

Application de la TVRC au couplage vibro-acoustique entre un domaine acoustique et un domaine élastique.

R. Thevenot^{1,2}, A. Barbarulo², G. Puel², P. Dec¹

¹ SNCF-DTIPG, La plaine - Saint-Denis, {raphael.thevenot, patryk.dec}@sncf.fr

² LMPS (Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay), Gif-sur-Yvette, {raphael.thevenot, andrea.barbarulo, guillaume.puel}@centralesupelec.fr

Abstract — La théorie variationnelle des rayons complexes (TVRC) s'est révélée être une méthode efficace pour l'analyse des vibrations ou de l'acoustique en régime des moyennes fréquences. La méthode proposée dans ce travail permet de traiter le couplage vibro-acoustique pour des contrastes d'impédance faibles ou élevés. La modularité de la TVRC permet l'utilisation d'une formulation dite stabilisée des conditions de couplage, lui offrant une grande robustesse. Dans ce travail, nous présentons la formulation TVRC du couplage vibro-acoustique, puis l'illustrons sur différents exemples numériques.

Mots clés — TVRC, moyenne fréquence, couplage vibro-acoustique, Trefftz, pyVTCR

1 Introduction

La réduction du bruit constitue un enjeu capital de santé publique, ainsi qu'un élément clé pour la réussite du report modal et la mitigation des impacts carbone du transport. C'est pour cette raison que l'industrie des transports, et en particulier des acteurs du ferroviaire comme SNCF, s'intéresse de plus en plus à la compréhension et à la prédiction de la génération du bruit. Cela nécessite la capacité de tester numériquement le matériel roulant et d'évaluer différentes pistes de mitigation acoustique.

Pour répondre à ces besoins, un outil numérique capable de traiter le couplage vibroacoustique sur une large bande fréquentielle est indispensable. Cependant, ce type de calcul est extrêmement coûteux, et les méthodes basées sur les éléments finis n'atteignent pas les fréquences les plus élevées de la bande audible. Dans [1], nous avons proposé une méthode de couplage vibroacoustique entre l'air et des structures minces, fondée sur une méthode de Trefftz [2, 3, 4] appelée Théorie Variationnelle des Rayons Complexes [5, 6, 7, 8]. Cette approche n'est pas affectée par l'erreur de pollution et permet de dépasser les limitations fréquentielles des méthodes classiques.

Toutefois, tous les cas de couplage ne concernent pas des structures minces. Certaines applications portent sur des structures minces mais pas suffisamment pour que les simplifications usuelles restent valides, ou bien sur des configurations où un solide massif interagit avec un fluide dense. Dans ces situations, un couplage complet entre la mécanique des milieux continus en 3D et l'air devient nécessaire.

Dans ce travail, nous étendons le couplage entre la TVRC acoustique et la TVRC appliquée à un solide tridimensionnel quelconque. Après avoir présenté la théorie et les spécificités de ce couplage, nous illustrons la méthode à travers des résultats couvrant des cas de fort et faible contraste d'impédance, en mettant particulièrement l'accent sur les conditions d'interface.

2 Formulation du problème de couplage vibro-acoustique

Dans cette section, nous commençons par présenter le problème vibro-acoustique de référence. Puis la TVRC est développée dans le cas d'une cavité acoustique et d'un domaine élastique. Enfin, la formulation TVRC du couplage vibro-acoustique est introduite.

2.1 Problème de référence

La figure 1 présente le type de problème que l'on souhaite traiter dans ce travail. Il s'agit d'étudier le couplage entre une cavité acoustique Ω_a et un domaine solide Ω_s pour une pulsation ω donnée. La cavité acoustique est modélisée par l'équation d'Helmholtz (1), complétée par différentes conditions aux limites en vitesse (2). Le domaine solide est décrit par l'équation dynamique de l'élasticité linéaire 3 et le solide est soumis à des conditions limites en effort 4. Les équations de l'acoustique et du solide sont complétées par deux conditions de couplage 5: la première correspond à la continuité de la vitesse normale et la seconde à l'équilibre des efforts à l'interface Γ .

Problème acoustique:

$$\Delta p(\underline{x}) + \left(\frac{\omega}{c_0} + i\alpha_0 \right)^2 p(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega_a \quad (1)$$

$$\frac{-i}{\rho_0 \omega} \nabla p \cdot \underline{n}_a = v_{imp} \quad \forall \underline{x} \in \partial_v \Omega_a \quad (2)$$

Problème élastique linéaire:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}(\underline{x})) + \rho_s (1 + i\alpha_s)^2 \omega^2 \underline{u}(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega_s \quad (3)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}(\underline{x})) \underline{n}_s = \underline{T} \quad \forall \underline{x} \in \partial_T \Omega_s \quad (4)$$

Couplage vibro-acoustique:

$$\begin{cases} \nabla p(\underline{x}) \cdot \underline{n}_a + \rho_0 \omega^2 \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_s = 0 & \forall \underline{x} \in \Gamma \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}(\underline{x})) \underline{n}_s - p(\underline{x}) \underline{n}_a = 0 & \forall \underline{x} \in \Gamma \end{cases} \quad (5)$$

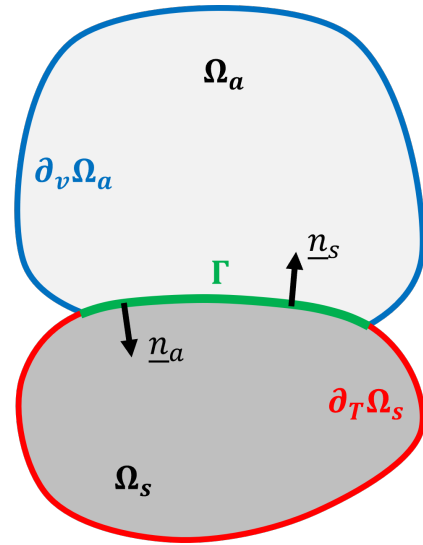


Figure 1: Problème vibro-acoustique de référence.

avec ρ_0 , c_0 et α_0 la densité, la vitesse du son et le coefficient d'amortissement du domaine acoustique respectivement. Les propriétés du solide sont sa densité ρ_s et un amortissement α_s , complétés par la loi de comportement linéaire élastique $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) = \mathbb{K} : \underline{\underline{\nabla}}^S \underline{u}$. Pour chaque domaine, on définit sa normale extérieure \underline{n}_a pour l'acoustique et \underline{n}_s pour le solide. Dans la suite, on notera $\bar{\circ}$ le complexe conjugué d'une valeur, $\Re(\circ)$ sa partie réelle et $\Im(\circ)$ sa partie imaginaire.

Remarque : Pour des raisons de simplicité, seules les conditions aux limites de Neumann (vitesse pour l'acoustique et effort pour le solide) sont étudiées, mais la même analyse peut être conduite pour d'autres conditions aux limites.

2.2 Formulation TVRC acoustique

La solution du problème acoustique est cherchée sous la forme d'une somme de N_a ondes planes ; on définit ainsi \mathcal{A}_p l'ensemble des solutions TVRC admissibles :

$$\mathcal{A}_p = \left\{ p(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{N_a} p_n \exp \left(i \left(\frac{\omega}{c_0} + i\alpha_0 \right) \underline{\xi}_n \cdot \underline{x} \right) \quad \forall \underline{x} \in \Omega_a \right\} \quad (6)$$

avec $p_n \in \mathbb{C}$ les amplitudes inconnues et $\underline{\xi}_n$ les directions de propagation des ondes planes.

Maintenant que l'espace admissible des solutions vérifie *a priori* l'équation du milieu (1), la formulation de la TVRC du problème aux limites est comme suit:

Trouver $p \in \mathcal{A}_p$ tel que:

$$\Re \left[\int_{\partial_v \Omega_a} \left(\frac{-i}{\rho_0 \omega} \nabla p \cdot \underline{n}_a \right) \bar{q} ds - \int_{\partial_v \Omega_a} v_{imp} \bar{q} ds \right] = 0 \quad (7)$$

$$\forall q \in \mathcal{A}_p$$

2.3 Formulation TVRC élastique

Contrairement à l'acoustique, pour une même direction de propagation $\underline{\xi}$, il existe deux types (trois pour la 3D) d'ondes planes dans un solide: une onde longitudinale ϕ_L et une onde transversale ϕ_T . Sous l'hypothèse d'isotropie, les deux ondes planes sont:

$$\phi_L(\underline{x}; \underline{\xi}) = \underline{\xi} \exp \left(i\omega \sqrt{\frac{\rho_s(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}} (1+i\alpha_s) \underline{\xi} \cdot \underline{x} \right) \quad (8)$$

$$\phi_T(\underline{x}; \underline{\xi}) = \underline{\xi}^\perp \exp \left(i\omega \sqrt{\frac{2\rho_s(1+\nu)}{E}} (1+i\alpha_s) \underline{\xi} \cdot \underline{x} \right) \quad (9)$$

avec E et ν le module de Young et le coefficient de Poisson respectivement, et $\underline{\xi}^\perp$ une direction perpendiculaire à $\underline{\xi}$.

On définit ainsi les champs de déplacement admissibles par une somme de N_L ondes longitudinales et N_T ondes transversales:

$$\mathcal{A}_u = \left\{ \underline{u}(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{N_L} u_n^L \phi_L(\underline{x}; \underline{\xi}_n) + \sum_{n=1}^{N_T} u_n^T \phi_T(\underline{x}; \underline{\xi}_n) \right\} \quad (10)$$

Dans le cas d'un domaine uniquement soumis à des conditions en effort, la formulation TVRC du problème solide est la suivante:

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{A}_u$ tel que:

$$\Re \left[\int_{\partial_T \Omega_s} (\underline{\sigma}(\underline{u}) \underline{n}_s) \cdot \bar{\underline{v}} ds - \int_{\partial_T \Omega_s} \underline{T} \cdot \bar{\underline{v}} ds \right] = 0 \quad (11)$$

$$\forall \underline{v} \in \mathcal{A}_u$$

2.4 Formulation des conditions de couplage

Afin d'incorporer le couplage aux problèmes TVRC (7) et (11), il faut définir une forme faible équivalente aux deux équations (5). Dans ce travail, nous proposons d'utiliser la forme suivante :

Trouver $(p, \underline{u}) \in \mathcal{A}_p \times \mathcal{A}_u$ tels que:

$$\Re \left[\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(p + \underline{\sigma}(\underline{u}) : \underline{(n_s \otimes n_s)} \right) \overline{\left(i\omega \underline{v} \cdot \underline{n}_s - \frac{\mathbf{Z}_0}{\mathbf{Z}_s} \frac{i}{\rho_0 \omega} \nabla q \cdot \underline{n}_a \right)} ds \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(i\omega \underline{u} \cdot \underline{n}_s - \frac{i}{\rho_0 \omega} \nabla p \cdot \underline{n}_a \right) \overline{\left(q + \frac{\mathbf{Z}_0}{\mathbf{Z}_s} \underline{\sigma}(\underline{v}) : \underline{(n_s \otimes n_s)} \right)} ds \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} \underline{\sigma}(\underline{u}) : \underline{(n_s \otimes n_s^\perp)} \overline{(\underline{v} \cdot \underline{n}_s^\perp)} ds \right] = 0 \quad (12)$$

$$\forall (q, \underline{v}) \in \mathcal{A}_p \times \mathcal{A}_u$$

avec $Z_0 = \rho_0 c_0$ l'impédance du domaine acoustique, et $Z_s = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\rho_s E (1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}} + \sqrt{\frac{\rho_s E}{2(1+\nu)}} \right)$ la moyenne des impédances du domaine solide.

Le facteur Z_0/Z_s permet de stabiliser la formulation du couplage dans le cas d'un fort contraste d'impédance. En effet, si $Z_s \gg Z_0$ (cas très répandu en vibro-acoustique), l'ajout du facteur de stabilisation dans (12) permet d'équilibrer les différents termes entre eux. De plus, dans ce cas, $Z_0/Z_s \ll 1$ et l'équation (12) tend vers une condition en vitesse pour le domaine acoustique et une condition en effort pour le domaine solide, ce qui est en accord avec le sens physique.

Finalement, on obtient la formulation TVRC complète du problème de référence (1) suivante :

Trouver $(p, \underline{u}) \in \mathcal{A}_p \times \mathcal{A}_u$ tels que:

$$\begin{aligned} \Re \left[\int_{\partial_v \Omega_a} \left(\frac{-i}{\rho_0 \omega} \nabla p \cdot \underline{n}_a \right) \bar{q} ds + \int_{\partial_T \Omega_s} (\underline{\sigma}(\underline{u}) \cdot \underline{n}_s) \cdot \bar{\underline{v}} ds + \int_{\Gamma} \underline{\sigma}(\underline{u}) : (\underline{n}_s \otimes \underline{n}_s^\perp) (\underline{v} \cdot \underline{n}_s^\perp) ds \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(p + \underline{\sigma}(\underline{u}) : (\underline{n}_s \otimes \underline{n}_s) \right) \overline{\left(i\omega \underline{v} \cdot \underline{n}_s - \frac{Z_0}{Z_s} \frac{i}{\rho_0 \omega} \nabla q \cdot \underline{n}_a \right)} ds \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(i\omega \underline{u} \cdot \underline{n}_s - \frac{i}{\rho_0 \omega} \nabla p \cdot \underline{n}_a \right) \overline{\left(q + \frac{Z_0}{Z_s} \underline{\sigma}(\underline{v}) : (\underline{n}_s \otimes \underline{n}_s) \right)} ds \right. \\ \left. - \int_{\partial_v \Omega_a} v_{imp} \bar{q} ds + \int_{\partial_T \Omega_s} \underline{T} \cdot \bar{\underline{v}} ds \right] = 0 \quad (13) \\ \forall (q, \underline{v}) \in \mathcal{A}_p \times \mathcal{A}_u \end{aligned}$$

3 Couplage avec un faible contraste d'impédance.

On commence par s'intéresser à un cas de couplage relativement simple avec un faible contraste d'impédance entre les deux domaines, afin de valider la bonne implémentation de la méthode. La figure 2 montre le cas étudié ici : la partie solide est à gauche, ses conditions aux bords consistent en un déplacement tangent nul et un effort normal nul. Le domaine acoustique a une pression imposée nulle sur tout le bord sauf en haut à droite où une pression parabolique est appliquée. Le tableau 1 montre les paramètres matériaux utilisés pour l'étude ; le ratio entre les impédances est $Z_s/Z_0 \approx 1$: il s'agit donc bien d'un faible contraste.

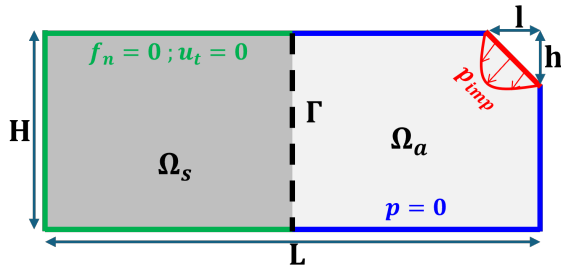


Figure 2: Schéma représentant le cas de couplage avec faible contraste d'impédance.

Géométrie	L	H	l	h
Solide	E 3e9	ν 0.25	α_s 10^{-2}	ρ_s 1180
Acoustique	ρ_0 1000	c_0 1500	α_0 10^{-3}	

Table 1: Paramètres de la simulation.

Les figures 3 et 4a montrent la partie réelle de la pression et de la contrainte horizontale ainsi que les vitesses pour la fréquence $f = 5000$ Hz. Afin de vérifier la bonne implémentation du couplage, la figure 4b présente les deux conditions de couplage. La figure de gauche compare la pression le long de l'interface à la contrainte normale tandis que la figure de droite compare les vitesses normales. Comme la continuité n'est imposée que faiblement par la TVRC, on observe de légères différences entre les différents champs, mais l'erreur reste inférieure à 1%. L'ensemble de ces résultats démontre la bonne implémentation de la méthode TVRC vibro-acoustique.

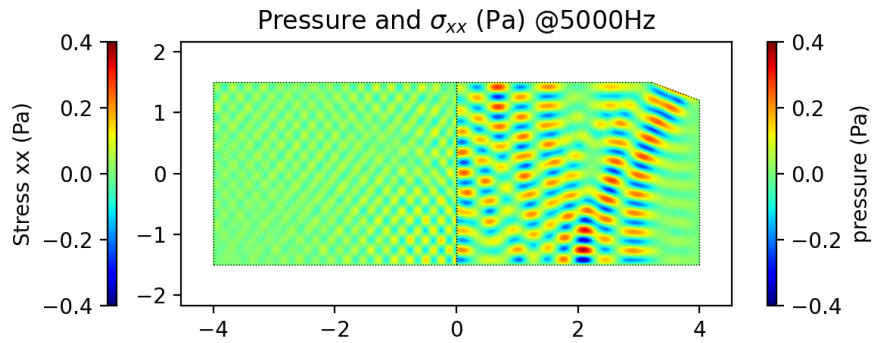
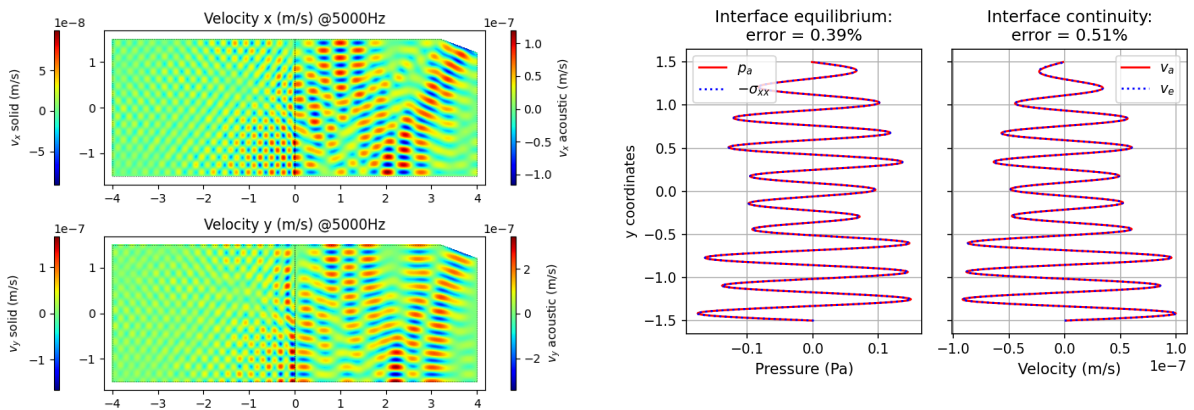


Figure 3: Partie réelle du champ de pression (à droite) et champ de contrainte σ_{xx} du couplage vibro-acoustique pour le cas de faible contraste d'impédance à la fréquence $f = 5000$ Hz.



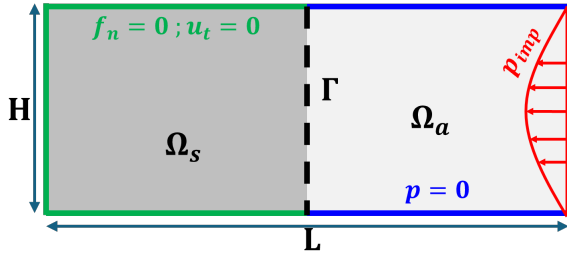
(a) Partie réelle du champ de vitesse horizontale (en haut) et verticale (en bas).

(b) Conditions de couplage à l'interface. A gauche, l'équilibre des efforts et à droite, la continuité des vitesses normales.

Figure 4: Résultats du couplage vibro-acoustique pour le cas de faible contraste d'impédance à la fréquence $f = 5000$ Hz.

4 Couplage avec un fort contraste d'impédance.

Cette partie a pour objectif de montrer l'intérêt du facteur de stabilisation de la formulation faible (12). Pour cela, nous allons comparer les résultats obtenus avec et sans le facteur de stabilisation sur un cas simple (cf. figure 5). L'exemple est constitué d'un domaine solide rectangulaire soumis à des conditions d'effort normal nul et de déplacement tangent nul. Le domaine acoustique est aussi rectangulaire avec des conditions de pression nulle en bas et en haut et une pression parabolique sur le bord droit. La fréquence choisie pour l'étude est $f = 3000$ Hz ; nous avons utilisé $N_a = 350$ ondes acoustiques, $N_L = N_T = 150$ ondes longitudinales et transversales, soit un total de 650 degrés de liberté pour reconstruire la solution TVRC.



Géométrie	L	H
	8m	3m

Acoustique	ρ_0	c_0	α_0
	1.2 kg.m^{-3}	340 m.s^{-1}	10^{-3}

Solide	E	ν	α_s	ρ_s
	$3e9 \text{ Pa}$	0.25	10^{-2}	1180 kg.m^{-3}

Figure 5: Schéma représentant le cas de couplage avec fort contraste d'impédance.

Table 2: Paramètres de la simulation.

Les propriétés élastiques et acoustiques des deux domaines étudiés sont présentées tableau 2, le ratio entre les impédances des deux domaines est $Z_s/Z_0 \approx 10^4$. Sur la figure 6, on ne distingue pas de réelle différence entre les deux résultats en pression, cependant la figure 7 montre que les résultats en vitesse sont radicalement différents. Le champ v_y de la solution non stabilisée ne semble pas être physique, de plus les valeurs obtenues pour la vitesse acoustique sont très différentes entre les deux formulations.

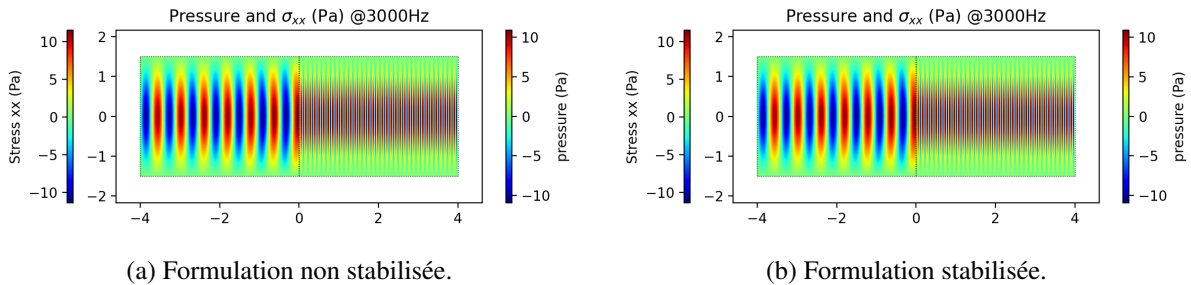


Figure 6: Comparaison entre le résultat sans et avec la formulation stabilisée pour le champs de pression.

Afin d'expliquer ces différences, les relations de couplages ont été tracées sur la figure 8. A gauche, la formulation non stabilisée montre un bon respect de la condition d'équilibre en pression avec une erreur inférieure à 0.23% ; cependant la condition de continuité des vitesses n'est absolument pas respectée. Au contraire, la formulation stabilisée (à droite) permet de respecter à la fois la condition en équilibre et la continuité des vitesses. Dans ce cas, l'erreur à l'interface est inférieure à 0.015% pour la pression et inférieure à 0.05% pour la vitesse.

Cette étude montre comment le terme de stabilisation permet de correctement imposer les deux conditions de couplage entre un domaine solide et un domaine acoustique même dans le cas d'un fort contraste d'impédance.

5 Conclusion

Dans ce travail, nous présentons les premiers résultats d'application de la TVRC au couplage entre un domaine élastique et un domaine acoustique. Après avoir présenté la formulation TVRC des problèmes élastiques et acoustiques, nous présentons la formulation faible des conditions de couplage entre les

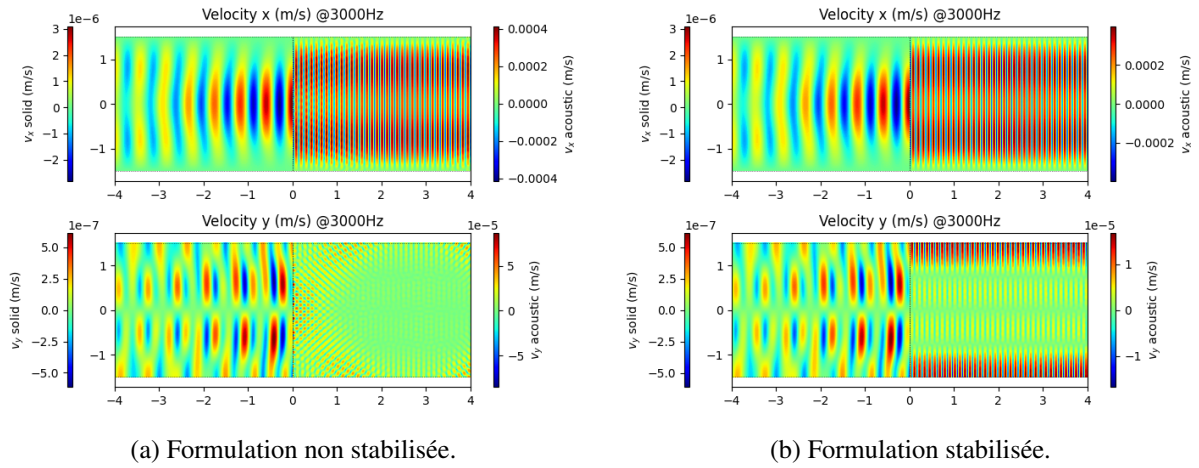


Figure 7: Comparaison entre le résultat sans et avec la formulation stabilisée pour le champ de vitesse.

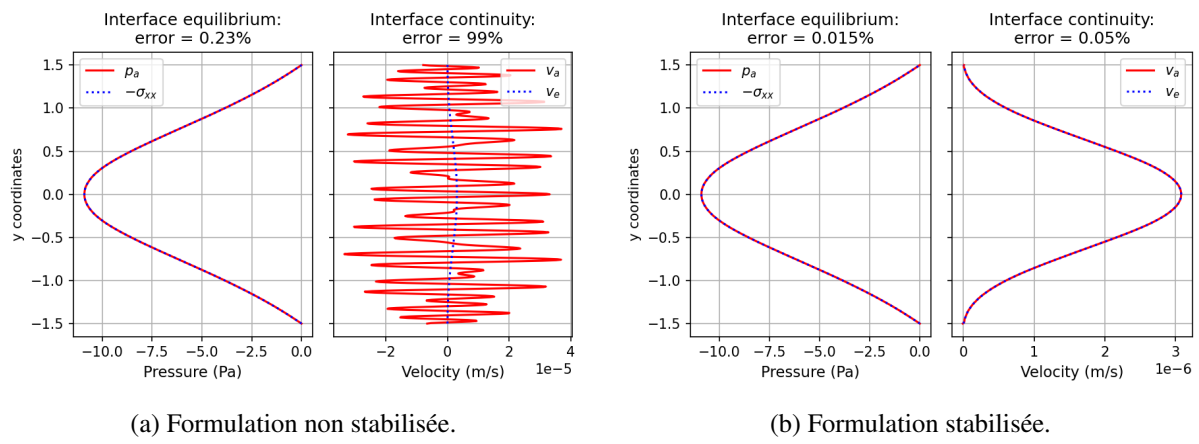


Figure 8: Comparaison entre le résultat sans et avec la formulation stabilisée pour les conditions de couplage.

deux domaines. Cette formulation tire avantage de l'adaptabilité de la TVRC afin d'introduire un terme qui permet de stabiliser la solution numérique du couplage dans le cas d'un fort contraste d'impédance entre les deux domaines. La méthode est ensuite illustrée sur un premier exemple de couplage avec un faible contraste. Pour finir, nous démontrons la nécessité de la formulation stabilisée sur un exemple de couplage à fort contraste d'impédance en comparant la solution obtenue avec la formulation stabilisée à une solution obtenue sans.

References

- [1] R. Thevenot, A. Solcourt, A. Barbarulo G. Puel *Extension of the Variational Theory of complex rays to the coupling between thin structure and acoustic cavities.*, Submitted to JSV
- [2] E. Trefftz. *Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren*, Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics, pp. 131–137, 1926.
- [3] Hiptmair, R., Moiola, A., Perugia, I. (2016). *A Survey of Trefftz Methods for the Helmholtz Equation*. In: Barrenechea, G., Brezzi, F., Cangiani, A., Georgoulis, E. (eds) Building Bridges: Connections and Challenges in Modern Approaches to Numerical Partial Differential Equations. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol 114. Springer, Cham.
- [4] E. Deckers, O. Atak, L. Coox, R. D'Amico, H. Devriendt, S. Jonckheere, K. Koo, B. Pluymers, D. Vandepitte, W. Desmet *The wave based method: an overview of 15 years of research* Wave Motion, 51(4):550–565, 2014
- [5] P. Ladevèze. *Une nouvelle approche pour le calcul des vibrations moyennes fréquences*, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences - série II 332:12, pp. 849–856, 1996.

- [6] H. Riou, P. Ladevèze, B. Sourcis. *The multiscale VTCR method applied to acoustics problems*, Journal of Computational Acoustics 16:4, pp. 487–505, 2008.
- [7] H. Riou, P. Ladevèze, B. Sourcis, B. Faverjon, L. Kovalevsky. *An adaptative numerical strategy for the medium-frequency analysis of Helmholtz's problem*, Journal of Computational Acoustics 20:01, 2012.
- [8] A. Cattabiani, A. Barbarulo, H. Riou, P. Ladeveze. *Variational theory of complex rays applied to shell structures: in-plane inertia, quasi-symmetric ray distribution, and orthotropic materials*. Comput Mech 56, 983–997 (2015).