

Flambement de structures minces avec forces conservatives et non conservatives par la méthode asymptotique numérique.

Y. Guevel¹, M. Bogey^{1,3}, C. Combescure^{1,2}, G. Girault¹ and J.-M. Cadou¹

¹ IRDL (UMR6027, Univ. Bretagne Sud), Lorient, {yann.guevel, gregory.girault, jean-marc.cadou}@univ-ubs.fr

² Académie militaire de Saint-Cyr Coëtquidan, CReC, Guer, France, c.combescure@st-cyr.terre-net.defense.gouv.fr

³ Naval Group, CESMAN / ERD, Bouguenais, maxence.bogey@naval-group.com

Résumé — Nous proposons une analyse de bifurcation d'un panneau cylindrique sous pression homogène conservative et non conservative. La méthode asymptotique numérique est utilisée pour résoudre le problème non linéaire obtenu. La détection des bifurcations simples utilise l'analyse de série MAN. La continuation et le branchement sont adaptés à ce cas de chargement.

Mots clés — structure mince, flambement, méthode asymptotique numérique, analyse de bifurcation

1 Introduction

Nous présentons des travaux qui portent sur l'application de la méthode asymptotique numérique (MAN) dans un contexte de mécanique du solide pour un matériau homogène élastique soumis à une pression homogène.

Rappelons que la continuation MAN pour la pression suivieuse a été récemment proposée dans [9]. Nous proposons dans ce travail de détecter les singularités plus efficacement par analyse de séries [5] et également de calculer les branches solutions post-bifurcation en utilisant une méthode de branchement en un point de bifurcation simple. Il s'agit de mettre en application la méthode de branchement développée dans [2], et adaptée dans les travaux [6, 8], pour le cas d'un chargement de type pression non conservative.

En tant qu'étude préliminaire, nous étudierons le cas d'un panneau cylindrique soumis à une pression homogène en sa face supérieure.

2 Méthodes numériques

Le problème d'élasticité linéaire pour un matériau homogène est formulé dans un contexte d'éléments finis coques tels que présenté dans [10]. Ce problème est formulé en déplacement. La contrainte et la déformation sont alors des variables auxiliaires déduites de ce dernier.

2.1 Continuation MAN avec une force sous forme de série $\mathbf{F}(a)$

Les travaux [4, 10, 2] permettent d'écrire les équations d'équilibre d'une coque élastique en grands déplacements sous la forme suivante :

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F} \quad (1)$$

avec $\mathbf{U} = \{\mathbf{u} \ \boldsymbol{\sigma}\}^\top$, \mathbf{u} le déplacement, $\boldsymbol{\sigma}$ la contrainte, λ l'intensité de la force \mathbf{F} appliquée, \mathbf{L} un opérateur linéaire et \mathbf{Q} un opérateur non linéaire quadratique. Cette forme quadratique des équations d'équilibre est bien adaptée à la MAN [3, 4].

Ce problème est résolu en utilisant une technique de continuation par longueur d'arc. La paramétrisation utilisée est détaillée dans [3] :

$$a = \langle \mathbf{u}(a) - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \rangle + (\lambda(a) - \lambda_0) \lambda_1 \quad (2)$$

Étant donnée une solution régulière $\mathbf{X}_0 = \{\mathbf{U}_0 \ \lambda_0 \ \mathbf{F}_0\}^\top$, les inconnues du problème, soit $\mathbf{X} = \{\mathbf{U} \ \lambda \ \mathbf{F}\}^\top$, sont alors cherchées sous la forme d'une expansion polynomiale tronquée à l'ordre N en utilisant a comme paramètre d'expansion :

$$\mathbf{X}(a) = \mathbf{X}_0 + \sum_{k=1}^N a^k \mathbf{X}_k \quad (3)$$

Cette forme est injectée dans l'ensemble des équations du problème Eq.(1) et Eq.(2). Puis en regroupant par puissance du paramètre d'expansion, on obtient une séquence de problèmes linéaires à résoudre.

Au premier ordre en puissance de a nous avons :

$$\mathbf{L}_t^0(\mathbf{U}_1) = \lambda_1 \mathbf{F}_0 + \lambda_0 \mathbf{F}_1 \quad (4a)$$

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle + \lambda_1^2 = 1 \quad (4b)$$

et pour les ordres suivant, a^k avec $k \in [2, N]$, nous obtenons :

$$\mathbf{L}_t^0(\mathbf{U}_k) = \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{F}_{k-i} - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{Q}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{k-i}) \quad (5a)$$

$$\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1 \rangle + \lambda_k \lambda_1 = 0 \quad (5b)$$

avec un opérateur tangent identique à chaque ordre qui s'écrit :

$$\mathbf{L}_t^0(\bullet) = \mathbf{L}(\bullet) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}_0, \bullet) + \mathbf{Q}(\bullet, \mathbf{U}_0) \quad (6)$$

Le domaine de validité $[0, a_{max}]$ de la représentation polynomiale vue en Eq.(3) est obtenu comme dans [4] avec la relation :

$$a_{max} = \left(\eta \frac{\|\mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{u}_N\|} \right)^{1/(N-1)} \quad (7)$$

η étant un paramètre de tolérance à définir. Un nouveau point solution régulier $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(a_{max})$ est alors évalué. Un nouveau pas de continuation peut alors être effectué si nécessaire. Enfin notons que les branches solutions obtenues sont continues par morceaux.

Nous rappelons que le cas d'un chargement conservatif de type pression morte est obtenu en considérant le chargement constant $\mathbf{F}(a) = \mathbf{F}_0$.

2.2 $\mathbf{F}(a)$ dans le cas d'une pression suivieuse

Nous cherchons à décrire le chargement de type pression suivieuse dans le cadre de la MAN. L'approche est identique à celle présentée dans [9, 1]. Une notation différente est adoptée dans ce problème afin d'introduire de manière plus explicite la méthode de calculs des branches post-bifurquées.

Pour cela, nous écrivons ce chargement au niveau élémentaire comme une fonction des tangentes dans l'élément de référence. Ces tangentes sont ensuite exprimées en fonction du déplacement nodal.

Cette pression est définie par l'expression suivante :

$$\mathbf{P} = \int_S -\kappa P_0 \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad (8)$$

avec \mathbf{n} la normale unitaire à la surface considérée, P_0 l'intensité de la pression appliquée et $\delta \mathbf{u}$ le déplacement virtuel. Cette pression est appliquée sur une surface externe " S_+ " avec $\kappa = +1$ ou interne " S_- " avec $\kappa = -1$. $\delta \mathbf{u}$ est lui-même adapté en fonction de κ .

Dans l'élément de référence, en considérant les coordonnées (ξ, η) , le vecteur normal \mathbf{n} s'écrit en fonction des vecteurs tangents :

$$\mathbf{n} dS = \mathbf{t}^\xi \wedge \mathbf{t}^\eta d\xi d\eta \quad (9)$$

L'équation Eq.(8) peut être exprimée de la manière suivante au niveau élémentaire :

$$\mathbf{P}^e = -\kappa P_0 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{t}^\xi \wedge \mathbf{t}^\eta) \cdot \delta \mathbf{u} d\xi d\eta \quad (10)$$

Les tangentes peuvent s'exprimer en fonction du déplacement :

$$\mathbf{t}^\alpha = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \alpha} = \frac{\partial (\mathbf{x} + \mathbf{u})}{\partial \alpha}, \alpha \in \{\xi, \eta\} \quad (11)$$

avec $\bar{\mathbf{x}}$ le déplacement dans la configuration déformée qui s'exprime en fonction de \mathbf{x} la position dans la configuration de référence et de \mathbf{u} le déplacement vers la configuration déformée. Or ce dernier est exprimé sous la forme d'une expansion polynomiale $\mathbf{u}(a)$ (voir Eq.(3)). Alors, l'équation Eq.(11) s'exprime comme une série :

$$\mathbf{t}^\alpha(a) = \frac{\partial(\mathbf{x} + \mathbf{u}(a))}{\partial\alpha} = \frac{\partial(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0 + \sum_{k=1}^N a^k \mathbf{u}_k)}{\partial\alpha} = \mathbf{t}_0^\alpha + \sum_{k=1}^N a^k \mathbf{t}_k^\alpha + \dots, \alpha \in \{\xi, \eta\} \quad (12)$$

avec :

$$\mathbf{t}_0^\alpha = \frac{\partial(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0)}{\partial\alpha}, \alpha \in \{\xi, \eta\} \quad (13a)$$

$$\mathbf{t}_k^\alpha = \frac{\partial\mathbf{u}_k}{\partial\alpha}, \alpha \in \{\xi, \eta\} \quad (13b)$$

Nous proposons d'écrire la pression élémentaire Eq.(10) comme un opérateur quadratique élémentaire qui dépend de ces termes de séries. Par exemple pour deux vecteurs tangents quelconques \mathbf{t}_a et \mathbf{t}_b , et les déplacements correspondant \mathbf{u}_a et \mathbf{u}_b nous avons :

$$\langle \mathbf{Q}_F^e(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b), \delta\mathbf{u} \rangle = -\kappa P_0 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{t}_a^{e\xi} \wedge \mathbf{t}_b^{e\eta}) \cdot \delta\mathbf{u} d\xi d\eta \quad (14)$$

L'opérateur quadratique noté \mathbf{Q}_F est alors obtenu par assemblage sur l'ensemble des éléments :

$$\mathbf{Q}_F(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b) = \sum^e \langle \mathbf{Q}_F^e(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b), \delta\mathbf{u} \rangle \quad (15)$$

Finalement, la pression surfacique est rapportée aux nœuds par le biais des déplacements. Les termes de série de ce chargement noté \mathbf{F} sont les suivants :

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{Q}_F(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0) \quad (16a)$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{Q}_F(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) + \mathbf{Q}_F(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0) \quad (16b)$$

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{Q}_F(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_k) + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{Q}_F(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{k-i}) + \mathbf{Q}_F(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_0) \quad (16c)$$

2.3 Continuation MAN dans le cas d'une pression suiveuse

Les équations Eq.(4a) et Eq.(5a) dépendent de trois inconnues. Nous les réécrivons dans le but de n'avoir plus que deux inconnues pour deux équations à résoudre à chaque ordre. Les expressions qui expriment les termes de séries \mathbf{F}_k en fonction des termes de déplacement \mathbf{u}_k vue en Eq.(16) sont utilisées dans ce but.

Ainsi, le terme $\lambda_0 \mathbf{F}_k$ contenu dans le second membre de Eq.(5a) s'exprime comme une partie en fonction de l'inconnue \mathbf{u}_k et de termes connus aux ordres inférieurs sous la forme :

$$\lambda_0 \mathbf{F}_k = -L_F^0 \mathbf{u}_k + \lambda_0 \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{Q}_F(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{k-i}) \quad (17)$$

avec la définition d'un nouvel opérateur linéaire :

$$L_F^0 \bullet = -\lambda_0 (\mathbf{Q}_F(\mathbf{u}_0, \bullet) + \mathbf{Q}_F(\bullet, \mathbf{u}_0)) \quad (18)$$

Ce dernier est non symétrique du fait du produit vectoriel des tangentes au niveau élémentaire pour la partie liée à la pression suiveuse. Cette notation permet d'écrire l'équation Eq.(4a) sous la forme :

$$L_{tF}^0(\mathbf{U}_1) = \lambda_1 \mathbf{F}_0 \quad (19)$$

avec la définition d'un nouvel opérateur tangent non symétrique commun à chaque ordre :

$$L_{tF}^0(\bullet) = L_t^0(\bullet) + L_F^0(\bullet) \quad (20)$$

Puis, l'équation Eq.(5a) est réorganisée de la manière suivante :

$$L_{tF}^0(\mathbf{U}_k) = \lambda_k \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \mathbf{F}_{k-i} + \lambda_0 \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{Q}_F(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{k-i}) - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{Q}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{k-i}) \quad (21)$$

Finalement, les équations Eq.(4a) et Eq.(5a) sont remplacées par respectivement Eq.(19) et Eq.(21). Les termes de séries des inconnues du problème sont calculés avec cette reformulation des équations d'équilibre. La procédure MAN reste identique à celle présentée en section 2.1.

2.4 Détection de bifurcation et branchement

Lors de la continuation d'une branche solution, plusieurs méthodes de détection de bifurcation existent dans le cadre de la MAN tel que l'indicateur de bifurcation utilisé dans [2, 9] ou encore l'analyse de série proposée dans [5].

Dans notre étude, nous utilisons l'analyse de série MAN telle que proposée dans [5]. Ces travaux indiquent qu'à l'approche d'une bifurcation simple, les séries MAN sont une combinaison linéaire de deux séries (voir Fig.(1)). L'une de ces séries porte la signature de la singularité à venir sous la forme d'une progression géométrique. Sa raison est l'inverse de la distance entre le point singulier et le point de départ du pas MAN en cours. Le terme constant de cette série géométrique est utilisé dans la procédure de changement de branche au point singulier. L'autre série ne comprend pas le défaut associé à la singularité détectée. Cette série découplée de la progression géométrique, dénommée « série sans défaut » ou « série nettoyée », peut être utilisée pour évaluer la solution singulière. De plus, la dérivée de cette série évaluée au point critique est la tangente de la branche en cours de continuation en ce point.

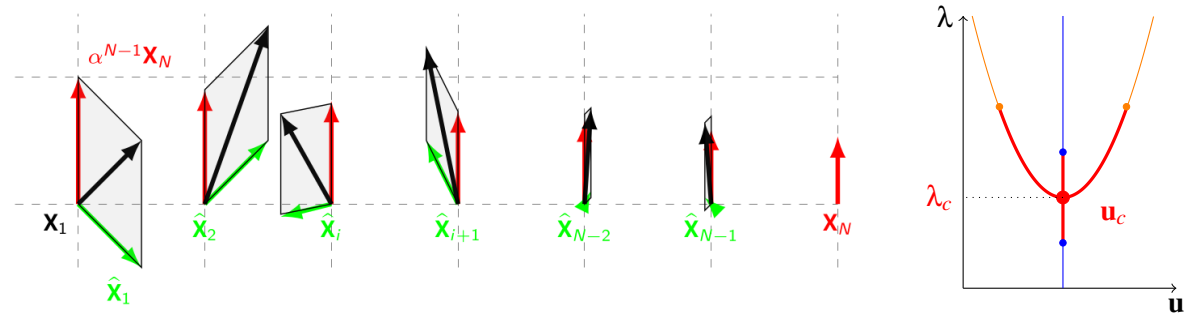


FIGURE 1 – À gauche, une représentation schématique de la combinaison linéaire des termes de séries à l'approche d'une bifurcation simple. En noir les termes de séries calculés par la MAN. En rouge la progression géométrique. En vert la série sans défaut. Extrait de [7]. À droite, un diagramme de bifurcation avec en rouge les branches calculées par la procédure proposée.

Cette méthode a plusieurs avantages notables. Tout d'abord, la détection se fait à distance et à moindre coût par la détection d'une progression géométrique. Ensuite, la solution singulière est évaluée avec la série MAN découplée de la progression géométrique. De plus, l'une des tangentes est immédiatement calculée avec la dérivée de cette même série nettoyée. Enfin, le terme constant de la progression géométrique est une aide pour le branchement. De plus dans la référence [5], les auteurs justifient l'accumulation de pas MAN à l'approche d'une bifurcation simple ainsi que la présence d'un pôle dans les approximants de Padé associé à la singularité tel qu'utilisé dans [6].

En ce qui concerne le branchement, il s'agit de réaliser un pas MAN, partant d'une solution singulière, pour chaque branche issue de la singularité. Nous reprenons dans ce travail, l'approche utilisée dans le cadre de la mécanique des fluides [8]. Cette méthode s'appuie sur les travaux présentés dans [2] et adaptés au cas d'un opérateur tangent non symétrique dans [6] et avec l'analyse de série dans [5, 8]. Dans le cas de la formulation MAN en pression suivieuse, nous obtenons un système d'équations analogue aux travaux [2, 6, 8].

Ces nouvelles équations ne sont pas présentée ici pour une raison de concision. La figure Fig.(1) schématise l'apparition de la progression géométrique et le calcul des branches émanant de la singularité.

3 Étude numérique

Le cas test concerne l'analyse de bifurcation d'un panneau cylindrique soumis à une pression homogène sur sa face supérieure. Nous présentons dans ce résumé l'analyse de bifurcation pour le cas d'une pression suivieuse et conservative. Les paramètres géométriques et matériaux du panneau sont donnés en Fig.(2). Dans cette étude préliminaire nous avons un maillage de 64 éléments Q8 tels que définis dans [10] avec un total de 225 nœuds et 1350 degrés de liberté. Les paramètres MAN sont les suivants : ordre de troncature $N = 30$ et tolérance pour le domaine de validité $\eta = 10^{-10}$. Un correcteur de Newton-Raphson est appliqué à chaque point régulier issu de la procédure de branchement en une bifurcation

simple. Ceci garantit la qualité de l'analyse de bifurcation.

Nous réalisons la continuation des branches solutions. Cela permet de suivre l'évolution de la déformation de la structure en fonction de l'intensité de la pression. En cas de détection d'une bifurcation simple, nous calculons les débuts de branches issues du point critique (voir Fig.(1)). Puis le cas échéant, nous utilisons l'une des nouvelles solutions régulières afin de parcourir une autre branche.

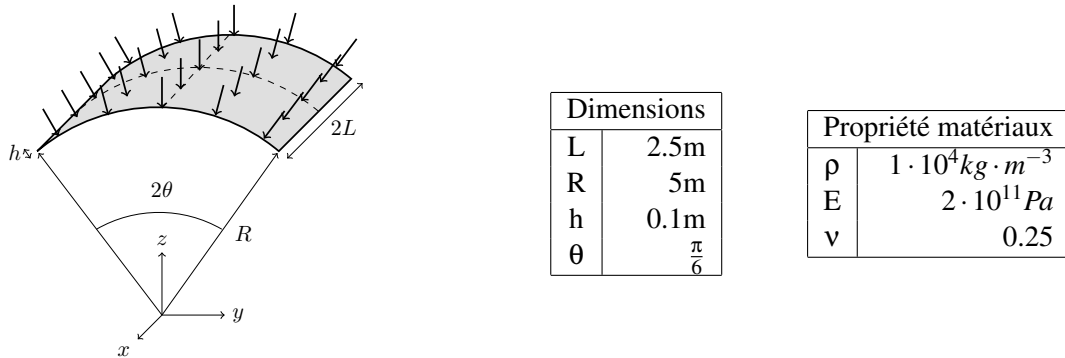


FIGURE 2 – Cas d'un panneau cylindrique soumis à une pression homogène en face supérieure.

Nous proposons une comparaison de la MAN en pression suivie avec des méthodes présentes dans le logiciel commercial Abaqus. Une étude de convergence au maillage, confirme qu'en première approche le maillage 8x8 est suffisant pour réaliser ces comparaisons. Dans le logiciel Abaqus, nous avons premièrement réalisé une analyse de bifurcation linéaire (LBA), puis effectué des suivis de solutions par la méthode de Riks. La LBA nous renseigne sur les premiers modes de bifurcations et les charges critiques associées. Le suivi de solutions par la méthode de Riks dans Abaqus utilise la continuation par longueur d'arc et calcule ces solutions de manière discrètes. Dans ce cadre, un calcul sans défaut nous donne la branche fondamentale. Enfin, dans le but de parcourir d'autres branches, nous avons ajouté des imperfections associées à certains modes de bifurcation.

L'évolution de ces branches solutions en fonction du chargement est présentée sous la forme de diagramme de bifurcation dans la Fig.(3). Premièrement, dans cette figure nous comparons la MAN avec la pression suivie avec la continuation via le logiciel Abaqus. Il y a une très bonne concordance entre les deux approches. Malheureusement, l'usage d'imperfection avec Abaqus, nous amène dans le cadre de quasi-bifurcation. Nous perdons alors en précision sur les charges critiques de certaines singularités (voir Fig.(3c)). De plus, ces figures montrent la complexité de la réponse du panneau. Enfin, le choix du degré de liberté pour la visualisation du phénomène rencontré dans sa globalité est important.

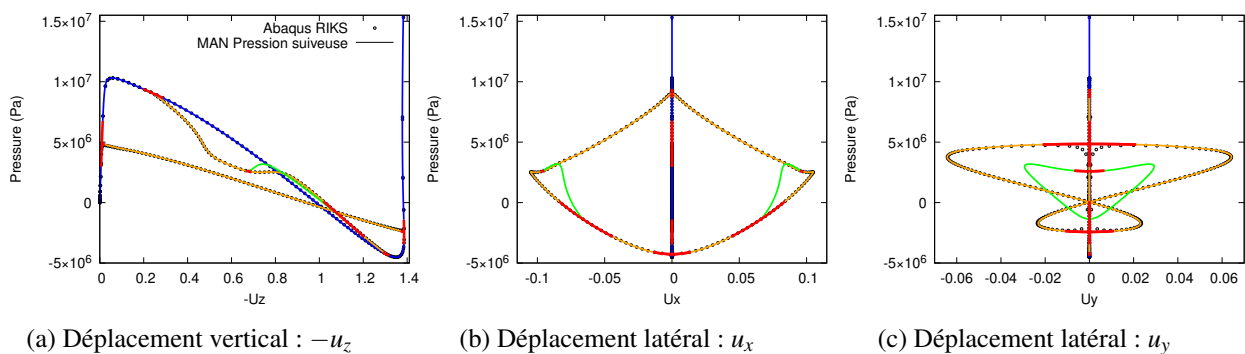


FIGURE 3 – Trois diagrammes de bifurcation utilisant les trois degrés de liberté du nœud au centre du panneau. Les petits cercles sont les résultats Abaqus en pression suivie. Les lignes sont les résultats MAN en pression suivie avec : en bleu, la branche fondamentale, en orange, les branches primaires, en vert les branches secondaires et en rouge, les pas de continuations issus d'une solution singulière.

Une visualisation plus globale est proposée en Fig.(4a). Un diagramme en trois dimensions utilise les déplacements combinés $-u_z$ et $u_x + u_y$ en fonction du paramètre de charge λ . Nous proposons une synthèse des familles de branches ainsi que des singularités rencontrées avec la Fig.(4b).

Les solutions singulières et les modes de bifurcations associés sont présentés pour le cas de la branche

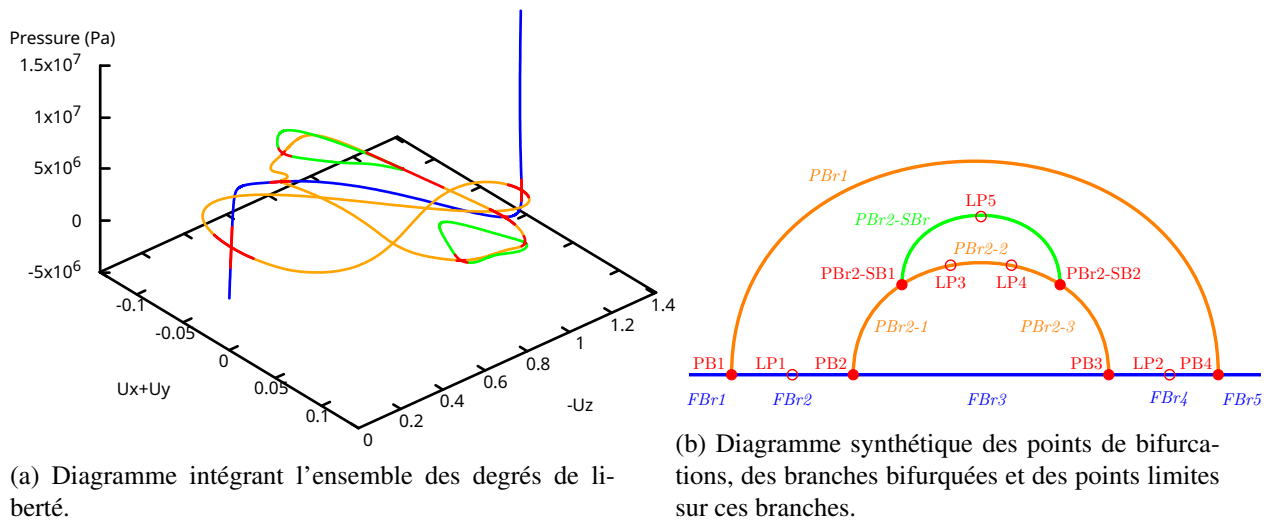


FIGURE 4 – Diagramme de bifurcation en 3D et représentation symbolique. En bleu, la branche fondamentale. En orange, les branches primaires. En vert les branches secondaires. En rouge, les pas de continuations issus d'une solution singulière.

fondamentale Fig.(5), la seconde branche primaire Fig.(6) et la branche secondaire sur cette dernière Fig.(7). En tant qu'étude préliminaire, ces visualisations sont réalisées pour la cas d'un chargement conservatif. Le cas de la pression suiveuse avec la MAN et Abaqus est en cours d'analyse et sera présenté lors de la conférence.

Les valeurs de charge critiques sont rassemblées dans la table Tab.(1) . Nous présentons les cas suiveur et conservatif. En ce qui concerne le logiciel Abaqus, l'analyse linéaire ne donne pas beaucoup d'information. Et du fait de la non linéarité manifeste de la réponse, les niveaux de charges critiques ne sont pas en accord avec les continuations dans ce même logiciel. La continuation des branches avec la méthode de Riks, permet d'obtenir les valeurs de charges pour les points limites. Nous notons un très bon accord entre la MAN et Abaqus dans le cas de la pression suiveuse. Enfin, le cas conservatif, en pression morte, montre des écarts notables avec le cas non conservatif en pression suiveuse.

Singularité	Pression suiveuse (MPa)			Conservatif (MPa)
	MAN	Abaqus "LBA"	Abaqus "Riks"	MAN
PB1	4.851	4.915 (1.3%)	n.t.	4.888 (0.76%)
LP1	10.310	11.118 (7.8%)	10.308 (0.02%)	10.263 (0.46%)
PB2	9.029	13.364 (29.6%)	n.t.	9.043 (0.16%)
PB3	-4.270	n.t.	n.t.	-4.467 (4.61%)
LP2	-4.527	n.t.	-4.521 (0.13%)	-4.721 (4.29%)
PB4	-2.429	n.t.	n.t.	-2.474 (1.85%)
PB2-SB1	2.591	n.t.	n.t.	2.453 (5.33%)
PB2-SB2	-1.366	n.t.	n.t.	-1.418 (3.81%)
LP3	2.503	n.t.	2.516 (0.36%)	2.377 (5.03%)
LP4	2.534	n.t.	2.541 (0.28%)	2.397 (5.41%)
LP5	3.184	n.t.	n.t.	3.003 (5.68%)

TABLE 1 – Pressions critiques pour les singularités considérées. Les erreurs relatives aux résultats MAN avec la pression suiveuse sont données entre parenthèse. « n.t. » correspond aux valeurs non trouvées.

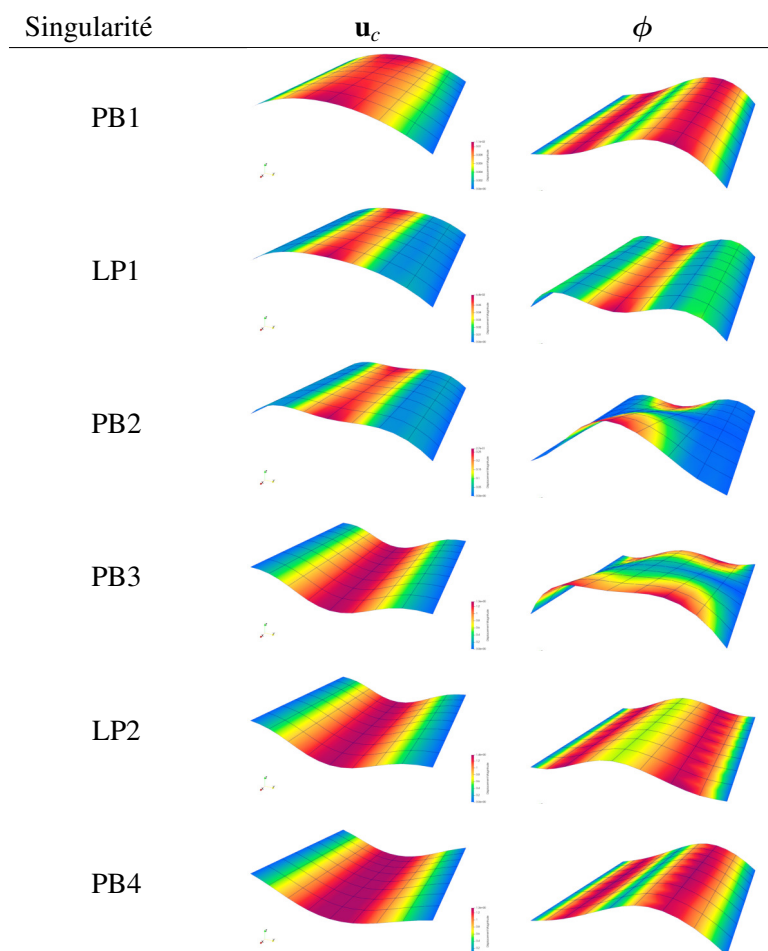


FIGURE 5 – Solutions singulières et modes de bifurcation associés pour la branche fondamentale dans le cas MAN conservatif.

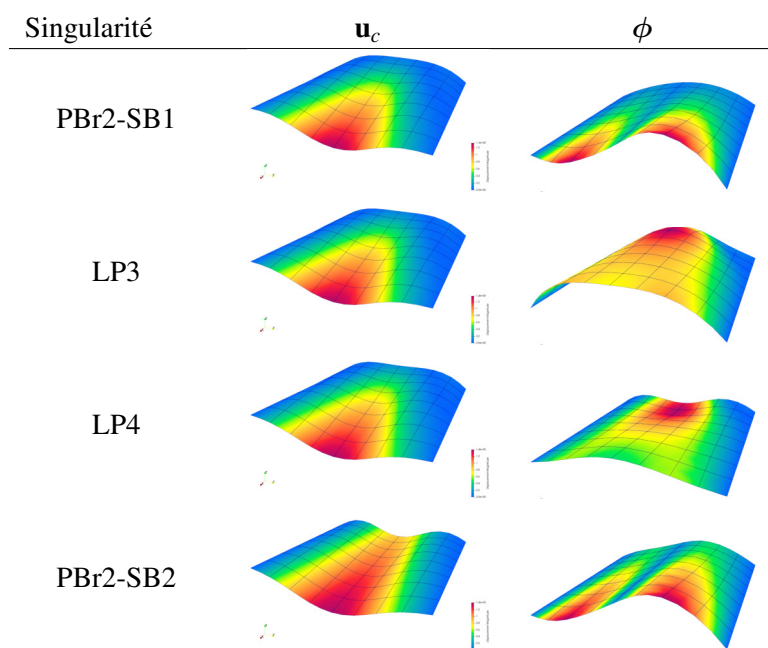


FIGURE 6 – Solutions singulières et modes de bifurcation associés pour la branche primaire "PBr2" dans le cas MAN conservatif.

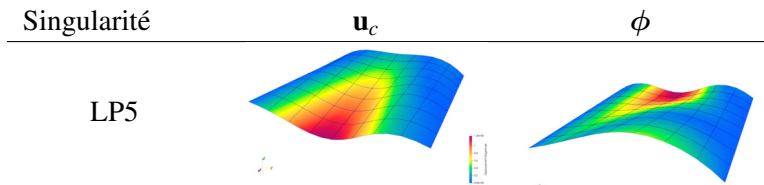


FIGURE 7 – Solution singulière et modes de bifurcation associé pour la branche secondaire "PBr2-SBr" dans le cas MAN conservatif.

4 Conclusions

Dans ce travail, nous avons présenté une méthode d'analyse de bifurcation dans le cadre de structures coques en élasticité non linéaire soumise à une pression homogène. La méthode de détection des singularités se base sur l'analyse des séries issues de la MAN. Une méthode de branchement permettant de déterminer les branches solutions post-bifurcation a également été proposée dans le cadre d'un chargement de type pression suivieuse. Une première étude numérique sur une panneau cylindrique a permis de valider les différentes méthodes proposées. D'autres cas d'études seront proposés lors de la conférence.

Références

- [1] M. Bogey, J.-M. Cadou, C. Combescure, G. Girault, B. Leblé et M. Cazuguel *Modélisation numérique avancée du flambement de structures minces sous chargements dynamiques non-conservatifs* 26ème Congrès Français de Mécanique, Metz, 2025
- [2] E. H. Boutyou, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry and M. Boudi *Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and Padé approximants*, Int. J. Numer. Meth. Engng, 60, 1987–2012, 2004
- [3] B. Cochelin *A path-following technique via an asymptotic-numerical method* Computers & Structures, v53, 5, pages 1181-1192, 1994
- [4] B. Cochelin, N. Damil and Michel Potier-Ferry *The asymptotic-numerical method : an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics* Revue europeenne des elements finis. 3, 2, pages 281-297, 1994
- [5] B. Cochelin and M. Medale *Power series analysis as a major breakthrough to improve the efficiency of Asymptotic Numerical Method in the vicinity of bifurcations* J. Comp. Phys., 236, 594–607, 2013
- [6] Y. Guevel, H. Boutyou and J.M. Cadou *Automatic detection and branch switching methods for steady bifurcation in fluid mechanics* Journal of Computational Physics, 230, 3614–3629, 2011
- [7] Y. Guevel. *Méthodes numériques adaptées à la résolution des équations de Navier-Stokes.*, tel-01305764v5, Université de Bretagne Sud, 2016
- [8] Y. Guevel, T. Allain, G. Girault and J.M. Cadou *Numerical bifurcation analysis for 3-dimensional sudden expansion fluid dynamic problem* Int J Numer Meth Fluids, 1–26, 2017
- [9] P. Ventura, H. Azzayani, H. Zahrouni and M. Potier-Ferry *Buckling of pressurized cylindrical shells using the Asymptotic Numerical Method* Thin-Walled Structures, 188, 110835, 2023
- [10] H. Zahrouni, B. Cochelin and M. Potier-Ferry *Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 175, 71-85, 1999