

Optimisation de capteurs à fibre optique distribuée pour l'identification de paramètres basée sur le mCRE

J.A. Pérez^{1,2}, M. de Buhan¹, J. Cortial L.¹, Chamoin², B. Soulier²

¹ Safran Tech, Digital Sciences & Technologies Department, Rue des Jeunes Bois, Châteaufort 78114 Magny-Les-Hameaux, France
[jose-andres.perez-orozco; maya.de-buhan; julien.cortial]@safrangroup.com

² Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMPS, Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, 91190, Gif-sur-Yvette, France
[ludovic.chamoin; bruno.soulier]@ens-paris-saclay.fr

Résumé — Ce travail propose une nouvelle stratégie pour le placement de capteurs distribués à fibre optique (DOFS) destinée à l'identification de paramètres, fondée sur la mCRE (Erreur de Relation Constitutive modifiée). À partir de l'interprétation stochastique de la mCRE, une matrice d'information de Fisher modifiée (mFIM) est définie pour évaluer la performance des capteurs dans l'identification des paramètres. Les capteurs DOFS sont représentés par des chemins continus, optimisés via une approche hybride combinant évolution différentielle et optimisation de forme.

Mots clés — Placement optimisé des capteurs, fibre optique, mCRE, FIM, optimisation de forme, identification de paramètres.

1 Introduction

Les systèmes de surveillance de l'intégrité des structures (Structural Health Monitoring, SHM) associent mesures expérimentales et modélisation pour évaluer l'état des structures [1]. Un enjeu majeur est le placement optimal des capteurs [2, 3, 4, 5], afin de maximiser l'information obtenue. Les critères fondés sur la matrice d'information de Fisher (FIM) [6, 7], tels que la trace (A-optimalité) ou le déterminant (D-optimalité), sont couramment employés.

Ce travail introduit une matrice d'information de Fisher modifiée (mFIM), cohérente avec le cadre de l'Erreur en Relation de Comportement modifiée (mCRE), une formulation inverse bien posée reconnue pour sa convexité [8, 9] et sa robustesse au bruit [10, 11, 12]. Malgré ces atouts, son potentiel pour le placement de capteurs reste peu exploré.

Parmi les technologies de mesure, les fibres optiques distribuées (DOFS) se distinguent par leur résolution spatiale élevée, leur légèreté et leur capacité à fournir des mesures quasi continues de déformation [13]. Cela motive une formulation continue du problème, où l'on cherche à optimiser la géométrie du trajet de la fibre intégrée.

Les approches existantes reposent souvent sur une optimisation paramétrique globale, décrivant la fibre par des paramètres discrets (points de contrôle, orientations) et utilisant des méthodes stochastiques comme l'évolution différentielle ou les algorithmes génétiques [14, 15, 2, 16]. Bien que performantes globalement, ces méthodes sont coûteuses et offrent un contrôle géométrique limité.

Pour pallier ces limites, nous proposons un cadre d'optimisation de forme continu exploitant explicitement la dérivée de forme du déterminant de la FIM ou de la mFIM. Une recherche globale par évolution différentielle fournit d'abord une configuration prometteuse, ensuite raffinée localement par des sensibilités de forme. Cette stratégie hybride assure à la fois robustesse et efficacité, et est illustrée sur un cas test en élasticité linéaire orthotrope, mettant en évidence la cohérence physique et la convergence améliorée des trajectoires de fibres obtenues.

2 Indicateurs de performance des capteurs basés sur la FIM

2.1 Bases des problèmes inverses

En mécanique computationnelle, les problèmes inverses visent à identifier des paramètres inconnus $\theta \in \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$ à partir d'observations limitées et bruitées $X_{obs} \in \mathbb{R}^{N_s}$. Les écarts entre les prédictions du modèle et les mesures proviennent du bruit d'observation et des erreurs de modélisation.

Un cadre probabiliste naturel pour ces problèmes est l'inférence bayésienne, qui met à jour les connaissances a priori $\pi_0(\theta)$ via la vraisemblance $\pi(X_{obs}|\theta)$ selon le théorème de Bayes :

$$\pi(\theta|X_{obs}) \propto \pi(X_{obs}|\theta)\pi_0(\theta) \quad (1)$$

où $\pi(\theta|X_{obs})$ désigne la distribution a posteriori (solution du problème inverse). Pour des distributions gaussiennes, $\pi_0(\theta)$ et $\pi(X_{obs}|\theta)$ s'écrivent :

$$\pi_0(\theta) \propto \exp \left[-\frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^T \Sigma_0^{-1} (\theta - \theta_0) \right] \quad (2)$$

$$\pi(X_{obs}|\theta) \propto \exp \left[-\frac{1}{2}(X_{obs} - \Pi X(\theta))^T [\Sigma_{mod} + \Sigma_{obs}]^{-1} (X_{obs} - \Pi X(\theta)) \right] \quad (3)$$

où θ_0 contient les valeurs a priori des paramètres et Σ_0 , Σ_{mod} et Σ_{obs} sont respectivement les matrices de covariance a priori, modèle et observation.

On remarque que (2) et (3) correspondent à des exponentielles de formes quadratiques négatives :

$$E_0^2(\theta) = \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^T \Sigma_0^{-1} (\theta - \theta_0) \quad (4)$$

$$E_{lsqr}^2 = \frac{1}{2}(X_{obs} - \Pi X(\theta))^T [\Sigma_{mod} + \Sigma_{obs}]^{-1} (X_{obs} - \Pi X(\theta)) \quad (5)$$

La minimisation des moindres carrés définis par (5) correspond à une estimation du maximum de vraisemblance (MLE), tandis que la minimisation de (5) + (4) fournit l'estimation a posteriori maximale (MAP). Cette formulation montre que les méthodes classiques des moindres carrés émergent naturellement du cadre bayésien gaussien.

2.2 FIM et placement optimal des capteurs

Le placement optimal des capteurs découle naturellement de la formulation bayésienne : l'objectif est de réduire l'incertitude sur les paramètres estimés. Cette incertitude est quantifiée par la matrice d'information de Fisher (FIM), dont l'inverse donne la borne inférieure de Cramér–Rao sur la covariance des paramètres [6]. Une FIM plus grande implique une plus grande sensibilité des données aux variations des paramètres, donc une variance a posteriori plus faible.

La FIM peut se calculer comme la covariance du score (gradient du log-vraisemblance) ou, de manière équivalente, comme l'espérance négative de la Hessienne du log-vraisemblance [17, 6] :

$$FIM = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \log \pi(X_{obs}|\theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_{opt}} \right]. \quad (6)$$

Intuitivement, pour un paramètre unique, une Hessienne plus grande implique une variance a posteriori plus faible et donc une confiance accrue. Dans le cas gaussien de (3), le log-vraisemblance correspond à une fonctionnelle de moindres carrés pondérée, et la FIM se réduit à l'espérance de sa Hessienne :

$$FIM = \frac{1}{\sigma_{obs}^2} \left(\Pi \frac{\partial X(\theta)}{\partial \theta} \right)^T \left(\Pi \frac{\partial X(\theta)}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta_{opt}} \quad (7)$$

Cette expression montre le lien direct entre la sensibilité des sorties du modèle aux paramètres et la précision atteignable dans leur identification. Cependant, elle suppose un modèle parfait et reste très

sensible aux biais de modélisation. En présence d'écart modèle–données, par exemple dus à la discrétisation ou à des simplifications constitutives, la FIM classique n'est plus fiable. Cela motive l'introduction d'une matrice d'information de Fisher modifiée (mFIM), cohérente avec le cadre de l'Erreur en Relation de Comportement Modifiée (mCRE), comme discuté dans la section suivante.

3 Erreur en Relation de Comportement Modifiée (mCRE) et la FIM

Parmi les méthodes de résolution de problèmes inverses, l'Erreur en Relation de Comportement Modifiée (mCRE) se distingue par sa convexité et sa robustesse face au bruit et aux imprécisions de modélisation. Elle définit une fonctionnelle variationnelle hybride qui équilibre fidélité au modèle et concordance avec les données [8, 12], étendant l'Erreur en Relation de Comportement (CRE) classique, qui ne mesure que l'erreur de modélisation, en y ajoutant un terme correctif basé sur les données :

$$E_{mCRE}^2(\hat{U}, \hat{V}; \theta) = \underbrace{\frac{1}{2}(\hat{U} - \hat{V})^T \mathbb{K}(\hat{U} - \hat{V})}_{\text{distance au modèle (CRE)}} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}(\Pi\hat{U} - U_{obs})^T \Sigma_{obs}^{-1}(\Pi\hat{U} - U_{obs})}_{\text{distance aux données}}, \quad (8)$$

où α pondère l'influence des observations, et (\hat{U}, \hat{V}) désignent les champs cinématiquement et statiquement admissibles. Une interprétation stochastique de la mCRE a été proposée dans [18], en l'associant à une vraisemblance gaussienne :

$$\pi(U_{obs}|\theta) \propto \exp \left[-\frac{1}{2}(\Pi\hat{U} - U_{obs})^T \Sigma_{obs}^{-1}(\Pi\hat{U} - U_{obs}) - \frac{1}{2\alpha}(\hat{U} - \hat{V})^T \mathbb{K}(\hat{U} - \hat{V}) \right]. \quad (9)$$

En supposant un *prior* uniforme, la distribution a posteriori s'écrit :

$$\pi(\theta|U_{obs}) \propto \exp \left[-\frac{1}{\alpha} E_{mCRE}(\hat{U}, \hat{V}; \theta) \right]. \quad (10)$$

Cela montre que la minimisation de la mCRE est équivalente à une estimation de type maximum de vraisemblance (MLE), ou maximum a posteriori (MAP) sous un *prior* uniforme.

3.1 Matrice d'information de Fisher modifiée basée sur la mCRE

La forme probabiliste de la mCRE est directement analogue au cadre gaussien classique, permettant de définir une matrice d'information de Fisher modifiée (mFIM) à partir de la dérivée seconde du log-vraisemblance associé à la mCRE. Dans ce contexte, la mFIM est proportionnelle à la Hessienne de la fonctionnelle mCRE, multipliée par le facteur $\frac{1}{\alpha}$:

$$mFIM = \frac{1}{\alpha} \left(\hat{U}^{0T} \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{U}^0}{\partial \theta} - \hat{V}^T \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta_{opt}} \quad (11)$$

Ici, \hat{U}^0 désigne la partie constante de \hat{U} . Contrairement à la FIM classique, qui dépend des sensibilités locales aux positions des capteurs via Π , la mFIM capture les sensibilités globales des champs couplés modèle–données (\hat{U}, \hat{V}) , reflétant la nature hybride du cadre mCRE.

4 Optimisation du placement des capteurs à fibre optique distribuée par optimisation de forme

Comme montré précédemment, la matrice d'information de Fisher (FIM) et sa version modifiée (mFIM) sont proportionnelles aux Hessiennes des fonctionnelles de moindres carrés et mCRE, respectivement. Ce lien justifie l'utilisation de ces Hessiennes (ou, de manière équivalente, des FIM et mFIM) comme mesures de sensibilité pour le placement des capteurs.

Nous étendons maintenant la formulation aux capteurs optiques distribués (DOFS), fournissant des mesures de déformation quasi-continues le long d'une courbe Γ dans la direction tangentielle (τ), comme dans les mesures par rétro-diffusion Rayleigh [13]. Plutôt que de discrétiser Γ en points de mesure, nous la considérons comme une variable géométrique continue et optimisons directement sa forme via les

dérivées de forme. Pour plus de concision, seuls les concepts et formulations principaux sont présentés ici.

4.1 FIM continue basée sur les moindres carrés

La fonctionnelle de moindres carrés continus s'écrit :

$$\mathcal{E}_{lsqr}^2 = \frac{1}{2\sigma^2} \int_{\Gamma} (u(\theta) \cdot \tau - u_{obs})^2 ds, \quad (12)$$

dont la Hessienne est :

$$\mathcal{H}_{lsqr,ij} = \frac{1}{\sigma^2} \int_{\Gamma} (u_{\theta_i}(\theta) \cdot \tau)(u_{\theta_j}(\theta) \cdot \tau) ds. \quad (13)$$

Cette Hessienne définit une version continue de la FIM qui dépend de Γ , et l'optimisation de Γ consiste donc à maximiser un critère d'information (par exemple, $\det(\mathcal{H})$) via sa dérivée de forme.

4.2 mFIM continu basé sur la mCRE

Pour les problèmes d'élasticité linéaire avec des observations tangentielles continues le long de $\Gamma \subset \Omega$, la mCRE s'écrit :

$$\mathcal{E}_{mCRE}^2 = \frac{1}{2} a(\hat{u} - \hat{v}, \hat{u} - \hat{v}) + \frac{\alpha}{2\sigma^2} \int_{\Gamma} (\hat{u} \cdot \tau - u_{obs})^2 dx, \quad (14)$$

où $a(\cdot, \cdot)$ est la forme bilinéaire d'élasticité. Dans ce contexte, la Hessienne correspondante est :

$$\mathcal{H}_{mCRE,ij}(\hat{u}, \hat{v}, \hat{u}_{\theta}, \hat{v}_{\theta}) = a_{\theta_i}(\hat{u}, \hat{u}_{\theta_j}) - a_{\theta_i}(\hat{v}, \hat{v}_{\theta_j}), \quad (15)$$

proportionnelle à la mFIM continue. Contrairement à la FIM classique, qui reflète la sensibilité aux positions des capteurs, la mFIM capture les sensibilités globales des champs couplés (\hat{u}, \hat{v}) , héritant de la nature hybride de la fonctionnelle mCRE. La dépendance de \mathcal{H}_{mCRE} à la géométrie de la fibre Γ est rendue explicite via la méthode formelle de Cea [19], permettant d'intégrer de manière cohérente les contraintes PDE dans la dérivée de forme.

4.3 Dérivée de forme du déterminant

En pratique, l'optimisation porte sur des mesures scalaires dérivées de \mathcal{H} (ou équivalentes à la FIM ou mFIM), telles que le déterminant en conception D-optimale. Pour une matrice inversible \mathcal{H} , sa dérivée directionnelle de Gâteaux satisfait :

$$D \det(\mathcal{H})[\delta \mathcal{H}] = \det \mathcal{H} \operatorname{tr}(\mathcal{H}^{-1} \delta \mathcal{H}) \propto \operatorname{tr}(\mathcal{H}^{-1} \delta \mathcal{H}). \quad (16)$$

Le symbole de proportionnalité souligne que, dans l'optimisation par gradient, seule la direction de descente est pertinente, la magnitude du pas étant généralement ajustée par normalisation ou recherche linéaire. Dans ce cadre, en prenant $\delta \mathcal{H}$ comme dérivée de forme de la Hessienne, la variation du déterminant implique à la fois les contributions diagonales et hors-diagonales, pondérées par l'inverse de la Hessienne \mathcal{H}^{-1} .

5 Problème d'optimisation de forme

À partir des dérivées de forme précédentes, le problème unifié d'optimisation de la position des capteurs consiste à ajuster la géométrie Γ pour maximiser l'information, quantifiée par le déterminant de la Hessienne $\mathcal{H} \in \{\mathcal{H}_{lsqr}, \mathcal{H}_{mCRE}\}$:

$$\begin{aligned} \Gamma^* &= \operatorname{argmin}_{\Gamma} -\det(\mathcal{H}(\Gamma)), \quad \mathcal{H} \in \mathcal{H}_{lsqr}, \mathcal{H}_{mCRE}, \\ \text{Fiber length constraint} &: \int_{\Gamma} ds \leq L_{\max}, \\ \text{Curvature constraint} &: \max_{s \in \Gamma} |\kappa(s)| \leq \kappa_{\max}. \end{aligned} \quad (17)$$

La géométrie initiale est fournie par une recherche globale via Differential Evolution avec une paramétrisation B-Spline, servant de point de départ pour le raffinement local basé sur les dérivées de forme. La gestion des contraintes suit la projection dans le sous-espace nul [20], tandis que les dérivées de forme pour la longueur et la courbure sont obtenues à partir des résultats classiques sur les intégrales de contour dépendantes de la position et de la courbure [19, 21]. Un résumé visuel de cette approche est présenté à la Figure 1.

Cette approche permet un ajustement continu et précis du chemin de la fibre, applicable aux métriques classiques de moindres carrés comme à celles basées sur la mCRE.

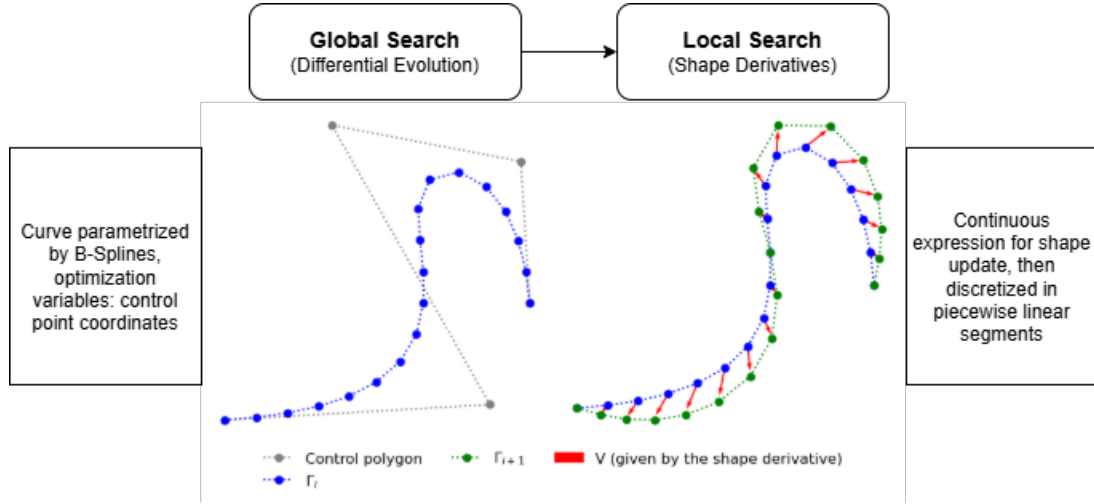


FIGURE 1 – Étapes d'optimisation

6 Implémentation Numérique

Nous démontrons le cadre d'optimisation proposé sur un problème bidimensionnel de placement de capteurs impliquant une fibre optique colée dans une plaque rectangulaire (Figure 2). La plaque, constituée d'un matériau orthotrope linéaire homogène, est soumise à une charge de traction de 0.01 Pa sur Γ_{N1} , tandis que Γ_D est maintenue fixe. Les paramètres matériels sont $E_1 = E_2 = 1$ Pa et $\mu = 0.3$.

Cette configuration produit le même champ de déplacements qu'un matériau isotrope, tout en permettant une analyse de sensibilité indépendante vis-à-vis de E_1 et E_2 . En imposant $E_1 = E_2$ et la symétrie selon $y = x$, on assure des sensibilités équilibrées et on évite tout biais dans la configuration optimale des capteurs. Les amplitudes de sensibilité $\partial U / \partial E_1$ et $\partial U / \partial E_2$ sont illustrées à la Figure 2.

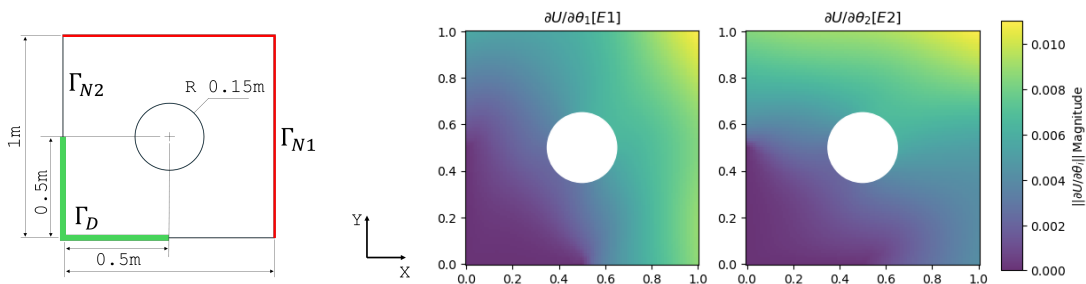


FIGURE 2 – Conditions aux limites et sensibilité du déplacement par rapport à E_1 et E_2

L'objectif est de déterminer le chemin optimal de la fibre pour l'identification simultanée de E_1 et E_2 , en utilisant à la fois la FIM et la mFIM (formulations moindres carrés et mCRE). La fibre part de Γ_D , avec une longueur maximale de 4 m et un rayon de courbure minimal de 0.01 m. De plus, le bruit gaussien sur les déplacements observés U_{obs} est fixé à 5 %.

L'optimisation consiste à maximiser le déterminant des Hessiennes moindres carrés ou mCRE, proportionnelles aux (m)FIM correspondantes, en partant d'une configuration initiale obtenue par Differen-

tial Evolution, puis affinée localement via l’optimisation de forme.

6.1 Comparaison des optimisations basées sur FIM et mFIM

Le cadre proposé combine une recherche globale par Differential Evolution avec un raffinement local basé sur les dérivées de forme, permettant d’explorer efficacement l’espace de conception et de converger rapidement vers des optima réalisables. La Figure 3 compare les chemins de fibre optimisés obtenus avec la Hessienne moindres carrés (FIM) et celle basée sur la mCRE (mFIM). La courbe bleue représente la géométrie initiale Γ_0 issue de Differential Evolution, tandis que la verte correspond au résultat après optimisation de forme.

La FIM, basée sur les moindres carrés et métrique classique de placement de capteurs, concentre la fibre dans les zones de forte sensibilité au déplacement, confirmant la cohérence physique de la solution. Comme montré dans [14], elle tend à maximiser la sensibilité aux paramètres le long du chemin de la fibre, générant souvent des regroupements dans les zones les plus sensibles. En revanche, la mFIM prend en compte des grandeurs globales de la structure et cherche à minimiser la sensibilité globale du champ hybride associé à la mCRE ($\partial\hat{U}/\partial\theta$), plutôt que d’amplifier la sensibilité locale.

Deux cas limites illustrent ce comportement : (i) lorsque $\partial\hat{U}/\partial\theta \rightarrow 0$, le champ hybride est entièrement contraint par les données (capteurs denses, $\alpha \rightarrow \infty$) ; et (ii) lorsque $\partial\hat{U}/\partial\theta \rightarrow \partial U/\partial\theta$, il coïncide avec le champ modèle pur (pas de données, $\alpha = 0$).

Malgré sa simplicité, le raffinement basé sur la dérivée de forme accélère considérablement la convergence : moins de 10 itérations (moins d’une seconde) pour le cas moindres carrés et moins de 15 itérations (≈ 19 s) pour la formulation mCRE, cette dernière nécessitant des résolutions supplémentaires des problèmes d’état et adjoints via la méthode de Céa. Les deux restent nettement plus rapides que l’étape globale de Differential Evolution (plusieurs minutes), tout en améliorant la valeur de l’objectif de 78,3% et 32,4%, respectivement.

Pour évaluer l’impact sur l’identification des paramètres, chaque configuration optimisée a été analysée dans le cadre mCRE. Le placement des capteurs optimisé via la mFIM a atteint un déterminant de Hessienne mCRE nettement supérieur, indiquant une meilleure condition et une variance postérieure plus faible, tandis que le placement optimisé selon les moindres carrés donnait un résultat significativement moins favorable (Figure 4).

Cela confirme que la mFIM est intrinsèquement adaptée à la formulation mCRE et fournit des configurations de capteurs supérieures pour les problèmes d’identification hybrides modèle–données. La comparaison quantitative des valeurs de Hessienne est résumée dans le Tableau 1.

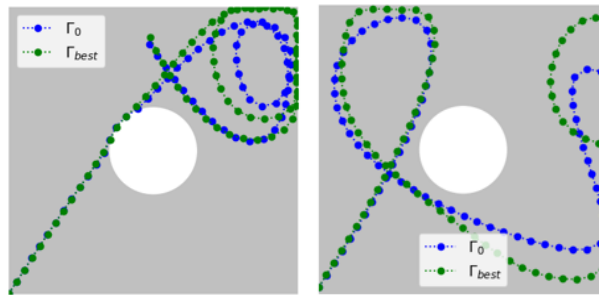


FIGURE 3 – Comparaison des trajectoires de fibres optimisées en utilisant (a) la Hessienne des moindres carrés (FIM) et (b) la Hessienne basée sur la mCRE (mFIM)

TABLE 1 – Amélioration des termes diagonaux de la Hessienne

E_1	E_2
53.10 %	40.99 %

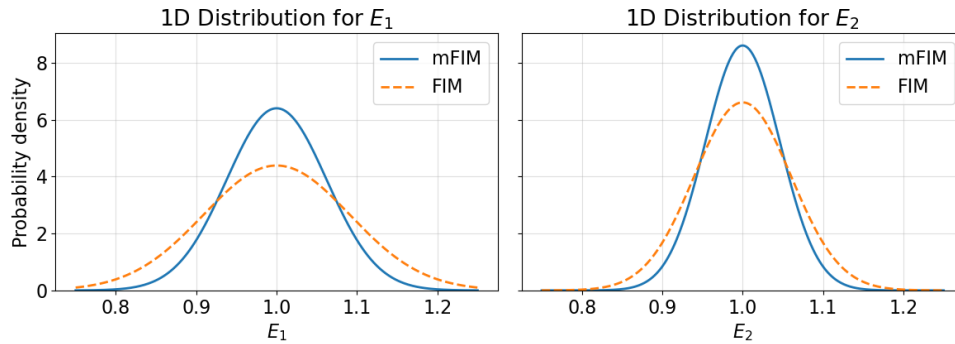


FIGURE 4 – Distribution de l'identification des paramètres

7 Conclusions et perspectives

Ce travail a présenté un cadre unifié pour l'optimisation du placement de capteurs, combinant exploration globale et raffinement local basé sur les dérivées de forme. En reliant la Fisher Information Matrix (FIM) et sa version modifiée (mFIM) aux Hessiennes des fonctionnelles moindres carrés et mCRE, nous avons établi un pont rigoureux entre les formulations de problèmes inverses et les techniques d'optimisation de forme. Les résultats montrent que la mFIM, intrinsèquement cohérente avec le cadre mCRE, fournit des configurations de capteurs supérieures pour l'identification hybride modèle–données, améliorant le conditionnement et réduisant l'incertitude sur les paramètres.

Du point de vue numérique, plusieurs prolongements sont envisagés. Le cadre peut être appliqué à l'identification de paramètres non homogènes et à la définition d'indicateurs de dommages pour la surveillance de structures (SHM). L'efficacité numérique peut être renforcée en exploitant la forte parallélisation de la phase d'optimisation globale et en accélérant l'optimisation locale de forme grâce à des techniques de mise à jour de matrices en faible rang, telles que la formule de Sherman–Morrison–Woodbury, qui gèrent efficacement les petites modifications des matrices systèmes induites par le déplacement des capteurs. Enfin, des tests de validation expérimentale sont prévus pour évaluer la robustesse et la pertinence pratique de la méthodologie proposée.

Références

- [1] Charles R Farrar and Keith Worden. An introduction to structural health monitoring. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1851) :303–315, 2007.
- [2] G Cazzulani, M Chieppi, A Colombo, and P Pennacchi. Optimal sensor placement for continuous optical fiber sensors. In *Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems 2018*, volume 10598, pages 970–981. SPIE, 2018.
- [3] Costas Papadimitriou. Optimal sensor placement methodology for parametric identification of structural systems. *Journal of sound and vibration*, 278(4-5) :923–947, 2004.
- [4] Daniel C Kammer and Michael L Tinker. Optimal placement of triaxial accelerometers for modal vibration tests. *Mechanical systems and signal processing*, 18(1) :29–41, 2004.
- [5] Firdaus E Udewadia. Methodology for optimum sensor locations for parameter identification in dynamic systems. *Journal of engineering mechanics*, 120(2) :368–390, 1994.
- [6] Jesse A Sharp, Alexander P Browning, Kevin Burrage, and Matthew J Simpson. Parameter estimation and uncertainty quantification using information geometry. *Journal of the Royal Society Interface*, 19(189) :20210940, 2022.
- [7] Guilherme Ferreira Gomes, Sebastiao Simoes da Cunha, Patricia da Silva Lopes Alexandrino, Bruno Silva de Sousa, and Antonio Carlos Ancelotti. Sensor placement optimization applied to laminated composite plates under vibration. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 58 :2099–2118, 2018.
- [8] Wilkins Aquino and Marc Bonnet. Analysis of the error in constitutive equation approach for time-harmonic elasticity imaging. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 79(3) :822–849, 2019.

- [9] Stéphane Andrieux. Bregman divergences for physically informed discrepancy measures for learning and computation in thermomechanics. *Comptes Rendus. Mécanique*, 351(G1) :59–81, 2023.
- [10] Pierre Feissel and Olivier Allix. Modified constitutive relation error identification strategy for transient dynamics with corrupted data : The elastic case. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(13-16) :1968–1983, 2007.
- [11] P-E Charbonnel, Pierre Ladevèze, Francois Louf, and Ch Le Noach. A robust cre-based approach for model updating using in situ measurements. *Computers & Structures*, 129 :63–73, 2013.
- [12] Pierre Ladevèze and Dominique Leguillon. Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(3) :485–509, 1983.
- [13] Ludovic Chamoin, S Farahbakhsh, and M Poncelet. An educational review on distributed optic fiber sensing based on rayleigh backscattering for damage tracking and structural health monitoring. *Measurement Science and Technology*, 33(12) :124008, 2022.
- [14] José Andrés Pérez Orozco, Ludovic Chamoin, Julien Cortial, Maya de Buhan, and Bruno Soulier. Optimal placement of distributed optic fiber sensors with the modified constitutive relation error. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 238 :113206, 2025.
- [15] Jing Li, Rakesh K Kapania, and William B Spillman Jr. Placement optimization of distributed-sensing fiber optic sensors using genetic algorithms. *AIAA journal*, 46(4) :824–836, 2008.
- [16] Salvatore Ameduri, Monica Ciminello, Ignazio Dimino, Antonio Concilio, Alfonso Catignani, and Raimondo Mancinelli. Distributed sensor placement optimization for computer aided structural health monitoring. *Archive of Mechanical Engineering*, 66(1) :111–127, 2019.
- [17] Erich L Lehmann and George Casella. *Theory of point estimation*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [18] Arnaud Deraemaeker, Pierre Ladevèze, and Thierry Romeuf. Model validation in the presence of uncertain experimental data. *Engineering computations*, 21(8) :808–833, 2004.
- [19] Grégoire Allaire, Charles Dapogny, and François Jouve. Shape and topology optimization. In *Handbook of numerical analysis*, volume 22, pages 1–132. Elsevier, 2021.
- [20] Florian Feppon, Grégoire Allaire, and Charles Dapogny. Null space gradient flows for constrained optimization with applications to shape optimization. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 26 :90, 2020.
- [21] Günay Doğan and Ricardo H Nochetto. First variation of the generalcurvature-dependent surface energy. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 46(1) :59–79, 2012.