ainsi l'introduction de degrés de liberté supplémentaires. Dans la mise en œuvre, les éléments situés entièrement à l'extérieur du domaine d'intérêt sont exclus du processus d'intégration numérique, tandis que des règles de quadrature standard sont appliquées aux éléments entièrement contenus dans le domaine. Des techniques d'intégration spécialisées doivent cependant être employées pour évaluer avec

précision la formulation faible sur les éléments coupés par l'interface [10, 11]. Ces stratégies spécialisées impliquent souvent des règles de quadrature adaptatives ou des techniques de type *moment fitting* pour maintenir la précision de la solution [12].

Nous illustrons ici l'approche dite par sous-grille (Fig. 1 d) car celle-ci est très robuste et bien adaptée aux calculs à partir d'image : la level-set est interpolée sur un maillage défini hiérarchiquement vis-à-vis du maillage du calcul. La taille minimale de ces éléments est la taille des pixels de l'image d'entrée.

Un paramètre important dans ce contexte est le nombre de niveaux de feuilles, qui joue un grand rôle dans le compromis précision / efficacité numérique. Le nombre de niveaux de feuilles est défini comme le nombre de subdivisions récursives appliquées aux éléments du maillage de calcul [10]. Ce paramètre influence directement la résolution de l'approximation de l'interface et la qualité de l'intégration numérique. Un nombre plus élevé de niveaux de feuilles conduit généralement à des représentations plus précises des géométries complexes, mais augmente également les coûts de calcul (davantage de points d'intégration). Le choix optimal des niveaux de feuilles représente donc un compromis entre les exigences de précision et les ressources de calcul [10].

3 Exemple numérique

Nous ne présentons ici qu'un seul exemple numérique : considérons la géométrie déjà présentée sur la figure 1 qui représente un carré de côté 1×1 contenant un motif en forme de fleur. Le but de cet exemple est d'étudier une géométrie présentant de fortes variations de courbure, ce qui permet de mieux discriminer les performances des méthodes. La fonction level-set décrivant l'interface de la fleur est donnée dans [13] :

$$\phi(r, \theta) = r_0 + 0,1 \sin(w\theta) - \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}. \quad (1)$$

Ici, nous fixons $r_0 = 0,25$ et le nombre de pétales $w = 10$. De plus, la fleur est volontairement décentrée en $(x_c, y_c) = (0,51; 0,49)$ pour généraliser le problème. Un problème en Laplacien est résolu sur le carré privé de la fleur (zone grisée sur la figure 1 a). Une solution manufacturée avec un flux nul à l'interface a été construite afin de comparer la convergence des trois méthodes étudiées. La condition de flux nul sur l'interface de la fleur est nécessaire pour comparer les différentes approches. Sans cela, imposer un flux exact sur celle-ci conduirait toujours à une convergence optimale, indépendamment de la précision géométrique. La solution exacte est ensuite imposée sur le bord du domaine extérieur (carré) au moyen de conditions limites de Dirichlet.

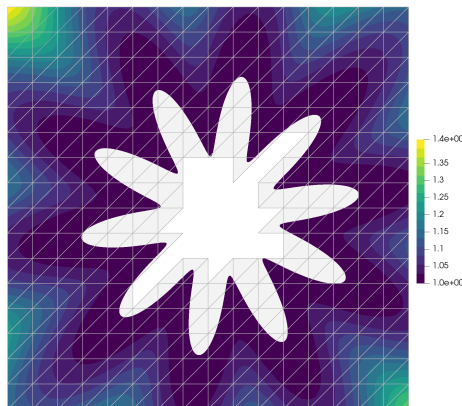


FIGURE 2 – Problème d'interface en forme de fleur. Solution et maillage pour les domaines fictifs.

La figure 2 présente la solution exacte de ce problème. Les figures 1 (b), (c) et (d) montrent les différents maillages utilisés pour la méthode des éléments finis voxels, la CDFEM et la méthode des domaines fictifs (avec 5 niveaux de feuilles pour l'approximation géométrique dans le cas des domaines fictifs).

La convergence est évaluée en utilisant la semi-norme H^1 pour différents niveaux de raffinement de maillage. Seule la convergence en h est considérée pour les méthodes basées sur les éléments finis

(CDFEM et voxel), tandis que les convergences en h et en p sont analysées pour les domaines fictifs. Tous les calculs commencent avec un maillage de base de 8×8 éléments, qui est progressivement raffiné pour étudier la convergence en h .

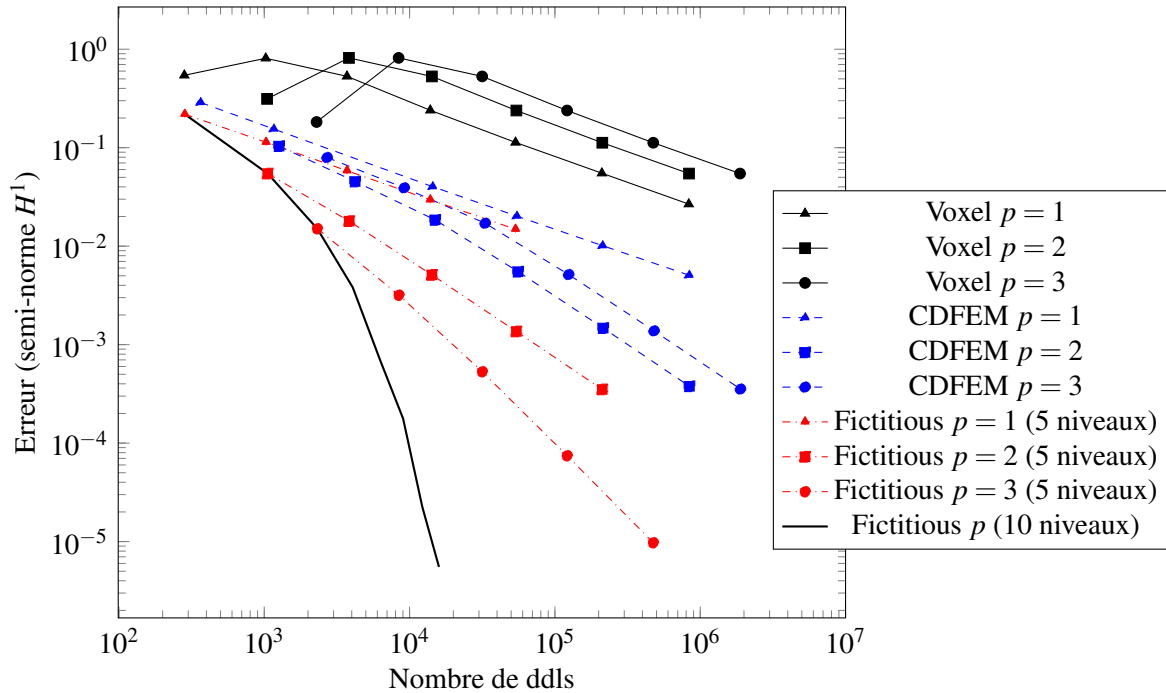


FIGURE 3 – Convergence en semi-norme H^1 pour les méthodes voxel FEM (noir), CDFEM (bleu) et domaines fictifs (rouge) pour différents ordres polynomiaux. La convergence en p pour un maillage 8×8 et 10 niveaux de feuilles est également présentée.

La Fig. 3 présente les résultats de convergence correspondants. Nous observons que la méthode voxel ne parvient pas à converger de manière optimale à cause de la lente convergence de la géométrie et des singularités au niveau des nombreux angles rentrants. La CDFEM converge de manière optimale pour les approximations linéaires et quadratiques, mais pas pour l'approximation cubique. Ce comportement s'explique par la précision géométrique insuffisante due à la représentation linéaire de la géométrie. Il est important de préciser ici que, selon le problème traité, la convergence optimale en quadratique n'est pas toujours obtenue. Les domaines fictifs, en revanche, montrent une convergence optimale pour $p = 1, 2$ et 3 , avec un niveau d'erreur plus faible que la CDFEM pour $p = 1, 2$ (probablement grâce à une meilleure précision géométrique). Enfin, une convergence exponentielle est observée pour la convergence en p , en raison de la régularité de la solution et d'une précision géométrique adaptée (10 niveaux de récursion par rapport au maillage d'approximation se révèlent suffisants dans ce cas).

4 Conclusion

Nous avons présenté une comparaison entre différentes approches permettant de résoudre des problèmes posés sur des domaines à géométrie complexe : éléments finis voxels, éléments finis par décomposition conforme et domaines fictifs. Pour une approximation linéaire, toutes ces méthodes convergent optimalement, mais l'approche CDFEM semble être le meilleur compromis précision-facilité de mise en œuvre. Si l'on considère des approximations d'ordre supérieur, alors seule l'approche des domaines fictifs permet d'atteindre une convergence optimale. Cette approche est également capable de converger exponentiellement en cas de raffinement p .

Des validations proches de la pratique seront présentées lors de la conférence (calculs à partir d'image, cas tridimensionnels) afin de pouvoir conclure plus précisément sur les avantages comparés de ces approches.

Remerciements

Les auteurs remercient le **Carnot MERS** pour son soutien financier dans le cadre du projet AM3S.

Les calculs ont été réalisés en utilisant les grappes de calcul et les ressources de stockage du **GLiCID** (Groupement Ligérien pour le Calcul Intensif Distribué, www.glicid.fr).

Références bibliographiques

- [1] P G YOUNG et al. “An Efficient Approach to Converting Three-Dimensional Image Data into Highly Accurate Computational Models”. In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 366.1878 (2008), p. 3155-3173. DOI : 10.1098/rsta.2008.0090.
- [2] J.H. KEYAK et al. “Automated Three-Dimensional Finite Element Modelling of Bone : A New Method”. In : *Journal of Biomedical Engineering* 12.5 (1990), p. 389-397. DOI : 10.1016/0141-5425(90)90022-F.
- [3] S.J HOLLISTER et Noboru KIKUCHI. “Homogenization Theory and Digital Imaging : A Basis for Studying the Mechanics and Design Principles of Bone Tissue”. In : *Biotechnology and Bioengineering* 43.7 (1994), p. 586-596. DOI : 10.1002/bit.260430708.
- [4] L L Mishnaevsky JR. et L L MISHNAEVSKY~JR. “Automatic Voxel-Based Generation of 3D Microstructural FE Models and Its Application to the Damage Analysis of Composites”. In : *Materials Science and Engineering : A* 407.1-2 (2005), p. 11-23. DOI : 10.1016/j.msea.2005.06.047.
- [5] Xiaodong LIU, Julien RÉTHORÉ et Antonius Adrianus LUBRECHT. “An Efficient Matrix-Free Preconditioned Conjugate Gradient Based Multigrid Method for Phase Field Modeling of Fracture in Heterogeneous Materials from 3D Images”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 388 (jan. 2022), p. 114266. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/j.cma.2021.114266. (Visité le 03/12/2025).
- [6] R E GULDBERG, S.J HOLLISTER et G T CHARRAS. “The Accuracy of Digital Image-Based Finite Element Models.” In : *Journal of biomechanical engineering* 120.2 (1998), p. 289-295. DOI : 10.1115/1.2798314.
- [7] David R. NOBLE, Elijah P. NEWREN et Jeremy B. LECHMAN. “A Conformal Decomposition Finite Element Method for Modeling Stationary Fluid Interface Problems”. In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 63.6 (2010), p. 725-742. ISSN : 1097-0363. DOI : 10.1002/flid.2095. (Visité le 10/11/2022).
- [8] Richard M J KRAMER et David R NOBLE. *Guaranteed Quality Conformal Mesh Decomposition*. Tech. Report SAND2015-11119. Sandia National Laboratories.
- [9] Dominik SCHILLINGER et al. “An Isogeometric Design-through-Analysis Methodology Based on Adaptive Hierarchical Refinement of NURBS, Immersed Boundary Methods, and T-spline CAD Surfaces”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 249–252 (2012), p. 116-150. DOI : 10.1016/j.cma.2012.03.017.
- [10] Jamshid PARVIZIAN, Alexander DÜSTER et Ernst RANK. “Finite Cell Method”. In : *Computational Mechanics* 41.1 (2007), p. 121-133. DOI : 10.1007/s00466-007-0173-y.
- [11] Grégory LEGRAIN et Nicolas MOËS. “An Efficient and Accurate Integration Scheme for Fictitious Domain Methods Based on Level-Sets and Anisotropic Meshing”. In : *13th U.S. National Congress on Computational Mechanics (USNCCM13)*. 2015.
- [12] Gregory LEGRAIN. “Non-Negative Moment Fitting Quadrature Rules for Fictitious Domain Methods”. In : *Computers & Mathematics with Applications* (2021), p. 34. DOI : 10/gmnnst.
- [13] Zhilin LI. “A Fast Iterative Algorithm for Elliptic Interface Problems”. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 35.1 (jan. 1998), p. 230-254. ISSN : 0036-1429. DOI : 10.1137/S0036142995291329. (Visité le 04/12/2025).