

Développement d'une méthode hybride TVRC-MEF pour les problèmes vibro-acoustiques moyennes fréquences.

R. Thevenot^{1,2}, A. Barbarulo², G. Puel², P. Dec¹

¹ SNCF-DTIPG, La plaine - Saint-Denis, {raphael.thevenot, patryk.dec}@sncf.fr

² LMPS (Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay), Gif-sur-Yvette, {raphael.thevenot, andrea.barbarulo, guillaume.puel}@centralesupelec.fr

Abstract — La méthode des éléments finis (MEF), largement adoptée pour sa polyvalence et son aptitude à traiter des géométries complexes, présente des coûts de calcul prohibitifs pour l'analyse des systèmes vibro-acoustiques à haute fréquence. À l'inverse, la théorie variationnelle des rayons complexes (TVRC) offre une efficacité remarquable pour les problèmes en moyenne fréquence avec des géométries simples. Afin de tirer le meilleur parti des deux méthodes nous proposons une approche hybride, combinant la MEF pour les zones de géométries complexes avec la TVRC pour réduire significativement les coûts de calcul.

Mots clés — TVRC, MEF, vibro-acoustique, hybride, moyenne fréquence, métamatériaux

1 Introduction

Le domaine des transports est de plus en plus à la recherche de nouveaux moyens de réduction du bruit, que celui-ci soit extérieur ou intérieur [1]. C'est notamment le cas du transport ferroviaire, pour lequel des entreprises comme SNCF cherchent à améliorer le confort acoustique en cabine. Pour cela, les métamatériaux sont une piste prometteuse afin d'obtenir des panneaux plus absorbants et plus légers à la fois [2]. Cependant, la prédiction des performances de ces nouveaux panneaux avec la méthode des éléments finis (MEF) nécessite des simulations très coûteuses du fait de la nécessité de prendre en compte une large bande de fréquences et des géométries potentiellement complexes. C'est pourquoi nous proposons ici d'utiliser une méthode hybride entre la MEF et la théorie variationnelles des rayons complexes (TVRC) [4] afin de tirer le meilleur parti de chaque méthode.

D'un côté, la TVRC fait partie de la famille des méthodes de Trefftz [7], dont le principe (en acoustique) est de rechercher le champ de pression comme une combinaison linéaire d'ondes planes de directions différentes, qui sont toutes solutions de l'équation de Helmholtz à l'intérieur du domaine, et à qui on demande de vérifier faiblement les conditions aux limites sur les frontières du domaine [5, 6]. Cette méthode ne nécessite pas l'utilisation d'un maillage (les degrés de liberté correspondant aux directions des ondes planes considérées dans chaque sous-domaine), mais son efficacité peut être limitée dans le cas de géométries complexes : en effet, les méthodes de Trefftz nécessitent de considérer un domaine étoilé, ce qui implique l'introduction de multiples sous-domaines pour satisfaire cette condition dans des géométries complexes, et donc l'augmentation du nombre total d'ondes planes considérées.

D'un autre côté, la MEF est une méthode particulièrement répandue et qui peut s'adapter facilement à de multiples applications [8]. Sa principale limitation dans le contexte évoqué ici est son coût fortement croissant quand on cherche à résoudre des problèmes d'ondes en moyennes fréquences, afin de compenser l'erreur de pollution associée à ces problèmes [3].

Par conséquent, nous cherchons ici à associer ces deux méthodes : la MEF sert à modéliser le couplage vibro-acoustique au sein des géométries complexes des métamatériaux étudiés, tandis que la TVRC permet de calculer à moindre coût la propagation acoustique autour de ces derniers. Les deux méthodes sont couplées en exprimant les conditions de continuité de pression et de vitesse à l'interface entre les deux sous-domaines respectivement associées à chaque méthode. Dans un premier temps, on s'assure de la validité de la méthode hybride obtenue en comparant ses résultats avec la MEF sur un cas académique 2D. Dans une deuxième temps, un exemple plus réaliste à base de résonateurs de Helmholtz permet de quantifier les gains obtenus. Enfin, des exemples à base de métamatériaux sont en cours d'élaboration.

2 Formulation hybride TVRC-MEF pour l'acoustique

Cette section présente le cadre d'application de la méthode hybride TVRC-MEF pour l'acoustique. Tout d'abord le problème étudié ainsi que les équations associées sont présentés, puis la formulation hybride TVRC-MEF est développée en détail avant de décrire la stratégie de résolution numérique choisie.

2.1 Problème de référence

La figure 1 illustre le problème de référence étudié ici. Il est composé de deux domaines acoustiques couplés entre eux: Ω_1 qui sera traité par la MEF et Ω_2 qui sera traité par la TVRC. On note p_i le champ complexe de pression acoustique restreint au domaine Ω_i ($i = 1$ ou 2). Chaque champ p_i vérifie l'équation d'Helmholtz (1). Cette équation est complétée par deux types de conditions aux limites: soit en pression (2), soit en vitesse (3). Enfin, les deux domaines sont couplés entre eux en imposant à la fois la continuité des champs de pression à l'interface (4) ainsi que l'équilibre des flux (5).

Équation de Helmholtz:

$$\Delta p_i(\underline{x}) + \left(\frac{\omega}{c_0} + i\alpha_0\right)^2 p_i = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega_i \quad (1)$$

Conditions aux limites:

$$p_i(\underline{x}) = p_{imp} \quad \forall \underline{x} \in \partial_p \Omega_i \quad (2)$$

$$\frac{-i}{\rho_0 \omega} \nabla p_i \cdot \underline{n}_i = v_{imp} \quad \forall \underline{x} \in \partial_v \Omega_i \quad (3)$$

Continuité entre domaines:

$$p_2 - p_1 = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Gamma \quad (4)$$

$$\nabla p_1 \cdot \underline{n}_1 + \nabla p_2 \cdot \underline{n}_2 = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Gamma \quad (5)$$

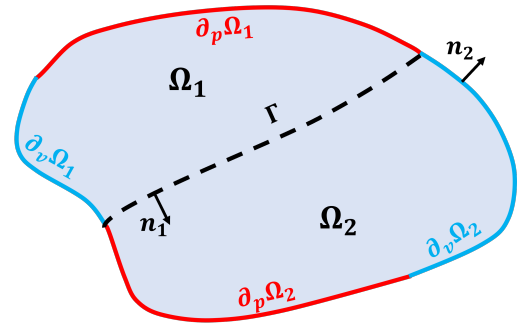


Figure 1: Problème acoustique de référence.

ω désigne la pulsation étudiée, et ρ_0 , c_0 et α_0 sont la densité, la vitesse du son et le coefficient d'amortissement du milieu acoustique (on notera que α_0 peut dépendre de ω). Les vecteurs \underline{n}_i sont les normales unitaires sortantes des domaines Ω_i .

2.2 Formulation hybride

Avant de présenter la formulation hybride du problème acoustique, nous commençons par définir les espaces admissibles pour chaque domaine. En introduisant N_h le nombre de noeuds du maillage de Ω_1 et $\{\phi_n\}_{1 \leq n \leq N_h}$ les fonctions de forme associées, l'espace des solutions éléments finis admissibles \mathcal{A}_1^h et admissibles à zéro $\mathcal{A}_{1,0}^h$ sont définis tels que:

$$\mathcal{A}_1^h = \left\{ p_1(x) = \sum_{n=1}^{N_h} p_n \phi_n(x) \quad \forall x \in \Omega_1 \mid p_1 = p_{imp} \text{ on } \partial_p \Omega_1 \right\} \quad (6)$$

$$\mathcal{A}_{1,0}^h = \left\{ p_1(x) = \sum_{n=1}^{N_h} p_n \phi_n(x) \quad \forall x \in \Omega_1 \mid p_1 = 0 \text{ on } \partial_p \Omega_1 \right\} \quad (7)$$

L'espace des solutions TVRC admissibles est défini par le nombre d'ondes planes utilisées N_a et leurs directions de propagation respectives $\{\xi_n\}_{1 \leq n \leq N_a}$:

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ p_2(x) = \sum_{n=1}^{N_a} a_n \exp\left(i\left(\frac{\omega}{c_0} + i\alpha_0\right)\xi_n \cdot x\right) \quad \forall x \in \Omega_2 \right\} \quad (8)$$

En appliquant la MEF à l'équation (1), puis en utilisant les équations (3) et (5), il découle l'équation (9). Ensuite, il suffit d'appliquer la TVRC au domaine Ω_2 avec la condition en pression (4) sur l'interface Γ afin d'obtenir l'équation (10).

Ainsi le problème hybride TVRC-MEF s'écrit:

Trouver $p_1, p_2 \in \mathcal{A}_1^h \times \mathcal{H}_2$ tels que:

$$\int_{\Omega_1} \nabla p_1 \cdot \nabla \bar{q}_1 - \left(\frac{\omega}{c_0} + i\alpha_0 \right)^2 p_1 \bar{q}_1 d\Omega + \int_{\Gamma} (\nabla p_2 \cdot \underline{n}_2) \bar{q}_1 ds = i\rho_0\omega \int_{\partial_v\Omega_1} v_{imp} \bar{q}_1 ds \quad (9)$$

$$\int_{\partial_p\Omega_2} (p_2 - p_{imp}) \left(\frac{i}{\rho_0\omega} \overline{\nabla q_2} \cdot \underline{n}_2 \right) ds + \int_{\partial_v\Omega_2} \left(\frac{-i}{\rho_0\omega} \nabla p_2 \cdot \underline{n}_2 - v_{imp} \right) \bar{q}_2 ds + \int_{\Gamma} (p_2 - p_1) \left(\frac{i}{\rho_0\omega} \overline{\nabla q_2} \cdot \underline{n}_2 \right) ds = 0 \quad (10)$$

$$\forall q_1, q_2 \in \mathcal{A}_{1,0}^h \times \mathcal{H}_2$$

Remarque: Dans ce travail, seul le cas du couplage direct est étudié mais le choix d'un couplage dual ou mixte aurait pu être fait. La comparaison entre les différentes formulations du couplage n'est donc pas examinée ici.

2.3 Stratégie de résolution numérique

Maintenant que la formulation hybride a été présentée, certains aspects de l'implémentation numérique méritent d'être précisés. Tout d'abord, en introduisant les expressions des différents champs admissibles dans les équations (9) et (10), il s'en suit la forme discrète suivante:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & -i\rho_0\omega\bar{\mathbb{C}}^T \\ \mathbb{C} & \mathbb{B} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{L} \end{pmatrix} \quad (11)$$

avec \mathbb{Z} , \mathbf{F} , \mathbb{B} et \mathbf{L} les opérateurs classiques de la MEF et de la TVRC respectivement, et \mathbf{p} et \mathbf{a} les inconnues associées. L'opérateur de couplage \mathbb{C} est simplement calculé par une intégration de Gauss après évaluation des fonctions de forme de la TVRC en chaque point d'intégration.

Il est important de noter que l'opérateur TVRC \mathbb{B} peut être très mal conditionné : il est donc nécessaire de choisir une stratégie de résolution du système linéaire adaptée afin d'éviter les instabilités numériques. Pour ce faire, la méthode du complément de Schur a été choisie. Un premier choix pourrait être de condenser la partie TVRC sur la partie éléments finis:

$$\underbrace{\left[\mathbb{Z} + i\rho_0\omega\bar{\mathbb{C}}^T \mathbb{B}^{-1} \mathbb{C} \right]}_{\mathbb{H}} \mathbf{p} = \mathbf{F} + i\rho_0\omega\bar{\mathbb{C}}^T \mathbb{B}^{-1} \mathbf{L} \quad (12)$$

Cependant, l'opérateur \mathbb{H} (qui est creux) peut avoir une largeur de bande très importante, ce qui fait exploser les coûts de résolution. C'est pourquoi la seconde option a été choisie : elle consiste à condenser la partie éléments finis sur la TVRC, ce qui permet aussi de bénéficier des solveurs classiques de la MEF:

$$\left[\mathbb{B} + i\rho_0\omega\mathbb{C}\mathbb{Z}^{-1}\bar{\mathbb{C}}^T \right] \mathbf{a} = \mathbf{L} - \mathbb{C}\mathbb{Z}^{-1}\mathbf{F} \quad (13)$$

$$\mathbb{Z}\mathbf{p} = \mathbf{F} + i\rho_0\omega\bar{\mathbb{C}}^T \mathbf{a} \quad (14)$$

3 Exemple numérique: utilisation de la MEF sur les discontinuités des conditions limites

3.1 Présentation du cas d'étude et première analyse

Un premier exemple d'utilisation de la méthode hybride TVRC-FEM est l'amélioration de la convergence en présence de discontinuités aux bords. En effet, dans le cas de conditions limites discontinues, la TVRC est limitée en précision à cause d'un phénomène de Gibbs, comme illustré par la figure 3. Ce phénomène est étudié dans le cas simple d'un carré de taille 1 avec une pression imposée à 1 sur le bord droit et zéro ailleurs, comme illustré par la figure 2. Le problème hybride est défini par une bande éléments finis de taille d le long des quatre bords du carré, la partie centrale étant traitée avec la TVRC. Les paramètres du milieu acoustique sont fixés tels que $\rho_0 = 1 = c_0$ et $\alpha_0 = 10^{-3}$.

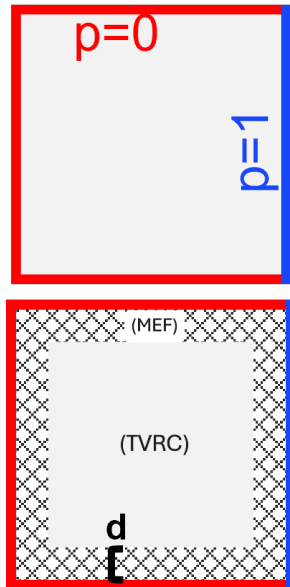


Figure 2: A gauche, le problème acoustique avec une discontinuité des conditions limites. A droite, la version hybride du même problème avec la partie MEF et la partie TVRC.

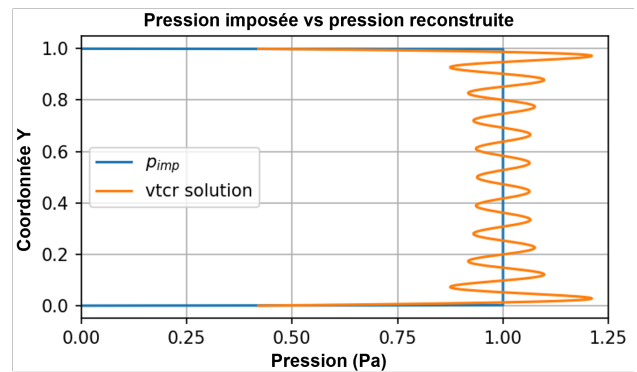


Figure 3: Comparaison de la solution TVRC avec la condition limite imposée sur le bord de droite pour $f = 8.1$ Hz.

On commence par comparer la méthode hybride à la TVRC et la MEF à la fréquence fixée $f = 8.1$ Hz. Les paramètres numériques de l'étude sont donnés par le tableau 1. La figure 4 montre la partie réelle du champ de pression pour les trois méthodes : on constate que les solutions sont quasiment identiques. Afin de mieux voir les écarts entre les méthodes, le logarithme (en base 10) de l'erreur relative définie par (15) est présenté figure 5.

$$\varepsilon(x) = \frac{|p_{methode1}(x) - p_{methode2}(x)|}{\max |p_{FEM}|} \quad (15)$$

L'erreur entre la TVRC et la MEF sur la figure de gauche montre l'effet des deux discontinuités sur l'erreur globale de la TVRC, ce qui limite la précision de cette dernière. En revanche, l'utilisation de la méthode hybride et plus particulièrement des éléments finis autour des discontinuités permet de réduire l'erreur moyenne de deux ordres de grandeur par rapport à la TVRC seule. De plus, la méthode hybride permet un gain de coût de calcul significatif par rapport à la MEF en divisant par 36 le temps de calcul et par 4 le nombre de degrés de liberté (cf. tableau 2).

Table 1: Paramètres numériques pour la comparaison des trois méthodes.

Taille du maillage	Type d'éléments	d	Fréquence
0.005	T6	0.06	8.1 Hz

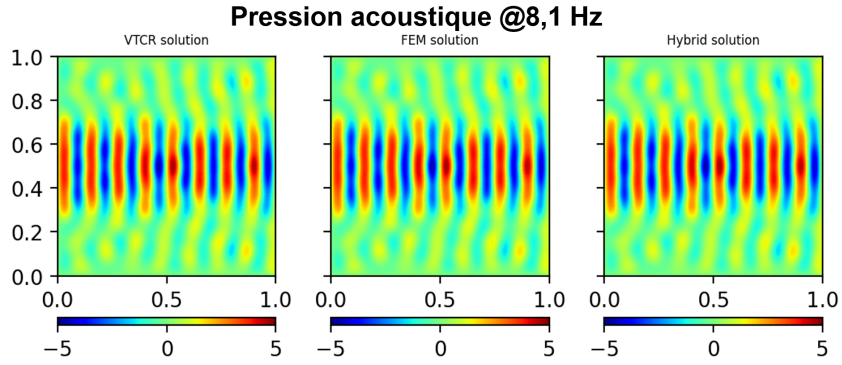


Figure 4: Champs de pression réelle pour les trois différentes méthodes numériques pour $f = 8.1$ Hz.

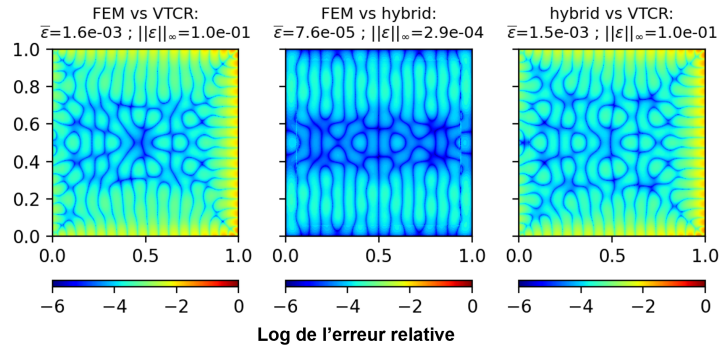


Figure 5: Logarithme de l'erreur relative $\log_{10}(\epsilon)$ pour comparer les trois méthodes entre elles. À gauche la TVRC est comparée à la MEF, au centre la méthode hybride avec la MEF, et à droite la TVRC avec l'hybride.

Table 2: Performances numériques des trois méthodes. La résolution des systèmes éléments finis est faite avec la méthode directe de *scipy* (décomposition LU).

Méthode	MEF	hybride	TVRC
Nombre de DdL	186 841	45364	80
Temps de calcul	40s	1.15s	0.006s

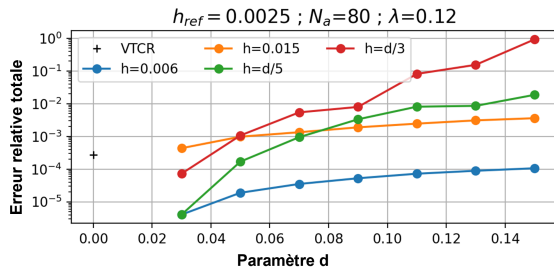
3.2 Étude de l'effet du paramètre d sur la convergence

Après cette première analyse, cette partie discute de l'effet du paramètre d sur la convergence de la méthode hybride. En effet, plus d est petit, plus rapide est la méthode hybride, mais la solution est potentiellement dégradée. Pour ce faire, deux stratégies différentes ont été étudiées: la première consiste à fixer la taille du maillage h et faire varier d , la seconde fixe le nombre d'éléments dans la bande de taille d en maintenant le rapport d/h constant. Les solutions obtenues sont comparées à une solution éléments finis de référence calculée avec $h = 0.0025$ et les résultats sont présentés figure 6.

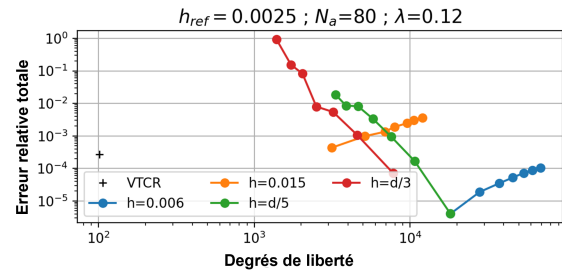
Ces résultats montrent que la taille d n'influence que légèrement la convergence de la méthode hybride et que c'est bien la taille du maillage qui prévaut. Ainsi, il est possible d'obtenir une erreur très faible avec peu de degrés de liberté en plus, en maintenant un nombre d'éléments constant dans la largeur d . Les courbes vertes et rouges montrent en effet une erreur plus faible que la courbe orange pour un même nombre de DdL. Pour conclure, il semble préférable de choisir un paramètre d petit avec peu d'éléments dans la largeur.

4 Exemple numérique: étude d'une rangée de résonateurs de Helmholtz

Après cette première étude numérique sur le comportement de la méthode hybride, nous nous intéressons à l'étude d'une rangée de résonateurs de Helmholtz le long d'un mur d'une pièce. La situation est il-



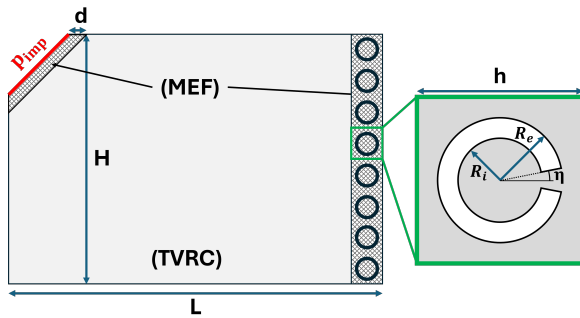
(a) Erreur de la méthode hybride en fonction du paramètre d .



(b) Erreur de la méthode hybride en fonction du nombre de degrés de liberté..

Figure 6: Résultat de l'analyse de convergence de la méthode hybride en fonction du paramètre d pour différentes stratégies de discrétisations.

lustrée figure 7 avec les différents paramètres géométriques donnés tableau 3. L'objectif est d'appliquer la méthode hybride TVRC-FEM à un cas où la TVRC serait peu efficace à cause de la complexité géométrique des résonateurs. Afin d'évaluer ses performances, la méthode hybride est comparée à la MEF pour le calcul de la réponse fréquentielle du système entre 500 Hz et 1000 Hz.

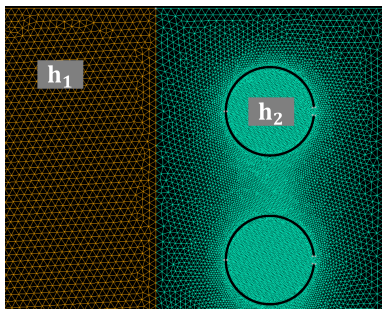


Géométrie	L	H	d	h
Résonateur	R_e	R_i	η	Nombre
Acoustique	ρ_0	c_0	α_0	P_{imp}
	3	1.5	0.15	0.15
	0.03	0.028	5°	15
	1.2	340	10^{-3}	1.0

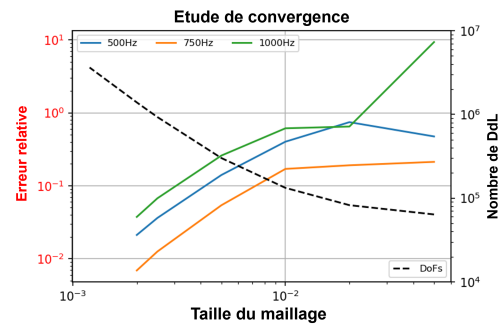
Table 3: Paramètres de la simulation.

Figure 7: Schéma de la situation étudiée.

Afin de déterminer une taille de maillage correcte pour la comparaison, une étude préalable de convergence de la MEF a été conduite : les résultats obtenus sont présentés figure 8b. Dans la suite, la taille du maillage est fixée à $h_1 = 0.002$ et $h_2 = 0.001$ (cf. figure 8a pour leur définition).



(a) Zoom sur le maillage utilisé avec la définition de h_1 et h_2 .

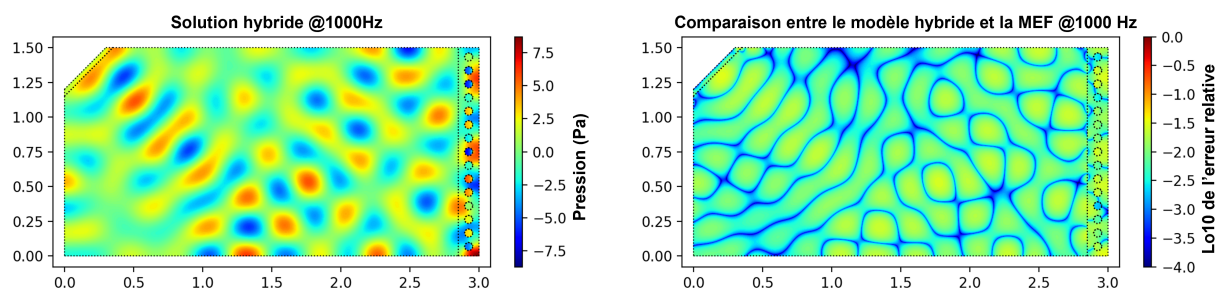


(b) Étude de convergence de la MEF avec $h_1 = 0.001$ fixé et h_2 qui varie.

Figure 8: Détermination d'une taille de maillage correcte pour l'étude.

La simulation MEF nécessite $1.4 \cdot 10^6$ DdLs tandis que la méthode hybride n'en demande que $1.7 \cdot 10^5$: elle permet donc de gagner un ordre de grandeur sur la taille du problème. La figure 9a montre le résultat obtenu pour la fréquence $f = 1000$ Hz tandis que la figure 9b montre l'écart entre les deux méthodes. On constate un écart de quelques pourcents entre les deux méthodes ce qui correspond à

l'ordre de grandeur de l'erreur estimée de la MEF par l'étude de convergence. Pour finir, la figure 10 compare les deux méthodes sur le calcul de la réponse fréquentielle entre 500 et 1000 Hz avec un pas de 5Hz. On constate une très bonne concordance entre les deux réponses calculées avec de très légers écarts ponctuels. Cependant le calcul de la réponse fréquentielle avec la MEF a nécessité 3500s alors qu'il n'a demandé seulement 450s avec la méthode hybride, c'est-à-dire 8 fois moins de temps.



(a) Résultat de la méthode hybride pour $f = 1000$ Hz. Partie réelle du champ de pression.

(b) Logarithme de l'erreur relative entre la méthode hybride et la MEF pour $f = 1000$ Hz.

Figure 9: Comparaison entre la méthode hybride et la MEF.

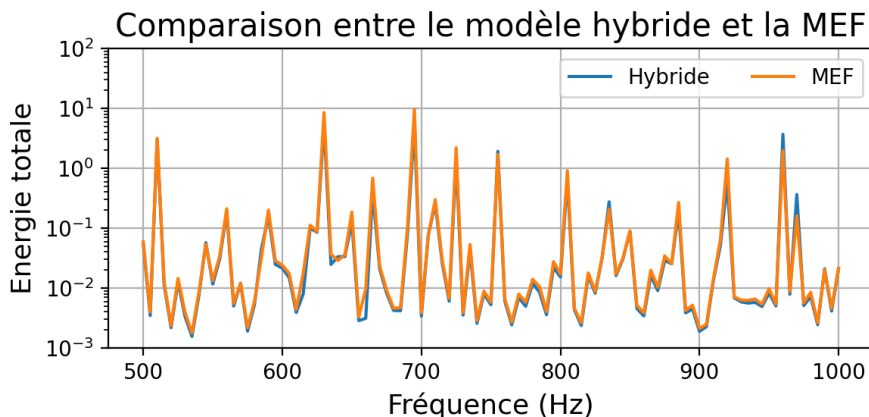


Figure 10: Comparaison des réponses fréquentielles calculées par la MEF et la méthode hybride TVRC-MEF.

5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une nouvelle méthode hybride TVRC-MEF pour la simulation vibro-acoustique en moyennes fréquences. Elle profite à la fois de l'adaptabilité de la MEF pour notamment gérer les géométries complexes tout en profitant de l'efficacité computationnelle de la TVRC. Le premier cas d'application de la méthode hybride TVRC-MEF montre comment il est possible de grandement améliorer la précision de la TVRC en présence de discontinuités. Le second cas démontre le potentiel de cette méthode pour l'étude de géométries complexes à travers la simulation d'un ensemble de résonateurs de Helmholtz. Dans les deux cas, la méthode hybride permet une réduction des temps de calcul importante, cependant un travail sur l'implémentation de la méthode pourrait probablement améliorer encore ses performances dans le futur.

References

- [1] R. Cettour-Janet. *Modélisation de la réponse vibratoire et du rayonnement acoustique de la voie ferrée et application à la conception de voies silencieuses*, Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, 2019.

- [2] L. Cremer, M. Heckl, B. A. T. Petersson. *Structure-Borne Sound: Structural Vibrations and Sound Radiation at Audio Frequencies*, third edition, Springer, 2005.
- [3] A. Deraemaeker, I. Babuska, P. Bouillard. *Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 46:4, pp. 471–499, 1999.
- [4] P. Ladevèze. *Une nouvelle approche pour le calcul des vibrations moyennes fréquences*, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences - série II 332:12, pp. 849–856, 1996.
- [5] H. Riou, P. Ladevèze, B. Sourcis. *The multiscale VTCR method applied to acoustics problems*, Journal of Computational Acoustics 16:4, pp. 487–505, 2008.
- [6] H. Riou, P. Ladevèze, B. Sourcis, B. Faverjon, L. Kovalevsky. *An adaptative numerical strategy for the medium-frequency analysis of Helmholtz's problem*, Journal of Computational Acoustics 20:01, 2012.
- [7] E. Trefftz. *Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren*, Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics, pp. 131–137, 1926.
- [8] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. *The Finite Element Method*, fifth edition, Butterworth Heinemann, 2000.