

# Modélisation discrète des particules non-sphériques

S. Nezamabadi<sup>1</sup>, T.D. Tran<sup>1,4</sup>, V. Richefeu<sup>2</sup>, L. Amarsid<sup>3</sup>, J.-P. Bayle<sup>4</sup>, F. Radjai<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMGC, CNRS Université de Montpellier, {saeid.nezamabadi, franck.radjai}@umontpellier.fr

<sup>2</sup> 3SR, CNRS Université Grenoble Alpes, vincent.richefeu@univ-grenoble-alpes.fr

<sup>3</sup> CEA, DES, IRESNE, Cadarache, lhassan.amarsid@cea.fr

<sup>4</sup> CEA, ISEC, DMRC, Université de Montpellier, Marcoule, jean-philippe.bayle@cea.fr

**Résumé** — La méthode des éléments discrets est largement utilisée pour simuler le comportement des matériaux granulaires. La forme des particules, souvent complexe, pose des défis pour la définition des contacts. Nous proposons une approche basée sur les *R-shapes* (sphéro-polyèdres), obtenues en balayant une sphère de rayon  $R$  le long des arêtes et faces d'un polyèdre. Cette construction génère des surfaces lisses et évite les problèmes des représentations polygonales classiques. L'efficacité et la précision sont illustrées par la compaction radiale d'assemblages de particules hexapodes et pentagonales.

**Mots clés** — Méthode des éléments discrets, Formes complexes, Détection des contacts.

## 1 Introduction

Les matériaux granulaires sont omniprésents dans les procédés industriels, les systèmes naturels et de nombreuses applications technologiques. Leur comportement mécanique dépend non seulement des propriétés intrinsèques des particules (densité, rugosité, rigidité...), mais aussi de leur morphologie. De nombreuses études ont montré que la forme des particules influence fortement la compacité, la porosité et la résistance des assemblages granulaires [1]. Les particules sphériques, grâce à leur symétrie, favorisent des arrangements denses et stables. À l'inverse, les particules non convexes ou irrégulières introduisent des vides, réduisent la densité de compactage et peuvent engendrer des structures mécaniquement moins robustes. Cette sensibilité à la forme est particulièrement critique dans des applications telles que le compactage des poudres, la stabilité des sols ou la conception de matériaux composites.

La compréhension de ces phénomènes a été enrichie par des techniques expérimentales avancées, telles que la tomographie par rayons X et la numérisation tridimensionnelle [2], qui permettent d'analyser la structure interne des assemblages granulaires. Toutefois, ces approches présentent des limitations en termes de coût, de temps et de reproductibilité. La simulation numérique, et en particulier la méthode des éléments discrets (DEM, *Discrete Element Method*), s'est imposée comme un outil incontournable pour étudier le comportement des matériaux granulaires [3, 4]. La DEM permet de modéliser les interactions entre particules individuelles et de prédire l'évolution globale du système sous différentes conditions de chargement.

Cependant, la représentation réaliste des particules non sphériques dans la DEM demeure un défi majeur. Les approches classiques se sont concentrées soit sur l'introduction de paramètres supplémentaires (frottement de roulement, interactions torsionnelles) [5], soit sur la reproduction fidèle des géométries réelles à partir d'images numérisées [6]. Les particules ont ainsi été modélisées sous forme de superquadriques [7], de polygones ou polyèdres [3], en utilisant le level-set [8], ou encore par des assemblages de sphères [9]. Des modèles hybrides combinant DEM et éléments finis ont également été proposés pour mieux intégrer la géométrie et les lois de contact [10]. Malgré ces avancées, plusieurs difficultés persistent : (i) la détection des contacts entre particules complexes est coûteuse et sujette à des ambiguïtés, notamment pour les formes non convexes ; (ii) la définition des normales aux surfaces est délicate pour les polyèdres présentant des arêtes vives et des sommets multiples ; et (iii) les approches basées sur des assemblages de sphères peuvent induire des approximations géométriques importantes.

Dans cet article, pour répondre à ces limitations, nous proposons une approche innovante basée sur les "*R-shapes*", ou sphéro-polyèdres [4, 11, 12]. Ces formes sont obtenues en balayant une sphère de rayon  $R$  le long des arêtes et des faces d'un polyèdre, ce qui génère des surfaces lisses et des transitions continues. Cette construction géométrique présente plusieurs avantages : (i) simplification de la détection

des contacts en réduisant les singularités géométriques ; (ii) définition plus simple des normales grâce à des surfaces arrondies ; et (iii) préservation de la complexité de la forme initiale tout en améliorant la robustesse numérique. L'efficacité et la précision de cette méthode sont illustrées par des simulations de compaction radiale d'assemblages de particules hexapodes et pentagonales, permettant d'évaluer quantitativement l'influence de la morphologie sur la densité et la distribution des forces.

## 2 Méthodologie

Dans cette section, nous présentons la méthodologie de dynamique des particules utilisée dans les simulations et décrivons la procédure pour représenter des formes complexes.

### 2.1 Formulation de la DEM

Les simulations de dynamique des particules ont été réalisées à l'aide de la méthode des éléments discrets (DEM) [13, 14]. Les "éléments" sont des particules rigides interagissant par des contacts frottants. Soient  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  les vecteurs unitaires normal et tangentiel au point de contact  $c$  entre les particules  $i$  et  $j$ . La force  $\vec{f} = f_n \vec{n} + f_t \vec{t}$  exercée par la particule  $j$  sur la particule  $i$  est exprimée en fonction du chevauchement normal  $\delta_n$  et du déplacement tangentiel cumulé  $\delta_t$ . La force normale est donnée par :

$$f_n = \begin{cases} 0 & \tilde{f}_n \leq 0, \\ \tilde{f}_n & \tilde{f}_n > 0, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\tilde{f}_n = -k_n \delta_n - 2\xi_n \sqrt{k_n m_{\text{eff}}} \dot{\delta}_n$ ,  $k_n$  est la raideur normale,  $\dot{\delta}_n$  est la vitesse relative normale,  $m_{\text{eff}}$  ( $m_{\text{eff}} = m_i m_j / (m_i + m_j)$ ) représente la masse réduite des deux particules  $i$  et  $j$  en contact, et  $\xi_n$  est la paramètre d'amortissement sans dimension ( $0 \leq \xi_n < 1$ ) :

$$\xi_n = -\frac{\ln(e_n)}{\sqrt{\ln^2(e_n) + \pi^2}}. \quad (2)$$

Ici,  $e_n$  est le coefficient de restitution normal ( $0 < e_n \leq 1$ ), et est une fonction décroissante de  $\xi_n$ .

La force tangentielle  $f_t$  est régie par la loi de frottement de Coulomb :

$$f_t = \min\{|k_t \delta_t|, \mu f_n\}, \quad (3)$$

où  $k_t$  est la raideur tangentielle, et  $\mu$  est le coefficient de frottement. L'orientation  $\vec{t}$  de la force tangentielle est opposée soit au déplacement élastique relatif  $\delta_t$  en dessous du seuil de Coulomb ( $f_t < \mu f_n$ ), soit à la vitesse relative  $\vec{v}_t$  au point de contact lorsque le seuil de Coulomb est atteint ( $f_t \geq \mu f_n$ ).

La simulation de particules rigides nécessite un potentiel répulsif raide et des pas de temps très petits. Les équations du mouvement sont calculées pour toutes les particules à l'aide d'un schéma d'intégration "velocity-Verlet" [15].

### 2.2 R-shapes : représentation des particules complexes

La modélisation des particules de forme arbitraire constitue un défi majeur dans la simulation des matériaux granulaires par la DEM. Les approches classiques basées sur des polyèdres convexes ou des assemblages de sphères présentent des limites, notamment en termes de précision géométrique et de robustesse dans la détection des contacts. Pour surmonter ces difficultés, nous introduisons le concept des "R-shapes", ou sphéro-polyèdres, qui offrent une représentation efficace et flexible des particules non sphériques.

Le principe des R-shapes repose sur la construction d'une forme arrondie à partir d'un polyèdre initial en balayant une sphère de rayon  $R$  le long de ses arêtes et de ses faces. Cette opération, qui correspond mathématiquement à la somme de Minkowski entre le polyèdre et une sphère, génère des surfaces lisses et des transitions continues, éliminant les singularités géométriques des arêtes vives. Les sommets sont ainsi transformés en sphères, les arêtes en cylindres et les faces en plaques arrondies. La construction des

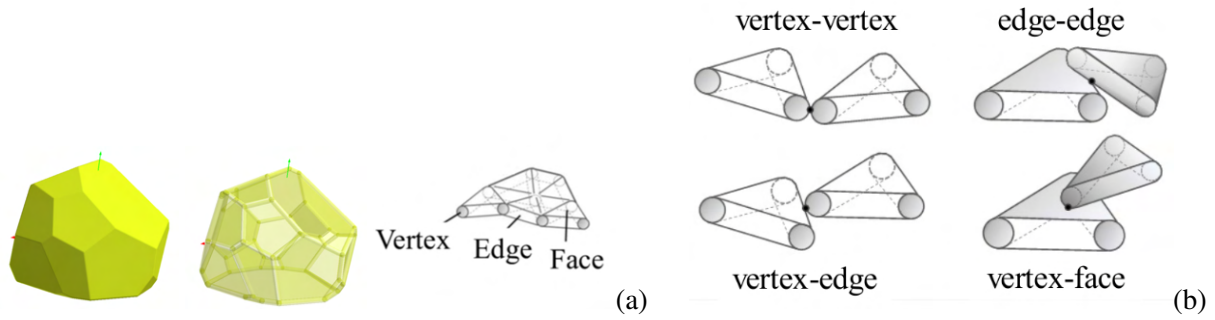


FIGURE 1 – Éléments de la forme des particules utilisant *R*-shapes (a) ; Quatre types de contacts possibles entre deux particules (b).

*R*-shapes peut être réalisée à partir d'éléments géométriques simples (points, segments, plans) ou à partir de données expérimentales. La figure 1(a) illustre un exemple de cette représentation.

Un avantage majeur des *R*-shapes réside dans la détermination simple et robuste des points de contact et des repères locaux associés. Contrairement aux polyèdres classiques, où les arêtes vives et les sommets multiples entraînent des ambiguïtés dans la définition des normales, les surfaces arrondies des *R*-shapes permettent d'obtenir une normale unique et bien définie pour chaque contact. Toutes les configurations de contact entre deux *R*-shapes peuvent être ramenées à quatre types élémentaires : (i) *Sommet–Sommet* (*vertex–vertex*), contact ponctuel entre deux sphères aux sommets ; (ii) *Sommet–Arête* (*vertex–edge*), contact entre une sphère et un cylindre ; (iii) *Sommet–Face* (*vertex–face*), contact entre une sphère et une surface arrondie ; (iv) *Arête–Arête* (*edge–edge*), contact entre deux cylindres (voir figure 1(b)).

Les configurations plus complexes, comme *Face–Face*, sont en réalité des combinaisons de ces contacts élémentaires (par exemple plusieurs *Sommet–Face* ou *Arête–Arête*). Cette approche est particulièrement efficace pour des géométries non convexes ou même creuses (chaînes, maillons), car elle garantit une détection fiable et une définition cohérente des normales.

Dans le cadre de la DEM, la génération des particules par les *R*-shapes assure la compatibilité avec les lois de contact complexes (frottement, adhésion) et les schémas d'intégration temporelle variés. Ainsi, les *R*-shapes constituent une solution robuste pour la simulation des particules complexes dans la DEM, conciliant précision géométrique et efficacité numérique. Nous avons implémenté cette méthodologie dans un code de calcul nommé *Rockable* [12]. Par la suite, nous présentons des exemples d'application utilisant ce code pour illustrer la méthodologie proposée.

### 3 Simulations de particules hexapodes et pentagonales

Dans cette section, nous considérons deux formes de particules : les hexapodes (forme non convexe) et les pentagones (forme convexe). Nous présentons d'abord la génération de ces formes, puis nous simulons des assemblages constitués de particules de ces formes complexes.

#### 3.1 Particules hexapodes et pentagonales

Nous appliquons la méthode des *R*-shapes pour générer des particules hexapodes et pentagonales. Les hexapodes à symétrie sextuple sont constitués de trois cylindres orthogonaux munis de capuchons arrondis, comme illustré à la figure 2. Ils peuvent également être définis comme la somme de Minkowski d'une sphère de diamètre  $d$  et de trois segments orthogonaux de longueur  $L$ , partageant le même centre. Ainsi, la longueur totale de chaque branche est  $L + d$ , et  $d$  correspond au diamètre de chaque bras. Le rapport d'aspect  $\alpha$  de l'hexapode est identique à celui de chaque sphéro-segment :

$$\alpha = \frac{L + d}{d}. \quad (4)$$

Nous considérons également des plaques pentagonales épaisses, définies comme la somme de Minkowski d'une sphère de diamètre  $d$  et d'un pentagone régulier de diamètre circonscrit  $L$ . Chaque plaque

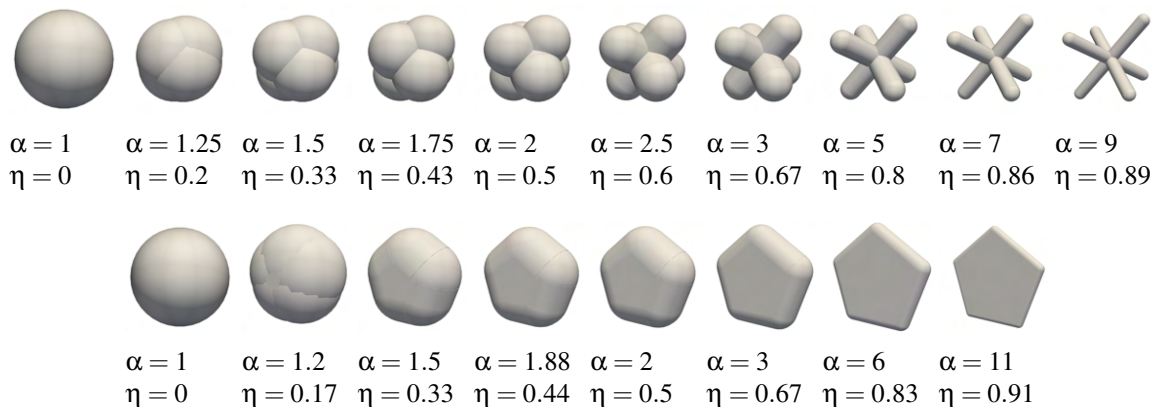


FIGURE 2 – Particules hexapodes et pentagonales avec différentes valeurs de  $\alpha$  et de  $\eta$ .

pentagonale comporte cinq sommets, cinq arêtes et une face (voir figure 2). Le même rapport d'aspect  $\alpha$  (voir équation (4)) est utilisé pour caractériser les pentagones.

Afin d'étudier l'effet de la forme des particules, nous faisons varier les formes hexapodes et pentagonales en modifiant le rapport d'aspect  $\alpha$  (voir figure 2). Le cas de la sphère ( $\alpha = 1$ ) est singulier : il est obtenu soit en fixant  $L = 0$  pour une valeur arbitraire de  $d$ , soit en laissant  $d$  tendre vers l'infini pour une valeur arbitraire de  $L$ .

Pour les hexapodes, lorsque  $\alpha \leq 2$ , les capuchons sphériques prédominent, tandis que pour  $\alpha > 2$ , la forme cylindrique des trois branches détermine l'aspect général. Pour des valeurs élevées de  $\alpha$ , l'hexapode tend vers la limite de trois segments orthogonaux. Concernant les pentagones, la somme de Minkowski donne des pentagones réguliers aux arêtes arrondies de diamètre  $d$ . Il est facile de montrer que pour  $\alpha \lesssim 2,24$ , les particules n'ont pas de face. Pour des valeurs élevées de  $\alpha$ , deux faces opposées apparaissent et leur diamètre circonscrit augmente avec  $\alpha$ , ce qui conduit à des pentagones de plus en plus minces.

Nous pouvons également caractériser la forme par un paramètre de forme  $\eta$ , défini comme :

$$\eta = \frac{L}{L+d} = 1 - \frac{1}{\alpha}. \quad (5)$$

Il convient de noter que  $\eta$  varie de 0 pour une sphère à 1 pour un hexapode ou une plaque infiniment mince. La figure 2 illustre les formes des hexapodes et des pentagones pour des valeurs croissantes de  $\alpha$  et de  $\eta$ .

### 3.2 Compaction radiale

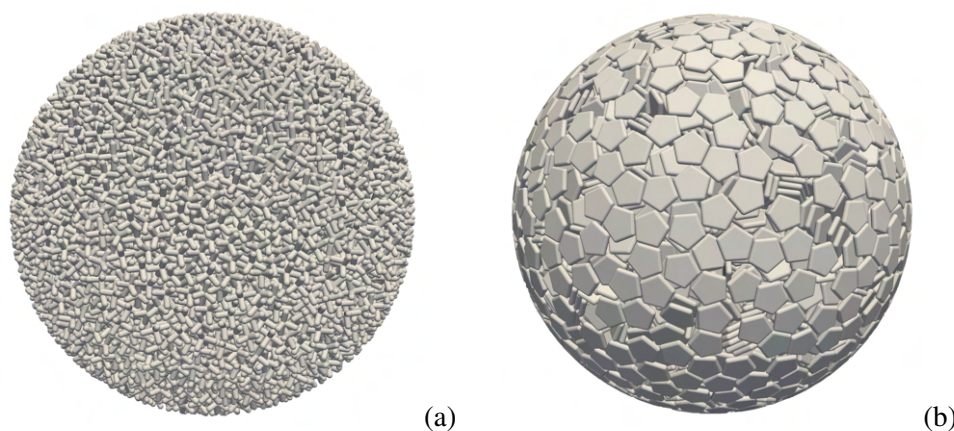


FIGURE 3 – État final de la compaction radiale des particules hexapodes ( $\alpha = 5$ ) (a) et des particules pentagonales ( $\alpha = 5$ ) (b).

Nous avons utilisé la compaction radiale pour construire des agrégats composés de  $N_p = 8385$  particules hexapodes et pentagonales, pour différentes valeurs de  $\alpha$  propres à chaque forme. Les particules

sont initialement placées aléatoirement, sans chevauchement, à l'intérieur d'une sphère dont le rayon  $R$  varie en fonction de la pression de confinement  $p$ , selon l'équation dynamique suivante :

$$\sum_i \vec{f}_i + p(4\pi R^2) = M \frac{d^2 R}{dt^2}, \quad (6)$$

où  $\vec{f}_i$  est la force exercée par la particule  $i$  sur la sphère, et  $M$  une masse fictive attribuée à celle-ci. Une petite vitesse aléatoire est initialement donnée aux particules afin qu'elles remplissent tout le volume de la sphère. Sous l'effet de la contraction induite par la pression  $p$ , les particules sont entraînées et poussées vers l'intérieur. Cette contraction ralentit progressivement en raison de la dissipation d'énergie par les contacts inélastiques, et tend asymptotiquement vers zéro jusqu'à ce que les particules soient complètement bloquées dans une configuration statique où  $\sum_i \vec{f}_i = -p(4\pi R^2)$ .

Nous arrêtons la simulation lorsque l'énergie cinétique des particules devient une faible fraction de l'énergie élastique totale stockée dans le réseau de contacts et que cette dernière ne varie plus. La figure 3 montre les états finaux de la compaction radiale des particules hexapodes et pentagonales pour  $\alpha = 5$  avec  $\mu = 0$ .

## 4 Empilements aléatoires denses

Nous nous intéressons maintenant aux états d'empilement aléatoire dense (RCP : *Random Close Packing*) des assemblages d'hexapodes et de pentagones obtenus par compaction radiale sans frottement. La spécificité de ces empilements est d'être isostatiques et de minimiser l'énergie configurationnelle  $pV$ , où  $V = 4\pi R^3/3$  représente le volume de l'agrégat [16]. Puisque  $p$  est constant, la compaction conduit au volume minimal ou, de manière équivalente, à la compacité  $\Phi$  la plus élevée pour chaque rapport d'aspect et chaque forme [17]. Nous présentons ensuite l'évaluation de la compacité ainsi que l'analyse des réseaux de contacts en fonction de la variation de la forme des particules.

### 4.1 Compacité

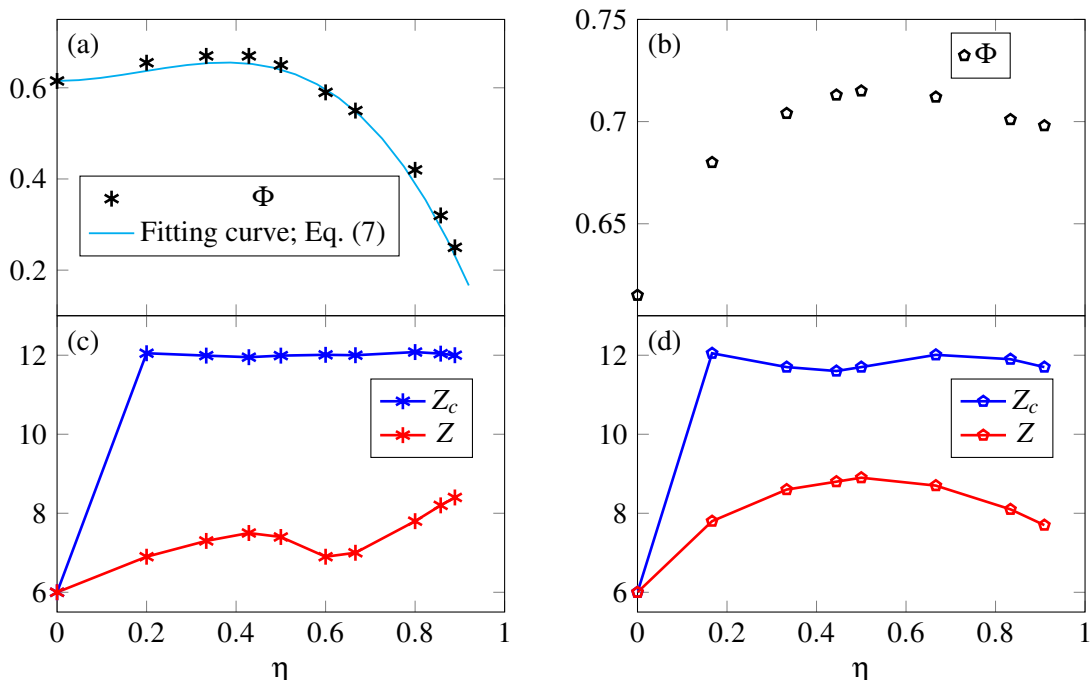


FIGURE 4 – La compacité  $\Phi$  pour les hexapodes (a) et les pentagones (b), ainsi que les nombres de coordination  $Z$  et  $Z_c$  pour les hexapodes (c) et les pentagones (d), en fonction de  $\eta$ .

La compacité  $\Phi$  est calculée en divisant le volume total  $V_p$  des particules par le volume total  $V$  de la sphère. La figure 4(a) montre  $\Phi$  en fonction du paramètre de forme  $\eta$  pour les hexapodes. Nous obser-

vons une évolution non monotone de la compacité avec  $\eta$ . Dans la limite  $\eta = 0$  (particules sphériques), nous avons  $\Phi = \Phi_0 \simeq 0,62$ . Cette valeur est légèrement inférieure à la compacité RCP connue pour des assemblages de sphères sans frottement ( $\simeq 0,635$ ) avec des conditions aux limites périodiques [18]. Cette différence s'explique par la réduction de la compacité près de la frontière interne de la sphère, due aux corrélations induites par la paroi dans les positions des particules. Lorsque  $\eta$  augmente à partir de zéro,  $\Phi$  croît au-dessus de  $\Phi_0$  et atteint des valeurs aussi élevées que 0,68 pour  $\eta = 0,33$ , correspondant à un rapport d'aspect  $\alpha = 1,5$ . Pour des rapports d'aspect plus élevés,  $\Phi$  diminue rapidement jusqu'à des valeurs aussi faibles que 0,25 pour  $\alpha = 9$ . Cette variation non monotone de  $\Phi$  en fonction de  $\eta$  a également été observée pour d'autres formes telles que les ellipses, les polygones, les particules allongées et les tripodes composés de disques et de sphères [20, 21, 19, 3, 22, 18].

Lorsque  $\eta$  augmente, la forme s'écarte de la sphère avec des zones de surface présentant des courbures supérieures ou inférieures à celle de la sphère. Dans le cas des hexapodes, ces zones présentent des courbures opposées : soit concaves (courbure négative), soit convexes (courbure positive). L'emboîtement entre courbures de signe opposé conduit à des vecteurs de branche plus courts (vecteurs reliant les centres des particules) et à une réduction locale de la porosité, tandis que les contacts entre courbures de même signe entraînent une porosité locale plus élevée en raison des exclusions mutuelles. Ainsi, pour  $\alpha \leq 2$ , l'emboîtement prédomine, tandis que pour  $\alpha > 2$ , les exclusions stériques entre des bras de plus en plus longs génèrent de larges pores et  $\Phi$  diminue en conséquence. Comme le montre la figure 4(a), la courbe de  $\Phi$  s'ajuste bien à une fonction polynomiale de degré 3 :

$$\Phi = \Phi_0 + a\eta^2 - b\eta^3, \quad (7)$$

avec  $a \simeq 0.85$  et  $b \simeq 1.5$ . Le terme positif  $a\eta^2$  représente un effet de surface lié à l'emboîtement entre hexapodes. Le terme négatif  $-b\eta^3$  représente un effet volumique lié aux exclusions stériques entre hexapodes. La valeur maximale de  $\Phi$  se produit pour  $\eta = 2a/3b$ .

La figure 4(b) présente la variation de  $\Phi$  en fonction de  $\eta$  pour les pentagones. Nous observons à nouveau une variation non monotone de la compacité par rapport à  $\eta$ . Lorsque  $\eta$  augmente à partir de zéro,  $\Phi$  dépasse  $\Phi_0$  et atteint des valeurs aussi élevées que 0,72 pour  $\eta = 0,5$ , correspondant à un rapport d'aspect  $\alpha = 2$ . Cependant, pour des rapports d'aspect plus élevés,  $\Phi$  diminue légèrement, atteignant la valeur de 0,69 pour  $\alpha = 11$ . Il convient de noter que pour toutes les valeurs de  $\alpha > 0$ , la compacité  $\Phi$  reste systématiquement supérieure à celle des particules sphériques.

Lorsque  $\eta$  augmente, comme pour les hexapodes, la forme des particules s'écarte de la sphère, ce qui entraîne des zones sur la surface dont la courbure dépasse ou est inférieure à celle d'une sphère. Dans le cas des plaquettes, ces zones présentent systématiquement des courbures positives (convexes). Pour des valeurs de  $\alpha \lesssim 2,24$  (lorsque les particules n'ont pas de face), la déviation par rapport à la sphère conduit à des vecteurs de branche plus courts et à une réduction localisée de la porosité. À l'inverse, pour  $\alpha > 2,24$ , la présence de faces entraîne une porosité locale plus élevée en raison des inclusions mutuelles. En effet, les pentagones plus fins peuvent s'aligner pour former des amas connectés par les faces, ce qui conduit à des pores plus grands et donc à une légère diminution de  $\Phi$ .

## 4.2 Connectivité des particules

Le paramètre d'ordre le plus simple pour caractériser la connectivité des particules est le nombre de coordination. Cependant, il peut exister plusieurs points de contact entre deux hexapodes ou deux pentagones. Nous distinguons donc le nombre de coordination classique  $Z$ , défini comme le nombre moyen de voisins en contact par particule (les particules voisines ayant au moins un contact avec une particule donnée), et le nombre de coordination de contact  $Z_c$ , défini comme le nombre moyen de contacts par particule. Alors que le nombre de contacts entre deux hexapodes est simple à déterminer, lorsqu'on considère deux plaquettes (particules pentagonales), différents types de contacts peuvent se produire : face-face, face-arête, face-sommet, arête-arête, arête-sommet et sommet-sommet. Les contacts face-face représentent trois contraintes géométriques correspondant à l'empêchement des rotations relatives entre deux particules. Ces contacts peuvent donc être modélisés comme trois contacts simples, et nous les désignons par "contacts triples". De la même manière, les contacts face-arête représentent deux contraintes et peuvent être décrits comme "contacts doubles". Tous les autres contacts sont des contacts simples.

Ainsi,  $Z_c$  est défini comme :

$$Z_c = \frac{2N_c}{N_p} = \frac{2(N_s + 2N_d + 3N_t)}{N_p}, \quad (8)$$

où  $N_s$ ,  $N_d$  et  $N_t$  désignent respectivement le nombre de contacts simples, doubles et triples, et  $N_c$  et  $N_p$  sont le nombre total de contacts et de particules.

La figure 4(c-d) montre  $Z_c$  et  $Z$  en fonction de  $\eta$  pour les hexapodes et les pentagones. L'état isostatique des assemblages, dû à l'absence de frottement entre particules, implique  $Z_c = 6$  pour des particules sphériques et  $Z_c = 12$  pour des hexapodes ou des pentagones dans la limite de particules parfaitement rigides [17]. Nous constatons que les valeurs simulées de  $Z_c$  sont très proches de leurs valeurs isostatiques pour les deux formes.

Pour les hexapodes, le nombre de coordination  $Z$  reste presque constant ( $\approx 7$ ) pour  $\alpha < 3$ , mais augmente jusqu'à  $\approx 8,5$  pour des valeurs plus élevées de  $\alpha$ . Cette augmentation est cohérente avec le nombre croissant de contacts entre hexapodes et leurs seconds voisins pour des rapports d'aspect élevés. Pour les pentagones, il est intéressant de noter que le nombre de coordination  $Z$  augmente avec  $\eta$  jusqu'à  $\eta = 0,5$  (plaquettes épaisses), puis diminue lorsque  $\eta$  continue d'augmenter (plaquettes fines) en raison de la présence d'interactions face-à-face.

## 5 Conclusions

Dans ce travail, nous avons exploré la modélisation discrète des particules non sphériques en mettant en évidence l'influence de la morphologie sur les propriétés des assemblages granulaires. Les résultats obtenus confirment que la forme des particules joue un rôle déterminant dans la compacité, la distribution des contacts et la structure interne des matériaux granulaires.

L'approche basée sur les  $R$ -shapes s'est révélée efficace pour surmonter les limitations des méthodes classiques. En générant des géométries lisses à partir de polyèdres, elle simplifie la détection des contacts, améliore la robustesse numérique et conserve la complexité géométrique nécessaire pour reproduire les effets de forme. Les simulations de compaction radiale réalisées sur des particules hexapodes et pentagonales illustrent clairement la sensibilité des états d'assemblage à la variation de la forme.

## Références

- [1] R. C. Hidalgo, I. Zuriguel, D. Maza, and I. Pagonabarraga. Role of particle shape on the stress propagation in granular packings. *Physical Review Letters*, 103 :118001, 2009.
- [2] A. G. Athanassiadis, M. Z. Miskin, P. Kaplan, N. Rodenberg, S. H. Lee, J. Merritt, E. Brown, J. Amend, H. Lipson, and H. M. Jaeger. Particle shape effects on the stress response of granular packings. *Soft Matter*, 10 :48–59, 2014.
- [3] M. Boton, E. Azéma, N. Estrada, F. Radjai, and A. Lizcano. Quasistatic rheology and microstructural description of sheared granular materials composed of platy particles. *Physical Review E*, 87 :032206, 2013.
- [4] T.-D. Tran, S. Nezamabadi, J.-P. Bayle, L. Amarsid, and F. Radjai. Contact networks and force transmission in aggregates of hexapod-shaped particles. *Soft Matter*, 20 :3411–3424, 2024.
- [5] N. Estrada, E. Azéma, F. Radjai, and A. Taboada. Identification of rolling resistance as a shape parameter in sheared granular media. *Physical Review E*, 84 :011306, 2011.
- [6] J.-P. Latham, A. Munjiza, X. Garcia, J. Xiang, and R. Guises. Three-dimensional particle shape acquisition and use of shape library for dem and fem/dem simulation. *Minerals Engineering*, 21 :797–805, 2008.
- [7] J. R. Williams and A. P. Pentland. Superquadrics and modal dynamics for discrete elements in interactive design. *Engineering Computations*, 9 :115–127, 1992.
- [8] R. Kawamoto, E. Andò, G. Viggiani, and J. E. Andrade. Level set discrete element method for three-dimensional computations with triaxial case stud. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 91 :1–13, 2016.
- [9] V. Angelidakis, S. Nadimi, M. Otsubo, and S. Utili. CLUMP : a code library to generate universal multi-sphere particles. *SoftwareX*, 15 :100735, 2021.
- [10] R. Guises, J. Xiang, J.-P. Latham, and A. Munjiza. Granular packing : numerical simulation and the characterisation of the effect of particle shape. *Granular Matter*, 11 :281–292, 2009.

- [11] L. Pournin and T. M. Liebling. From spheres to spheropolyhedra : generalized distinct element methodology and algorithm analysis. In W. Cook, L. Lovasz, and J. Vygen, editors, *Research Trends in Combinatorial Optimization*, pages 347–363. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [12] V. Richefeu, G. Combe, L. Amarsid, R. Prat, J.-M. Vanson, S. Nezamabadi, P. Mutabaruka, J.-Y. Delenne, and F Radjai. Advanced strategies for discrete simulations with three-dimensional R-shapes in Rockable framework. *Computer Physics Communications*, Accepted, 2025.
- [13] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1) :47–65, 1979.
- [14] F. Radjai and F. Dubois. *Discrete-element modeling of granular materials*. Wiley-Iste, 2011.
- [15] M. P. Allen and D. J. Tildesley. *Computer Simulation of Liquids*. Oxford University Press, 2017.
- [16] I. Agnolin and J.-N. Roux. Internal states of model isotropic granular packings. I. Assembling process, geometry, and contact networks. *Physical Review E*, 76 :061302, 2007.
- [17] J.-N. Roux. Geometric origin of mechanical properties of granular materials. *Physical Review E*, 61 :6802, 2000.
- [18] P. Mutabaruka, M. Taiebat, R. J.-M. Pellenq, and F. Radjai. Effects of size polydispersity on random close-packed configurations of spherical particles. *Physical review E*, 100 :042906, 2019.
- [19] W. Xu, H. Chen, and Z. Lv. A 2D elliptical model of random packing for aggregates in concrete. *Journal of Wuhan University of Technology-Mater. Sci. Ed.*, 25 :717–720, 2010.
- [20] E. Azéma and F. Radjai. Stress-strain behavior and geometrical properties of packings of elongated particles. *Physical Review E*, 81 :051304, 2010.
- [21] B. Saint-Cyr, J.-Y. Delenne, C. Voivret, F. Radjai, and P. Sornay. Rheology of granular materials composed of nonconvex particles. *Physical Review E*, 84 :041302, 2011.
- [22] D.-H. Nguyen, E. Azéma, F. Radjai, and P. Sornay. Effect of size polydispersity versus particle shape in dense granular media. *Physical Review E*, 90 :012202, 2014.