

# Traitement de l'adhérence par multiplicateurs de Lagrange en dynamique explicite sur base modale

D. Gaillard<sup>1</sup>, B. Prabel<sup>1</sup>, L. Prevost<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université Paris-Saclay, CEA, Service d'Études Mécaniques et Thermiques, 91191 Gif-sur-Yvette, France  
diane.gaillard@cea.fr, benoit.prabel@cea.fr, lucas.prevost@cea.fr

**Résumé** — Une modélisation précise du frottement est essentielle à la prédictivité de l'usure des structures en contact, notamment en ce qui concerne les transitions glissement/adhérence. Aussi, dans ce travail, nous proposons de traiter le comportement tangentiel par des multiplicateurs de Lagrange appliqué à un système dynamique décrit sur base modale en utilisant un intégrateur explicite. Le problème linéaire de complémentarité issu des multiplicateurs est résolu soit par l'Active Set Method, soit par un Gauss-Seidel projeté qui s'est montré plus performant dans les configurations plus complexes.

**Mots clés** — vibrations non-linéaires, Loi de Coulomb, Active Set Method, Gauss-Seidel avec projection, méthode de pénalité, Différences centrées

## 1 Introduction

### 1.1 Contexte

Dans le secteur industriel, des structures critiques sont fréquemment sujettes à l'usure susceptible d'engendrer d'importants coûts de réparation. Afin de prévenir ce genre de risques, prédire le comportement dynamique de ces systèmes est essentiel pour anticiper et limiter les effets de ce phénomène. Dans les réacteurs à eau pressurisée (REP) des centrales nucléaires, l'usure des tubes de générateurs est en grande partie causée par des vibrations intenses provoquées par la turbulence des écoulements fluides environnants. Sous l'effet de ces vibrations, un grand nombre d'impacts se produisent au sein du système, conduisant à une dégradation due aux contacts avec frottement. Comme tous ces contacts introduisent de fortes non-linéarités et des comportements non-lisses du système, il est essentiel d'adopter un schéma d'intégration adapté et une modélisation capable de capturer avec précision les transitions entre les phases de glissement et d'adhérence lors du contact.

Historiquement, dans le domaine nucléaire, le problème de contact dans les analyses vibratoires était traité avec une *méthode de pénalité* [11, 3] dans les directions normale et tangentielle. Ici, nous proposons une résolution mixte avec un découplage du traitement de contact dans les deux directions. En effet, la partie normale est résolue avec la même méthode de pénalité [3], et le problème dans la direction tangentielle est traité avec les *multiplicateurs de Lagrange* [6]. Le problème complémentaire linéaire issu de la formulation avec les multiplicateurs de Lagrange est résolu de deux manières différentes : l'*Active Set Method* [9] et un *Gauss-Seidel projeté* [8, 6] suivant la loi de Coulomb. L'intégration temporelle est effectuée avec un schéma explicite d'ordre 2, les différences centrées, assurant ainsi une facilité d'implémentation et une convergence plus rapide [6].

Par ailleurs, dans le contexte des vibrations non-linéaires de ces tubes, une résolution sur base réduite est privilégiée. En particulier, l'analyse modale est largement utilisée en raison de sa bonne interprétation physique et de son faible coût de calcul. La résolution temporelle est donc réalisée sur les degrés de liberté modaux.

### 1.2 Etat de l'art

Udwadia et Kabala [13] puis Moreau [10] et Jean [7] se sont penchés sur les systèmes contraints et le cadre de la dynamique du contact non-lisse posant ainsi les fondations pour des développements variés. Parallèlement, des méthodes mathématiques d'optimisation sous contraintes ont été appliquées

aux problèmes de contact. Parmi elles, les méthodes de pénalités, les multiplicateurs de Lagrange et les Lagrangiens Augmentés permettent de résoudre efficacement ce type de problèmes.

Les méthodes de pénalités [11, 3] sont les plus efficaces de par leur simplicité et les taux de rapidité de convergence relativement élevée. Cependant, leur performance et leur précision sont très sensibles au choix des paramètres de pénalités définis par l'utilisateur au lancement de la simulation. Elle a tout de même été choisie dans la direction normale comme stratégie de détection du contact. En effet, ce choix est motivé par la bonne interprétation physique de la raideur normale de choc. Dans le cas d'un tube à section circulaire modélisé par des éléments finis de poutre, elle est associée à la raideur d'ovalisation qui mesure sa résistance à se déformer sous une charge radiale.

Quant aux multiplicateurs de Lagrange [6], ils permettent de résoudre le contact de manière exacte, contrairement aux méthodes de pénalité qui approximent la solution. En revanche, ils nécessitent l'introduction d'une inconnue supplémentaire, dont la détermination requiert la résolution d'un problème spécifique, appelé *problème linéaire de complémentarité* [4, 1]. Cependant, de bons résultats de convergence et de précision sont observés avec une résolution temporelle explicite [6]. C'est pour cette raison que notre choix s'est porté sur cette méthode pour la résolution du contact dans la direction tangentielle, avec l'application de la loi de Coulomb.

Par ailleurs, d'autres méthodes ont été considérées pour la résolution du problème de contact mais ces pistes ont été écartées au profit des méthodes citées ci-dessus. Parmi elles, les multiplicateurs de Lagrange augmentés [2, 12, 5] ont été investigués mais la résolution est plus complexe que les multiplicateurs de Lagrange, avec une convergence plus lente. Concernant le Moreau-Jean [10, 7], il nécessite une intégration temporelle implicite, or nous tenions à conserver une méthode explicite. Aussi, ce schéma a tendance à ne pas conserver exactement l'énergie [1].

Il est important de souligner que les travaux de la littérature traitent majoritairement d'applications reposant sur la méthode des éléments finis, tandis que le présent travail s'attache à une formulation basée sur une approche modale.

## 2 Modèle de contact

Considérons un système dynamique non contraint avec  $n$  degrés de liberté et le vecteur des déplacements  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$  tels que :

$$\begin{cases} \mathcal{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathcal{K}\mathbf{u}(t) = \mathcal{F}_{\text{ext}}(t) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \\ \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \quad (1)$$

avec :

- $\mathcal{M}$  la matrice de masse de taille  $n \times n$  supposée symétrique définie positive,
- $C$  la matrice d'amortissement,
- $\mathcal{K}$  la matrice de rigidité,
- $\mathcal{F}_{\text{ext}}(t)$  les efforts extérieurs appliqués au système,
- $\mathbf{u}_0$  and  $\mathbf{v}_0$  le déplacement et la vitesse initiaux, supposés connus.

Le comportement d'un système dynamique contraint est régi par un système de deux équations [13]. En effet, en plus de la première équation du mouvement, une équation contenant les contraintes et l'accélération de choc imposée à l'impact  $\gamma_{\text{imp}}$  est introduite. Les contraintes sont incluses dans une matrice rectangulaire  $\mathcal{L}$  de taille  $m \times n$ , où  $m$  est le nombre des contraintes. Aussi, la force de contact  $\mathcal{R}$  est ajoutée au membre de droite de l'équation du système non contraint (1) représentant les réactions non-linéaires induites par le contact. Ces équations sont :

$$\begin{cases} \mathcal{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathcal{K}\mathbf{u}(t) & = \mathcal{F}_{\text{ext}}(t) + \mathcal{R}(t) \\ \mathcal{L}\ddot{\mathbf{u}} & = \gamma_{\text{imp}} \end{cases} \quad (2)$$

où  $\gamma_{\text{imp}}$  prend la forme suivante lorsque l'on applique une discrétisation explicite d'ordre 2 :

$$\gamma_{\text{imp}} = \frac{2}{\Delta t}(\mathbf{v}_{\text{imp}} - \mathcal{L}\dot{\mathbf{u}})$$

La réaction  $\mathcal{R}$  peut être considérée comme la somme d'une composante normale et d'une composante tangentielle :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_N + \mathcal{R}_T$$

dont les valeurs pour chaque contact seront notées  $R_N$  et  $R_T$  par la suite.

## 2.1 Direction normale

Comme susmentionné, le contact est résolu dans la direction normale avec une méthode de pénalité [3] :

$$R_N = \begin{cases} 0 & \text{si } |u_N - g_N| \leq 0 \quad (\text{pas de contact}) \\ -K_N(u_N - g_N) & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $K_N$  une raideur de contact équivalente, qui est un paramètre de pénalité, le jeu normal  $g_N$  et le déplacement normal au contact  $u_N$ .

Cette loi assure la satisfaction des conditions de Signorini régissant le contact unilatéral normal [14] :

$$\begin{cases} g_N \geq 0 \\ R_N \leq 0 \\ R_N g_N = 0 \end{cases}$$

## 2.2 Direction tangentielle

Dans la direction tangentielle, deux configurations doivent être considérées : l'adhérence et le glissement. La transition entre ces deux phases est définie par la loi de Coulomb :

$$\begin{cases} R_T = -\mu_d |R_N| \text{sign}(v_T), & \text{si } |v_T| \neq 0 \quad (\text{glissement}) \\ |R_T| < \mu_s |R_N|, & \text{si } |v_T| = 0 \quad (\text{adhérence}) \end{cases} \quad (3)$$

avec  $\mu_s$  et  $\mu_d$  respectivement les coefficients de friction statique et dynamique, et  $v_T$  la vitesse tangentielle relative.

Concernant le traitement de l'adhérence, deux méthodes sont étudiées : la méthode de pénalité et les multiplicateurs de Lagrange.

### 2.2.1 Méthode de pénalité

Dans le cadre de la méthode de pénalité, la réaction tangentielle en cas d'adhérence est définie par [3] :

$$R_T = -K_T(u_T - u_{T_0}) - C_T v_T$$

avec  $u_T$  et  $u_{T_0}$  les valeurs respectives actuelle et d'adhérence du déplacement tangentiel.

Dans cette équation, deux nouveaux paramètres de pénalités ont été introduits : la raideur tangentielle  $K_T$  et l'amortissement tangentiel  $C_T$  afin de prendre en compte les déformations locales et les micro-déplacements durant l'adhérence. Ces déplacements résultent de déformations localement élastiques et inélastiques et des aspérités entre les deux corps en contact. Contrairement à la raideur de contact normal, ces paramètres n'ont, à ce jour, pas été identifiés comme des grandeurs physiques, et sont donc considérés comme des paramètres numériques.

En somme, la force tangentielle pour chaque contact est définie par :

$$R_T = \begin{cases} 0 & \text{si } R_N = 0 \quad (\text{pas de contact}) \\ -K_T(u_T - u_{T_0}) - C_T v_T & \text{si } R_N < 0 \quad \text{et} \quad |R_T| \leq \mu_s |R_N| \quad (\text{adhérence}) \\ -\mu_d |R_N| \text{sign}(v_T) & \text{si } R_N < 0 \quad \text{et} \quad |R_T| > \mu_s |R_N| \quad (\text{glissement}) \end{cases}$$

### 2.2.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Ici, les réactions sont exprimées avec les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_T$  et la matrice  $\mathcal{L}$  contenant les contraintes du système :

$$\mathcal{R}_T = -\mathcal{L}^T \lambda_T \quad (4)$$

Ainsi le contact est géré par les multiplicateurs de Lagrange en cas d'adhérence et par la loi de Coulomb en cas de glissement :

$$\mathcal{R}_T = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{R}_N = 0 \quad (\text{pas de contact}) \\ -\mathcal{L}^T \lambda_T & \text{si } \mathcal{R}_N < 0 \quad \text{et} \quad |\mathcal{L}^T \lambda_T| \leq \mu_s |\mathcal{R}_N| \quad (\text{adhérence}) \\ -\mu_d |\mathcal{R}_N| \text{sign}(\mathbf{v}_T) & \text{si } \mathcal{R}_N < 0 \quad \text{et} \quad |\mathcal{L}^T \lambda_T| > \mu_s |\mathcal{R}_N| \quad (\text{glissement}) \end{cases} \quad (5)$$

En isolant  $\ddot{\mathbf{u}}$  dans les deux équations du système (2) et en introduisant l'opérateur de Delassus :

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{L}^T \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = \mathcal{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{C} \quad (6)$$

on obtient le problème linéaire de complémentarité :

$$\mathcal{H} \lambda_T = (\mathcal{L} \ddot{\mathbf{u}}_{\text{free}} - \gamma_{\text{imp}}) \quad (7)$$

où l'accélération libre est définie par :

$$\ddot{\mathbf{u}}_{\text{free}} = \mathcal{A}^{-1} (\mathcal{F}_{\text{ext}} - \mathcal{K} \mathbf{u} - \mathcal{C} \dot{\mathbf{u}})$$

## 3 Algorithme de résolution

Le modèle de contact présenté précédemment a été implémenté dans un code C avec une API Python : DYN2 [15]. Une partie de ce code gère l'intégration temporelle, tandis qu'une autre traite le problème de contact.

### 3.1 Algorithme temporel

L'algorithme temporel utilisé est celui des différences centrées qui est un schéma explicite d'ordre 2. Le calcul étant réalisé sur base réduite, la résolution du problème temporel s'effectue sur base modale. Cependant, le problème de contact est traité sur base physique, de la phase de détection aux calculs des réactions de contact. Cela nécessite donc une recombinaison des déplacements sur base physique afin de calculer les réactions, puis une projection des réactions sur base modale pour corriger et mettre à jour les degrés de liberté modaux.

La recombinaison est définie par :

$$\mathbf{u} = \phi \mathbf{q}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \phi \dot{\mathbf{q}}, \quad \ddot{\mathbf{u}} = \phi \ddot{\mathbf{q}}$$

avec  $\phi$  la matrice des déformées modales. Sur base modale, les réactions normales  $\mathcal{R}_N^{\text{proj}}$  et tangentiels  $\mathcal{R}_T^{\text{proj}}$  sont respectivement définies par :

$$\mathcal{R}_N^{\text{proj}} = \phi^T \mathcal{R}_N \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_T^{\text{proj}} = \phi^T \mathcal{R}_T$$

### 3.2 Résolution du problème de contact

#### 3.2.1 Résolution par pénalité

Pour la résolution du contact par pénalité, nous considérons le statut de chaque contact qui est une variable d'état du contact (glissant ou adhérent). Cette variable indique la façon de calculer la force de contact au moyen de tests élémentaires effectués sur les vitesses tangentiels et les forces. Le passage de

l'adhérence au glissement se produit lorsque la force tangentielle dépasse la limite imposée par le cône de Coulomb (3), tandis que la transition inverse, du glissement vers l'adhérence, se produit lorsque la vitesse tangentielle change de signe (voir Algorithme 1).

---

**Algorithm 1** Méthode de pénalité appliquée au problème tangent pour chaque contact [3]

---

```

1: if glissant à  $t^n$  then
2:   if  $v_T^n \cdot v_T^{n+1} > 0$  then
3:     glissant :  $R_T^{n+1} = -\mu_d |R_N^{n+1}| \text{sign}(v_T^{n+1})$ 
4:   else
5:     adhérent :  $R_T^{n+1} = -K_T(u_T^{n+1} - u_{T_0}^{n+1}) - C_T v_T^{n+1}$ 
6:   end if
7: else
8:   Aller à adhérent
9:   Vérification de l'hypothèse d'adhérence :
10:  if  $|R_T^{n+1}| > \mu_s |R_N^{n+1}|$  then
11:    Aller à glissant
12:  end if
13: end if

```

---

### 3.2.2 Résolution par les multiplicateurs de Lagrange

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à deux méthodes de résolution du système linéaire (7) issu de la formulation avec les multiplicateurs : l'Active Set Method et le Gauss-Seidel projeté. Les deux méthodes sont itératives, mais les itérations ne sont pas effectuées sur les mêmes grandeurs.

Effectivement, dans le premier cas, les itérations sont faites sur les statuts des contacts. Le statut est estimé une première fois grâce aux réactions calculées au pas de temps précédents, et les vitesses tangentielles relatives du début du pas de temps  $v_T^{n+\frac{1}{2}}$ , qui seront corrigées par la suite. Ensuite, le système (7) est résolu de manière directe avec une inversion de l'opérateur de Delassus (6), uniquement pour les contacts en adhérence. Les multiplicateurs obtenus sont utilisés dans les calculs des réactions (5). Les réactions des contacts en glissement sont quant à elles projetées sur le cône de Coulomb. Enfin, les statuts sont mis à jour. Le calcul est considéré convergé quand les statuts ne changent plus d'une itération à l'autre (voir Algorithme 2).

---

**Algorithm 2** Active Set method appliquée au problème tangent [3]

---

```

1: while statuts à  $t^{n+1} \neq$  statuts à  $t^n$  do
2:   for chaque contact do
3:     Estimation du statut à partir de  $R_T^n$ ,  $R_N^n$  et  $v_T^{n+\frac{1}{2}}$ 
4:   end for
5:   for chaque contact glissant à  $t^{n+1}$  do
6:     projection :  $R_T^{n+1} = -\mu_d |R_N^{n+1}| \text{sign}(v_T^{n+1})$ 
7:   end for
8:   Résolution du problème linéaire de complémentarité sur tous les contacts adhérents :

```

$$\lambda_T^{n+1} = \left( \mathcal{H}^{n+1} \right)^{-1} \left( \mathcal{L}^{n+1} \ddot{\mathbf{u}}_{\text{free}}^{n+1} - \gamma_{\text{imp}}^{n+1} \right)$$

```

9:   Mise à jour des statuts
10: end while

```

---

Le Gauss-Seidel est une méthode itérative de résolution de système linéaire. Ici, l'itération est faite sur les multiplicateurs qui sont projetés directement au cours de celles-ci, au lieu d'employer une méthode de résolution directe du système (voir Algorithme 3). Dans ce cas, le système (7) contient les contacts actifs, ie. tous les contacts pour lesquels  $g_N \leq 0$ . Une fois le Gauss-Seidel convergé, les réactions sont calculées (4). Dans cette formulation, les statuts ne jouent aucun rôle dans le calcul des réactions.

---

**Algorithm 3** Gauss-Seidel projeté pour le problème tangentiel [6]

---

1: Décomposition LU de l'opérateur de Delassus projeté  $\mathcal{H} = \mathbf{L}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{L}^T$  :

$$\mathcal{H}_L = \mathcal{H}_{ij}, j < i \quad \text{and} \quad \mathcal{H}_U = \mathcal{H}_{ij}, j > i$$

2: **while**  $|\lambda^{k+1} - \lambda^k| < tol$  **do**

3:   **for**  $i < m$  **do**

4:      $\lambda_i^{k+1} = \frac{1}{\mathcal{H}_{ii}} \left( \mathbf{L}\ddot{\mathbf{q}}_{\text{free}}^{n+1} - \gamma_{\text{imp}}^{n+1} - \mathcal{H}_U \lambda^k - \mathcal{H}_L \lambda^{k+1} \right)_i$

5:     **if**  $|\lambda_i^{k+1}| > \mu_s |R_N^{n+1}|$  **then**

6:       projection :  $\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^{k+1} \frac{\mu_d |R_N^{n+1}|}{|\lambda_i^{k+1}|}$

7:     **end if**

8:   **end for**

9:    $k = k + 1$

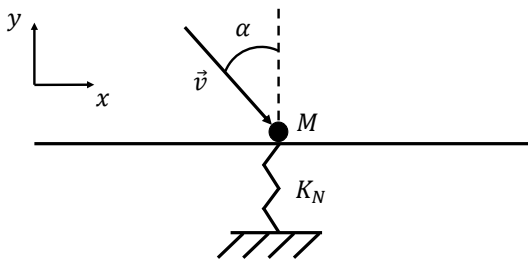
10: **end while**

11: Calcul des réactions :  $\mathcal{R}_T = -\mathcal{L}^T \lambda_T$

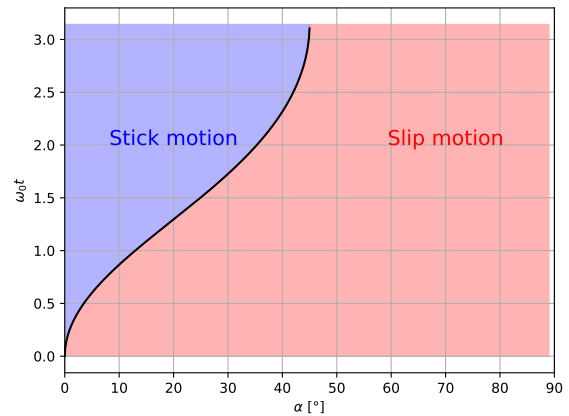
---

## 4 Vérification numérique

Afin de valider ces implémentations, nous nous intéressons au cas d'une masse ponctuelle tombant obliquement avec un angle d'incidence  $\alpha$  sur un plan fixe. La masse n'est soumise à aucun effort extérieur et le choc est supposé purement élastique, autrement dit, il n'y a aucune dissipation dans la direction normale. La Figure 1a montre la configuration du problème. L'objectif de cet exemple est de tester les capacités de ces algorithmes à capturer les transitions entre les phases de glissement et d'adhérence. Afin d'évaluer l'influence du choix des paramètres de pénalité, la méthode de pénalité a été testée avec différentes valeurs de raideur tangentielle  $K_T$  à  $C_T$  fixé. Afin de tester et comparer au mieux les différents modèles, deux configurations ont été testées. La première avec un angle d'incidence  $\alpha = 20^\circ$  et la seconde avec un angle très faible  $\alpha = 10^{-7}^\circ$ .



(a) Schéma du problème.

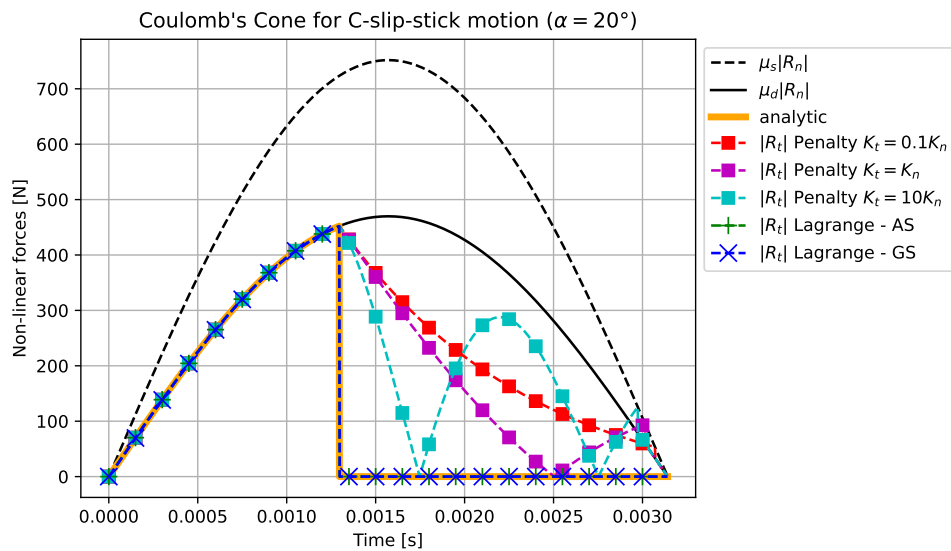


(b) Transition entre glissement et adhérence en fonction de l'angle  $\alpha$ .

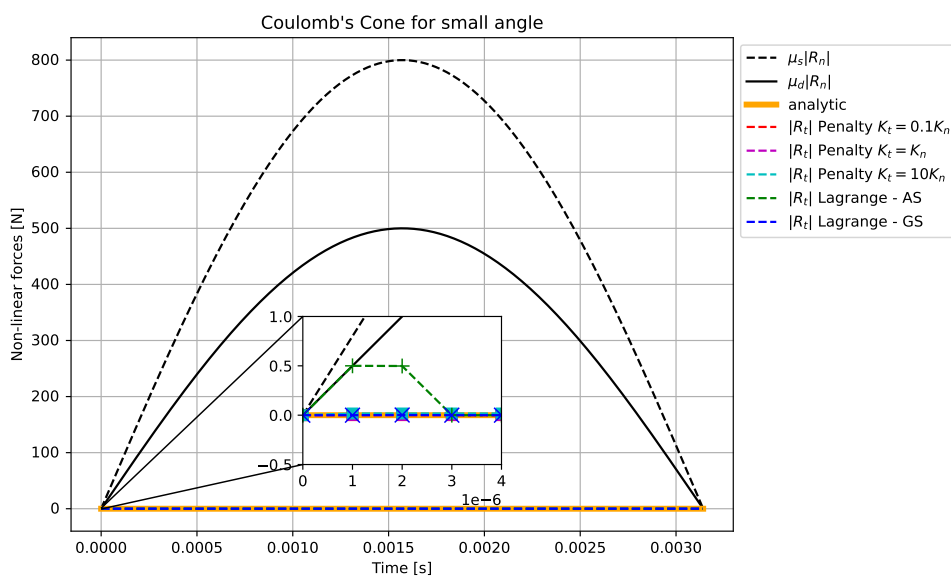
FIGURE 1 – Cas analytique de vérification numérique.

Dans le premier cas, la masse glisse immédiatement après l'impact, puis, après avoir dissipé suffisamment d'énergie, elle adhère au plan avant de rebondir et de se détacher à nouveau (voir Figure 1b). La Figure 2a présente l'évolution temporelle de la force de frottement durant la collision. La phase de glissement semble être bien capturée par l'ensemble des méthodes testées. En revanche, après la transition vers l'adhérence, seuls les multiplicateurs de Lagrange permettent de retrouver la solution analytique. De plus, les solutions du modèle de pénalité dépendent fortement de la valeur de  $K_T$  choisie.

Pour la seconde configuration, l'angle est choisi de telle sorte que la masse adhère au plan à un temps inférieur au pas de temps numérique choisi (ici  $\Delta t = 1.10^{-6}$  s). Autrement dit, on cherche à vérifier que les algorithmes détectent l'adhérence dès le premier pas de temps, malgré une vitesse tangentielle initiale non nulle. Comme la Figure 2b le montre, l'Active Set a une erreur sur deux pas de temps : la masse commence à glisser à  $\Delta t = 1.10^{-6}$  s, avant d'adhérer au plan à  $2\Delta t = 2.10^{-6}$  s, puis la force tangentielle devient nulle à partir de  $3\Delta t = 3.10^{-6}$  s. Concernant le Gauss-Seidel et la méthode de pénalité, la masse adhère tout le long de la collision. Dans le cas du Gauss-Seidel, ceci est dû au fait que les multiplicateurs soient directement projetés après leur estimation. Pour la méthode de pénalité, les tests sont effectués sur les grandeurs du pas de temps courant avec une vérification de l'hypothèse d'adhérence. Le décalage observé dans la détection de l'adhérence par la méthode Active Set s'explique par l'utilisation des efforts du pas de temps précédent pour les tests de statut.



(a)  $\alpha = 20^\circ$



(b)  $\alpha = 10^{-7^\circ}$

FIGURE 2 – Force de frottement pour différents angles d'incidence avec  $C_T = 2000$  kg/s.

## 5 Conclusions et Perspectives

Les multiplicateurs de Lagrange se sont révélés efficaces dans la détection de la transition entre les phases de glissement et d'adhérence pour un seul contact. De plus, contrairement à la méthode de pénalité, cette approche ne dépend pas de paramètres externes, renforçant ainsi sa robustesse. Néanmoins, le retard de la méthode Active Set dans la détection de transition de phase lors du contact peut engendrer des erreurs, notamment dans le calcul de la puissance d'usure. En revanche, la résolution du problème linéaire de complémentarité par le Gauss-Seidel projeté a prouvé sa robustesse même dans les configurations plus complexes, ce qui pourrait justifier son utilité malgré une résolution plus coûteuse sur tous les contacts actifs.

Dans la perspective d'une extension, la question de l'application de ces méthodes à des systèmes comportant plusieurs contacts, tels que les tubes de générateur de vapeur, mérite d'être examinée. Des difficultés de convergence ont toutefois été observées avec l'Active Set method. En effet, le critère de convergence étant uniquement basé sur les statuts, lorsqu'ils oscillent, les réactions oscillent également, empêchant toute stabilisation du calcul. Ce comportement peut être lié à une résolution trop abrupte du problème linéaire de complémentarité, phénomène d'ailleurs nettement moins observé avec une résolution par le Gauss-Seidel.

Par ailleurs, une autre perspective d'extension concerne la question de l'initialisation du Gauss-Seidel dans le cas de précontraintes. Effectivement, lorsque qu'un système est simultanément en contact en un même point avec deux plans, des contraintes redondantes apparaissent, rendant l'opérateur de Delassus non inversible. L'introduction d'un degré de liberté supplémentaire, prenant en compte la torsion par exemple, permettrait alors d'éliminer ces contraintes redondantes.

### Références

- [1] V. Acary, B. Brogliato *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems : Applications in Mechanics and Electronics*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [2] P. Alart, A. Curnier *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, p.353-375, 1991.
- [3] J. Antunes, F. Axisa, B. Beaufils, D. Guilbaud *Coulomb friction modelling in numerical simulations of vibration and wear work rate of multispan tube bundles*, Journal of Fluids and Structures, Éditeur, p.287-304, 1990.
- [4] D. P. Bertsekas *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Athena scientific optimization and computation series, Athena Scientific, 1996.
- [5] P. Bussetta, D. Marceau, J.P. Ponthot. *The adapted augmented Lagrangian method : a new method for the resolution of the mechanical frictional contact problem*, Computational Mechanics, p.259–275, 2012.
- [6] J. DiStasio *The CD-Lagrange scheme, a robust explicit time-integrator for impact dynamics : A new singular mass formulation, and an extension to deformable-deformable contact*, Phd. thesis, 2021.
- [7] M. Jean, R. *The non-smooth contact dynamics method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, p.235-257, 1999.
- [8] F. Jourdan, P. Alart, M. Jean, D. Guilbaud *A Gauss-Seidel like algorithm to solve frictional contact problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, p.31-47, 1998.
- [9] D. Luenberger, Y. Ye *Linear and Nonlinear Programming*, American Journal of Agricultural Economics, Springer US, 2008.
- [10] J. J. Moreau *Numerical aspects of the sweeping process*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, p.329-349, 1999.
- [11] J.T. Oden, J.A.C. Martins *Models and computational methods for dynamic friction phenomena*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, p.527-634, 1985.
- [12] J.C. Simo, T.A. Laursen. *An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction*, Computers & Structures, p.97–116, 1992.
- [13] F Udawadia, R. Kalaba *A New Perspective on Constrained Motion*, Proceedings of The Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, p.407-410, 1992.
- [14] P. Wriggers, P. Panatitopoulos *New Developments in Contact Problems*, Springer Vienna, 1999.
- [15] DYN2, Dépôt GitLab. URL : <https://gitlab.com/BP208322/dyn2>