

Méthodes pour l'optimisation multidisciplinaire sous incertitudes

M. De Lozzo¹, O. Sapin¹, L. Cousin¹, N. Roussouly¹, F. Gallard¹, A. Dechaume¹

¹ IRT Saint Exupéry, Toulouse, matthias.delozzo@irt-saintexupery.com

Résumé — L'optimisation multidisciplinaire (MDO) permet de résoudre des problèmes de conception associant différentes disciplines, comme l'aérodynamique et la structure. Ignorer les incertitudes affectant ces problèmes peut conduire à des solutions conservatrices, voire non robustes et non fiables. Ces travaux présentent des éléments méthodologiques pour poser et résoudre un problème de MDO sous incertitudes. En particulier, ils proposent des techniques d'échantillonnage frugal ainsi que des techniques basées sur des modèles de substitution. Ces approches disponibles dans le logiciel libre GEMSEO[®] sont illustrées sur un problème de durée de vie de satellite et un problème de structure en treillis.

Mots clés — MDO, incertitudes, modèle de substitution.

1 Introduction

L'optimisation numérique consiste à utiliser des algorithmes pour minimiser une fonction objectif sur un espace de recherche tout en respectant des contraintes. L'optimisation multidisciplinaire (MDO – *multidisciplinary design optimization*) est son application à la conception de systèmes comportant plusieurs disciplines. L'espace de recherche est alors appelé espace de conception. Ces disciplines peuvent être couplées, faiblement (une discipline dépend d'une autre discipline) ou fortement (deux disciplines sont mutuellement dépendantes). Dès lors, résoudre un problème MDO revient à résoudre non seulement un problème d'optimisation mais aussi un problème de couplage en cas de couplages forts. Selon la nature du problème, il peut être numériquement avantageux de le réécrire au moyen d'une formulation, aussi appelée architecture [8]. Par exemple, la formulation MDF (*multidisciplinary feasible*) implique la résolution du problème de couplage pour chaque point de l'espace de conception fourni par l'algorithme d'optimisation. Le choix de la formulation MDO et de l'algorithme d'optimisation dépend du cas d'étude [15, 13]. Par ailleurs, les problèmes multidisciplinaires sont souvent impactés par des incertitudes, que cela soit à travers les paramètres des modèles, les variables de conception, les seuils des contraintes ou les conditions initiales et limites. Résoudre un problème de MDO sous incertitudes demeure cependant un sujet de recherche ouvert [3]. Ceci s'explique notamment par le besoin complexe de résoudre à la fois un problème d'optimisation, un problème de couplage et un problème d'estimation de statistiques, sous la contrainte d'un nombre de simulations limité.

Dans ces travaux, nous présentons des éléments méthodologiques et logiciels récents. La section 2 décrit le cadre de la MDO sous incertitudes et introduit les notations. La section 3 présente des méthodes de résolution de problèmes MDO sous incertitudes à coût réduit. Ces méthodes sont illustrées dans la section 4. Enfin, la section 5 conclut ces travaux.

2 Cadre et notations

Par souci de simplicité, nous nous limitons dans ce document à un problème MDO à M disciplines, écrit selon la formulation MDF et comportant une unique contrainte scalaire de type inégalité :

$$\min_x f(x, c(x, u), u) \quad \text{s.c.} \quad g(x, c(x, u), u) \leq 0 \quad (1)$$

où $x = (x_0, x_1, \dots, x_M)$ et $u = (u_0, u_1, \dots, u_M)$. La i -ème discipline est caractérisée par une fonction de couplage h_i retournant une variable de couplage y_i à partir de variables de conception x_0 et de paramètres incertains x_0 communs à toutes les disciplines, de variables de conception x_i et de paramètres incertains u_i qui lui sont propres, et de variables de couplage $y_{-i} = (y_j)_{j \in \llbracket 1, M \rrbracket \setminus \{i\}}$ retournées par les autres

disciplines. La fonction c du problème (1) est définie comme une solution $y = (y_1, \dots, y_M)$ du système d'équations de couplage $\{y_i = h_i(x_0, x_i, u_i, y_{-i}), \forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket\}$. Cette solution existe lorsqu'en tout (x, u) , $h : y \mapsto (h_i(x_0, x_i, u_i, y_{-i}))_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ est continue et différentiable, ou continue et à valeurs dans son espace de définition de type convexe compact. En pratique, c s'obtient via un algorithme de MDA (*multidisciplinary analysis*), comme une méthode de point fixe de type Gauss-Seidel ou Jacobi, ou de recherche de zéro comme Newton-Raphson ou quasi-Newton. Par la suite, nous utiliserons l'abus de notations $f(x, u) \equiv f(x, c(x, u), u)$ et $g(x, u) \equiv g(x, c(x, u), u)$.

La solution du problème (1) dépend des paramètres incertains u et peut donc être sensible à ces derniers. Une approche classique consiste alors à modéliser ces paramètres par des variables aléatoires U de lois de probabilité connues et à intégrer ces informations probabilistes dans le problème de MDO. Le problème (1) peut ainsi se réécrire sous la forme

$$\min_x \mathbb{K}_f[f(x, U)] \quad \text{s.c.} \quad \mathbb{K}_g[g(x, U)] \leq 0 \quad (2)$$

où $\mathbb{K}_f[f(x, U)]$ et $\mathbb{K}_g[g(x, U)]$ sont des statistiques de $f(x, U)$ et $g(x, U)$ respectivement. Ce problème est alors appelé "problème de MDO sous incertitudes".

Il est important de noter que la fonction c dépend à la fois de x et de U , ce qui signifie que la résolution du couplage via un algorithme MDA se fait pour chaque instance de U . La figure 1 illustre la résolution numérique du problème (2). Pour chaque x fourni par l'optimiseur, un algorithme d'échantillonnage évalue sur l'espace incertain les fonctions d'objectif et de contrainte définies par la formulation.

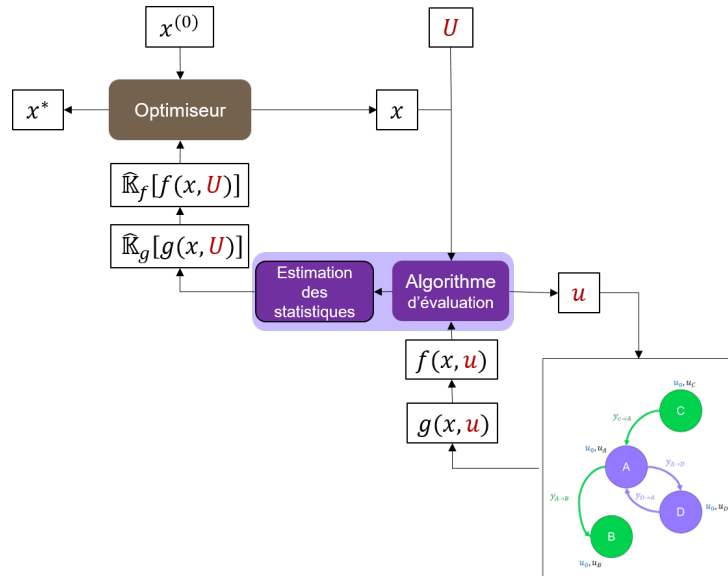


FIGURE 1 – Résolution numérique d'un problème de MDO sous incertitudes utilisant la formulation MDF et des disciplines A, B, C et D. Les variables de couplage n'apparaissent pas dans les $f(x, u)$ et $g(x, u)$ par souci de clarté. $\hat{\mathbb{K}}_f$ et $\hat{\mathbb{K}}_g$ sont les estimations \mathbb{K}_f et \mathbb{K}_g respectivement.

Par la suite, nous présentons des méthodes d'estimation de statistiques pouvant être combinées avec tout type d'algorithme d'optimisation pour résoudre le problème (2). Elles sont par ailleurs généralisables à d'autres statistiques et d'autres formulations MDO, et peuvent également être adaptées pour tenir compte de contraintes d'inégalité multidimensionnelles, voire de contraintes d'égalité. Les échantillons sont ensuite post-traités pour obtenir les estimations des statistiques d'intérêt. En guise d'illustration, nous prendrons la moyenne pour l'objectif, i.e. $\mathbb{K}_f \equiv \mathbb{E}$, et une marge de coefficient $\kappa > 0$ pour la contrainte, i.e. $\mathbb{K}_g \equiv \mathbb{M}_\kappa = \mathbb{E} + \kappa \cdot \mathbb{S}$, où \mathbb{E} et \mathbb{S} représentent respectivement l'espérance et l'écart-type.

3 Méthodes d'estimation des statistiques

La résolution d'un problème de MDO sous incertitudes tel que le problème (2) implique la combinaison d'un algorithme d'optimisation, d'un algorithme MDA et d'une méthode d'estimation des statistiques. Ces deux dernières techniques s'appliquent pour chaque valeur de x , comme illustré dans la

figure 1. Par la suite, nous présentons différentes techniques implémentées dans le logiciel libre GEMSEO [4] et pour partie conçues par les auteurs. GEMSEO permet également de construire des modèles de substitution et mener des études de quantification d'incertitudes dans un contexte multidisciplinaire.

3.1 Approches par échantillonnage

Une approche standard consiste à estimer les statistiques par échantillonnage de type Monte Carlo (MC) brut (*crude MC*). Étant données N réalisations indépendantes de U , notées $u^{(1)}, \dots, u^{(N)}$, les estimateurs sans biais des statistiques associées à l'objectif et à la contrainte s'écrivent respectivement

$$E_{\text{MC}}(f, x; N) = \sum_{i=1}^N \frac{f(x, u^{(i)})}{N} \text{ et } M_{\kappa, \text{MC}}(g, x; N) = E_{\text{MC}}(g, x; N) + \kappa \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(g(x, u^{(i)}) - E_{\text{MC}}(g, x; N))^2}{N-1}}.$$

Le problème de MDO (2) s'approxime alors par

$$\min_x E_{\text{MC}}(f, x; N) \quad \text{s.c.} \quad M_{\kappa, \text{MC}}(g, x; N) \leq 0. \quad (3)$$

Les échantillons $u^{(1)}, \dots, u^{(N)}$ doivent être les mêmes pour chaque valeur de x afin que le problème d'optimisation soit bien posé [12].

Le problème (3) comporte des avantages. En particulier, les estimateurs sont sans biais et sous certaines conditions, sa solution tend vers celle du problème (2) selon une loi normale avec une variance en $O(1/N)$. Par ailleurs, les estimateurs sont différentiables dès lors que f , g et c le sont, permettant l'utilisation d'algorithmes d'optimisation à gradient. En revanche, la lente décroissance de leurs écart-types en $O(\sqrt{N})$ les rend peu adaptés au cas de disciplines coûteuses à évaluer. Une alternative consiste à utiliser des méthodes quasi-MC plutôt que CMC pour générer les échantillons, telles que l'échantillonnage par hypercube latin ou les suites à discrétion faible. Des techniques de réduction de variance peuvent également être prometteuses, comme celles que nous proposons à la section 3.3. Enfin, lorsqu'échantillonner est trop coûteux, utiliser des modèles de substitution peut être une alternative pertinente.

3.2 Approches par modèles de substitution

3.2.1 Polynômes de Taylor

Si les fonctions $u \mapsto f(x, u)$ et $u \mapsto g(x, u)$ sont sensiblement linéaires, notamment du fait d'une faible variance de U , elles peuvent être approchées au moyen de polynômes de Taylor du premier ordre en $\mu \equiv \mathbb{E}[U]$. Le problème (2) est alors remplacé par

$$\min_x E_T(f, x) \quad \text{s.c.} \quad M_{\kappa, T}(g, x) \leq 0. \quad (4)$$

où $E_T(f, x) = f(x, \mu)$ et $M_{\kappa, T}(g, x) = g(x, \mu) + \kappa \cdot \nabla_u^T g(x, \mu) \Sigma \nabla_u g(x, \mu)$ où Σ est la matrice de covariance de U . Lorsque des dérivées partielles de g par rapport à U peuvent s'obtenir de manière analytique ou par différentiation implicite, le coût d'évaluation de $E_T(f, x)$ et $M_{\kappa, T}(g, x)$ représente seulement le double de celui de $f(x)$ et $g(x)$. En l'absence de calcul exact, elles peuvent être approchées par différences finies, ce qui à x fixé multiplie le nombre d'évaluations de f et g par la dimension de u . Si cette dernière est de l'ordre de quelques unités, l'approche reste bien plus avantageuse que l'utilisation d'estimateurs MC. En perspective, nous pourrions fournir des indicateurs qualitatifs sur le respect de l'hypothèse de linéarité.

3.2.2 Modèles de substitution par apprentissage

La principale limite des polynômes de Taylor repose sur l'hypothèse de linéarité de f et g par rapport à u aux différents x fournis par l'algorithme d'optimisation. Une alternative consiste alors à remplacer f et g au point x par des modèles de substitution \hat{f} et \hat{g} construits par apprentissage d'évaluations de f et g en N valeurs de U obtenues selon une technique de planification d'expériences, comme une approche quasi-MC par exemple. Le problème devient alors

$$\min_x \mathbb{E}[\hat{f}(x, U)] \quad \text{s.c.} \quad \mathbb{M}_{\kappa}[\hat{g}(x, U)] \leq 0 \quad (5)$$

où les statistiques peuvent être estimées à la précision souhaitée par échantillonnage intensif des modèles de substitution, voire analytiquement pour certains d'entre eux. Les réseaux à fonctions de base radiales [14], les modèles de régression par processus Gaussien [10] ou encore les développements en polynômes du chaos [5] (PCE - *polynomial chaos expansion*) sont des exemples de modèles de substitution. En pratique, GEMSEO permet d'utiliser tout type d'algorithme de modèles de régression.

La qualité d'un modèle de substitution peut être mesurée par ré-échantillonnage de type validation croisée ou via des échantillons additionnels, via des métriques comme l'erreur quadratique moyenne ou le coefficient de prédiction R^2 basé sur le rapport de cette erreur sur la variance des données.

3.2.3 Polynômes du chaos

Un PCE est un type de modèle de substitution particulièrement intéressant pour approcher la sortie d'une fonction dépendant de variables aléatoires. Au point x , il peut s'écrire sous la forme

$$\hat{f}(x, u) = \sum_{\alpha \in A} w_{\alpha}(x) \Phi_{\alpha}(u) = \sum_{\alpha \in A} w_{\alpha}(x) \prod_{i=1}^{n_u} \phi_{i, \alpha_i}(u_i)$$

où $A \subset \mathbb{N}^{n_u}$ est de cardinal fini $\#A$ et où $(\Phi_{\alpha})_{\alpha}$ est une base de fonctions orthonormales par rapport à la densité de probabilité de U . Certaines de ses statistiques ont des expressions analytiques. Par exemple, l'espérance et la variance du PCE sont respectivement $w_{(0, \dots, 0)}(x)$ et $\sum_{\alpha \setminus \{(0, \dots, 0)\}} w_{\alpha}^2(x)$, et des résultats analogues peuvent être obtenus pour des indices de sensibilité comme ceux de Sobol'.

3.2.4 Polynômes du chaos et dérivées

Dans nos travaux, nous proposons d'utiliser les dérivées partielles de f par rapport aux variables incertaines u pour améliorer la précision du PCE et celles par rapport aux variables de conception x pour permettre l'utilisation d'algorithmes d'optimisation basés sur le gradient.

Dérivées par rapport aux variables incertaines. Des travaux récents proposent d'améliorer la qualité d'un PCE (*gradient-enhanced PCE*) en ajoutant les dérivées par rapport à u dans la base d'apprentissage [9]. Le problème d'estimation de $w(x) = (w_{\alpha}(x))_{\alpha \in A}$ ne s'écrit plus comme $\min_w \|Aw - b(x)\|$ mais comme $\min_w \|A'w - b'(x)\|$ où

$$A = \begin{pmatrix} \Phi(u^{(1)}) \\ \vdots \\ \Phi(u^{(N)}) \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} f(x, u^{(1)}) \\ \vdots \\ f(x, u^{(N)}) \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} A \\ \nabla_u \Phi(u^{(1)}) \\ \vdots \\ \nabla_u \Phi(u^{(N)}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b'(x) = \begin{pmatrix} b \\ \nabla_u f(x, u^{(1)}) \\ \vdots \\ \nabla_u f(x, u^{(N)}) \end{pmatrix}.$$

Les algorithmes classiques peuvent être utilisés pour résoudre ce problème, comme la méthode des moindres carrés ordinaires. Cette méthode peut être couplée à des techniques de régularisation pour éviter un sur-ajustement lorsque $N(1 + n_u) < \#A$, comme l'utilisation d'une pénalité L_1 (approche lasso) ou L_2 (approche ridge), ou encore la méthode de régression LARS. Plus récemment, nous nous sommes intéressés à l'utilisation des techniques de traitement du signal, comme le *matching pursuit*, l'*orthogonal matching pursuit*, le *basis pursuit* et le *basis pursuit denoise*, ainsi qu'à la technique de l'espace nul lorsque les dérivées sont calculées par la méthode de l'adjoint [9].

Dérivées par rapport aux variables de conception. Par ailleurs, lorsque les échantillons de la base d'apprentissage comportent les dérivées partielles par rapport à x , nous proposons une méthode pour dériver les statistiques du PCE par rapport aux variables de conception afin de tirer profit d'optimiseurs utilisant le gradient dans la figure 1. Cette approche est bien moins coûteuse que d'utiliser une méthode de différences finies qui reviendrait à générer $N(1 + n_u)$ échantillons par itération de la boucle d'optimisation au lieu de N . En guise d'illustration, considérons l'estimateur des moindres carrés. Les quantités $f(x, u)$ et $\nabla_x f(x, u)$ peuvent alors être estimées par $\hat{f}(x, u) = \hat{w}^t(x) \Phi(u)$ et $\nabla_x \hat{f}(x, u) = \tilde{w}^t(x) \Phi(u)$ respectivement où $\hat{w}(x) = (A^t A)^{-1} A^t b(x)$ et $\tilde{w}(x) = (A^t A)^{-1} A^t \tilde{b}(x)$ avec $\tilde{b}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, u^{(i)})}{\partial x_j} \end{pmatrix}_{\substack{i \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n_x \rrbracket}}$.

Dérivées par rapport aux variables de conception incertaines. Enfin, dans le cas spécial où les variables incertaines sont les variables de conception, le problème (2) peut se réécrire à partir de PCEs :

$$\min_x \mathbb{K}_f[\hat{f}(x+U)] \quad \text{s.c.} \quad \mathbb{K}_g[\hat{g}(x+U)] \leq 0$$

où U est de moyenne nulle. [9] ont proposé une méthode pour estimer les dérivées des statistiques par rapport à x sans recourir à des dérivées dans la base d'apprentissage ou à la technique des différences finies. Elle requiert $2n_u$ nouveaux PCEs $\hat{f}^{[2n_u]}, \dots, \hat{f}^{[-1]}, \hat{f}^{[1]}, \dots, \hat{f}^{[n_u]}$ où $\hat{f}^{[j]}$ est construit à partir de $(u^{(i),[j]}, f(x, u^{(i)}))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$, avec $u^{(i),[j]} = (u_1^{(i)}, \dots, u_{|j|-1}^{(i)}, u_{|j|}^{(i)} + \text{signe}(j)\varepsilon_{|j|}, u_{|j|+1}^{(i)}, \dots, u_{n_u}^{(i)})$. La dérivée partielle $\frac{\partial \mathbb{K}_f[\hat{f}(x+U)]}{\partial x_j}$ est alors approchée par $\frac{\mathbb{K}_f[\hat{f}^{[-j]}(x+U)] - \mathbb{K}_f[\hat{f}^{[j]}(x+U)]}{2\varepsilon_j}$. Cette méthode ne requiert pas de nouvelles évaluations de f mais de choisir les pas de discrétisation $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_u}$.

3.3 Approches par échantillonnage assisté par des modèles de substitution

Les approches par modèle de substitution décrites dans la section 3.2 ont l'avantage d'être bien moins onéreuses que les approches par échantillonnage décrites dans la section 3.1. En revanche, contrairement à ces dernières, elles ne garantissent pas que les estimateurs de statistique associés sont sans biais et n'offrent pas de propriétés asymptotiques. Les deux approches peuvent être combinées pour bénéficier de leurs forces tout en évitant leurs faiblesses. Dans [1], nous avons proposé des variables de contrôle (CV) basées sur des modèles de substitution. Nous avons montré que cette approche de réduction de variance est d'autant plus prometteuse que les estimateurs de statistiques du modèle de substitution \hat{f} sont corrélés avec les estimateurs des statistiques du modèle f , ce qui n'exige pas forcément du modèle de substitution une qualité élevée. Dans le cas de l'espérance, l'estimateur s'écrit

$$E_{CV}(f, x; N) = E_{MC}(f, x; N) - \frac{C_{MC}(f, \hat{f}, x; N)}{V_{MC}(f, x; N)} (E_{MC}(\hat{f}, x; N) - \mathbb{E}[\hat{f}(x, U)])$$

où C_N et V_N sont respectivement l'estimateur MC de la covariance entre $\hat{f}(x, U)$ et $f(x, U)$ et l'estimateur MC de la variance de $f(x, U)$. Cette approche est compatible avec tout type de statistique et tout type de modèle de substitution. Concernant la statistique $\mathbb{E}[\hat{f}(x, U)]$, il est possible de l'estimer très finement par échantillonnage puisque le coût d'évaluation de \hat{f} est négligeable, ou bien de l'écrire analytiquement pour certains modèles de substitution comme le PCE. Enfin, nous avons montré qu'il était possible d'associer plusieurs variables de contrôle (MCV) en vue d'obtenir une réduction de variance supplémentaire, qu'elles soient basées sur différents modèles de substitution ou différentes statistiques [7].

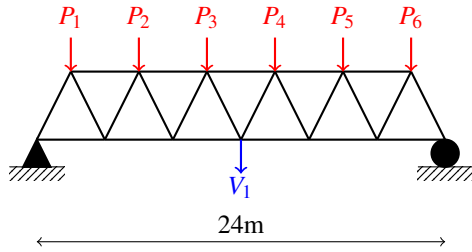
4 Applications

Cette section présente deux applications réalisées au moyen du logiciel GEMSEO.

4.1 Analyse de sensibilité d'une structure en treillis

Cette première application illustre les méthodes de réduction de variance basées sur des modèles de substitution présentées à la section 3.3 pour une solution x donnée. Elle repose sur une structure en treillis de vingt-quatre mètres de long [2, 6] représentée dans la figure 2 et pour laquelle on cherche à estimer des statistiques du déplacement V_1 . La partie supérieure est soumise à six charges verticales équidistantes P_1, \dots, P_6 (N). Cette structure illustrée par la figure 2 comprend 11 barres horizontales, de section transversale A_1 (m²) et de module de Young E_1 (Pa), et 12 barres obliques, de section transversale A_2 (m²) et de module de Young E_2 (Pa). Les variables $A_1, A_2, E_1, E_2, P_1, \dots, P_6$ sont incertaines et représentées par des variables aléatoires indépendantes de lois log-normales pour A_1, A_2, E_1, E_2 et Gumbel pour P_1, \dots, P_6 , dont les moyennes et écart-types sont donnés dans la figure 2.

Dans ces travaux, nous estimons l'espérance du déplacement V_1 en utilisant la méthode MC comme référence, la méthode CV prenant l'espérance du PCE comme CV et la méthode MCV considérant à la fois l'espérance et la variance du PCE comme CVs. Nous utilisons $N = 100$ échantillons. Le tableau 1 montre des facteurs de réduction de variance importants associés aux méthodes CV, notamment en



Variable	Distribution	Moyenne	Écart-type
E_1	Lognormal	2.10×10^{11}	$3 \times 2.10 \times 10^{10}$
E_2	Lognormal	2.10×10^{11}	$3 \times 2.10 \times 10^{10}$
A_1	Lognormal	2.0×10^{-3}	$3 \times 2.0 \times 10^{-4}$
A_2	Lognormal	1.0×10^{-3}	$3 \times 1.0 \times 10^{-4}$
P_1 - P_6	Gumbel	5.0×10^4	$3 \times 7.5 \times 10^3$

FIGURE 2 – Vue de la structure en treillis (gauche) et des variables incertaines (droite).

combinant les CVs. Par ailleurs, nous avons pu montrer qu'en régime asymptotique, utiliser l'espérance du PCE comme CV réduit la variance de l'estimateur de 77% et ajouter sa variance pousse la réduction à 93%. De même, pour l'estimation de la variance, nous avons pu montrer que l'utilisation de la variance du PCE réduit la variance de l'estimateur de 27% et ajouter son espérance double la réduction.

	V	V(MC) / V	ÉT	ÉT(MC) / ÉT
MC	1.8×10^{-5}	1	4.24×10^{-3}	1
CV	5.94×10^{-6}	3	2.44×10^{-3}	1.7
MCV	1.26×10^{-6}	14.3	1.12×10^{-3}	3.8

TABLE 1 – Variance (V) et écart-type (É) des estimateurs MC, CV et MCV de l'espérance, ainsi que le rapport de ces mesures de dispersion à celles obtenues avec l'estimateur MC.

Enfin, nous avons étendu cette étude à l'estimation d'indices de sensibilité, comme les coefficients de corrélation de Pearson, les indices DGSM (*derivative-based global sensitivity measures*) et les indices de Sobol' d'ordre 1 et total. Précisément, pour chaque indice, nous avons considéré comme CVs l'espérance, la variance et l'ensemble des indices de sensibilité du PCE. La figure 3 montre ainsi la réduction de variance des indices de Sobol' d'ordre total associés aux différentes sources d'incertitude. Nous avons constaté que l'ajout de CVs fortement corrélées peut entraîner des soucis numériques. Face à ce problème, nous avons proposé un algorithme glouton ajoutant séquentiellement les CVs réduisant le plus la variance jusqu'à satisfaire un critère d'arrêt [7].

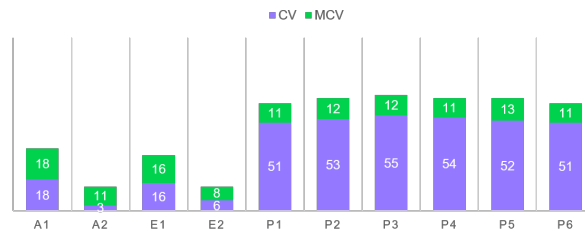


FIGURE 3 – Réduction de variance (en %) des estimateurs CV et MCV des indices de Sobol' d'ordre total par rapport à l'estimateur MC.

4.2 Optimisation sous incertitudes d'une paire de satellites de télécommunication

Lors de la conception de satellites, il est courant d'ajouter des marges de sécurité aux contraintes afin de garantir des solutions résilientes aux incertitudes. Cette approche a le défaut de conduire à des solutions conservatrices. Des solutions plus performantes peuvent être obtenues en modélisant des sources d'incertitude de façon probabiliste.

Dans [11], nous avons cherché à maximiser la durée de vie d'une paire de satellites géostationnaires lancés ensemble, sous contrainte d'une masse maximale au lancement. Pour chaque satellite, des contraintes portent sur une durée maximale pour atteindre sa position orbitale finale, une consommation maximale de propergol électrique et une masse sèche donnée. Chaque satellite s'accompagne de deux variables de conception, à savoir sa masse mouillée initiale (masse sèche et quantité de propergol) et une variable a-dimensionnée impactant la durée de la phase de transfert orbitale utilisant la propulsion

électrique. Ce problème est sujet à dix-huit sources d'incertitude, comme le chargement initial du propergol électrique ou la précision de mesure du propergol électrique en fin de vie. Elles sont modélisées par des lois normales. Chaque contrainte d'inégalité de la forme $g(x, u) \leq 0$ est réécrite sous la forme $\mathbb{P}[g(x, U) > 0] \leq \epsilon$ tandis que la contrainte égalité $h(x, u)$ est réécrite sous la forme $\mathbb{E}[h(x, U)]$. Enfin, les contraintes sont calculées à partir de la formulation MDF reposant sur onze disciplines. Chaque satellite dispose de cinq disciplines fortement couplées tandis que les satellites ne sont couplés entre eux que par la masse totale au lancement.

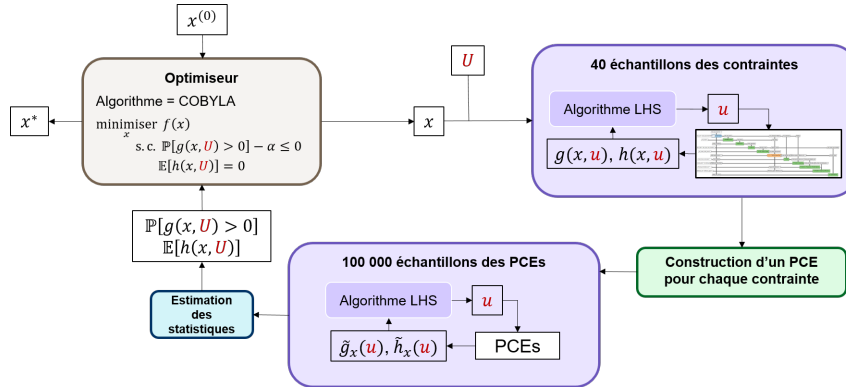


FIGURE 4 – Processus MDO sous incertitudes pour le problème de durée de vie des satellites.

Nous avons résolu ce problème en construisant un modèle de substitution des contraintes de type PCE tel qu'illustré dans la figure 4. Pour cela, une analyse de sensibilité préliminaire a permis de montrer qu'un tiers des sources d'incertitude jouent un faible rôle sur la variance des variables d'intérêt. Par la suite, nous avons mis en place la boucle d'optimisation en construisant à chaque itération un PCE sur l'espace incertain à partir de 40 échantillons, de degré maximal égal à 2 avec au plus 30 termes. La qualité du PCE étant la même avec dix-huit ou douze variables incertaines, nous avons gardé l'intégralité de ces dernières pour estimer au mieux les probabilités par échantillonnage du PCE. En effet, retirer les moins influentes sur la variance pourrait dégrader l'estimation des probabilités. Une alternative consisterait à utiliser une analyse de sensibilité orientée par l'estimation de probabilités. Enfin, nous avons comparé les résultats de cette optimisation sous incertitudes avec l'approche plus classique consistant à ajouter des marges sur les contraintes. Tout d'abord, nous avons considéré la solution du problème d'optimisation ne tenant pas compte des incertitudes et avons propagé ces dernières dans le système multidisciplinaire. Les contraintes actives en cette solution ne sont plus respectées dans 50% des cas, montrant le danger d'ignorer les incertitudes. Ensuite, nous avons considéré l'approche par ajout de marges, en les prenant de l'ordre de trois fois l'écart-type des contraintes à l'optimum sans incertitudes. La solution de ce problème est faisable à 100% mais s'accompagne d'une durée de vie de 19.41 années, contre 20.43 en l'absence d'incertitudes, soit une diminution de 12.2 mois (soit 5%). Enfin, nous nous sommes intéressés à la solution de l'optimisation sous incertitudes. Elle aussi est faisable à 100% mais diminue la durée de vie de 3.4 mois seulement (soit 1.7%). Autrement dit, l'utilisation de probabilités à la place des marges habituelles permet de rallonger la durée de vie des satellites de 9 mois.

5 Conclusion

La résolution d'un problème de MDO sous incertitudes combine des algorithmes d'optimisation, d'estimation de statistiques et de couplage. Dans ces travaux, nous avons présenté un cadre permettant de poser et résoudre un tel problème à partir de méthodes dépendant du budget de simulation. Nous avons mis en avant diverses estimations de statistique, allant de l'économique utilisation de polynômes de Taylor à la coûteuse technique d'échantillonnage, en passant par l'utilisation de modèles de substitution construits par apprentissage de données. Concernant ces derniers, nous avons présenté des techniques pour améliorer l'utilisation des polynômes du chaos à partir des dérivées des objectifs et contraintes, et montré l'avantage à les utiliser comme variables de contrôle pour améliorer la précision des estimateurs de Monte Carlo. Cet avantage a été illustré sur un problème de structure en treillis. Le cadre plus général a lui été illustré sur un problème d'optimisation de durée de vie de satellite.

Parmi les perspectives méthodologiques, il serait opportun de contrôler la précision des estimateurs de Monte Carlo dans la boucle d'optimisation et d'étendre l'usage des dérivées à d'autres modèles de substitution. De plus, construire les modèles de substitution sur l'union des espaces de conception et incertain pourrait réduire le budget de calcul. Concernant les perspectives logicielles, nous pensons enrichir les fonctionnalités de GEMSEO[®] pour mieux adresser des problèmes de fiabilité, comme des problèmes d'optimisation fiabiliste (RBDO - *reliability-based design optimization*) ou des problèmes d'analyse de sensibilité liés à des événements rares.

Remerciements

Ces travaux ont été menés avec le soutien financier du programme France 2030 dans le cadre du projet ANR-10-AIRT-01. Ils ont aussi été soutenus par le projet NEXTAIR, qui a reçu un financement du programme de recherche et d'innovation Horizon Europe de l'Union européenne dans le cadre de la convention de subvention n° 101056732. Les points de vue et opinions exprimés sont toutefois ceux des auteurs uniquement et ne reflètent pas nécessairement ceux de l'Union européenne. Ni l'Union européenne ni l'autorité octroyant la subvention ne peuvent en être tenues responsables.

Références

- [1] Mohamed Reda El Amri, Paul Mycek, Sophie Ricci, and Matthias De Lozzo. Multilevel surrogate-based control variates, 2024.
- [2] Géraud Blatman and Bruno Sudret. Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression. *Journal of Computational Physics*, 230(6) :2345–2367, 2011.
- [3] Loïc Brevault and Mathieu Balesdent. *Uncertainty-Based Multidisciplinary Design Optimization (UMDO)*, pages 235–292. Springer International Publishing, Cham, 2020.
- [4] F. Gallard, C. Vanaret, D. Guénot, V. Gachelin, R. Lafage, B. Pauwels, P.-J. Barjhoux, and A. Gazaix. Gems : A python library for automation of multidisciplinary design optimization process generation. In *2018 AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 2018.
- [5] Roger G Ghanem and Pol D Spanos. *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Courier Corporation, 2003.
- [6] Sang Hoon Lee and Byung Man Kwak. Response surface augmented moment method for efficient reliability analysis. *Structural Safety*, 28(3) :261–272, 2006.
- [7] Matthias De Lozzo, Olivier Sapin, and Paul Mycek. Sensitivity analysis using multilevel monte carlo and surrogate-based control variates. In *11th International Conference on Sensitivity Analysis of Model Output, April 23–25 2025, Grenoble, France, 2025*.
- [8] Joaquim Martins and Andrew Lambe. Multidisciplinary design optimization : A survey of architectures. *AIAA Journal*, 51 :2049–2075, 09 2013.
- [9] Riccardo Mura, Tiziano Ghisu, and Shahrokh Shahpar. Least squares approximation-based polynomial chaos expansion for uncertainty quantification and robust optimization in aeronautics. In *AIAA AVIATION 2020 FORUM*, 2020.
- [10] Carl Edward Rasmussen and Christopher K. I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*. The MIT Press, 11 2005.
- [11] Olivier Sapin, Loïc Cousin, Nicolas Roussouly, François Gallard, Anne Gazaix, Matthias De Lozzo, Xavier Fosse, Nicolas Sarda, and Gaspard Berthelin. *Industrial Application of a Multi-Disciplinary Design Optimization with Uncertainties to a Pair of Telecommunication Satellites*.
- [12] Alexander Shapiro. Monte carlo sampling methods. In *Stochastic Programming*, volume 10 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, pages 353–425. Elsevier, 2003.
- [13] Charlie Vanaret, François Gallard, and Joaquim Martins. On the consequences of the "no free lunch" theorem for optimization on the choice of an appropriate MDO architecture. In *18th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, page 3148, 2017.
- [14] Emmanuel Viennet. Réseaux à fonctions de base radiales. In Younès Bennani, editor, *Apprentissage connexionniste*, I2C Hermès, page 105. Lavoisier, 2006. 18 pages.
- [15] D.H. Wolpert and W.G. Macready. No free lunch theorems for optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1(1) :67–82, 1997.