

Modélisation éléments finis de la rupture fragile dynamique basée sur un modèle hyperbolique micromorphique d'endommagement à gradient

A. Renaud¹, J. Réthoré¹, X. Liu¹, E. Eid²

¹ Nantes Université, Ecole Centrale Nantes, CNRS, GeM, UMR 6183, F-44000, Nantes, France, prenom.nom@ec-nantes.fr

² Safran Tech, Digital Sciences & Technologies Department,

Rue des Jeunes Bois, Châteaufort, 78114 Magny-Les-Hameaux, France, elie.eid@safrangroup.com

Résumé — On s'intéresse dans ces travaux à la discrétisation par la méthode des éléments finis d'un système d'équations hyperbolique d'endommagement non-local destiné à modéliser la rupture dynamique des matériaux fragiles. Plus précisément, un modèle initialement développé dans le cadre de la méthode des volumes finis, et qui repose sur l'ajout d'une variable d'endommagement auxiliaire est considéré. L'objectif est de combiner la cohérence thermodynamique du modèle à la robustesse et à la flexibilité des éléments finis pour améliorer la précision et l'efficacité des simulations explicites de rupture fragile.

Mots clés — Méthode des éléments finis, Dynamique des solides, Matériaux fragiles, Mécanique de l'endommagement.

1 Introduction

La modélisation de la rupture des matériaux fragiles a conduit (de manière parallèle par les travaux de FRÉMOND et NEDJAR [5] et de BOURDIN, FRANCFORT et MARIGO [1]) à la construction de modèles d'endommagement non-locaux, c'est à dire dont l'énergie interne dépend d'une variable mesurant l'état de dégradation et de son gradient. Dans le cadre quasi-statique, la résolution des équations du problème par éléments finis se fait grâce à une procédure de minimisation alternée d'une fonctionnelle elliptique globale par rapport au déplacement et à l'endommagement. Pour la dynamique explicite, une telle procédure réalisée à chaque pas de temps est très coûteuse en termes de temps de calcul.

En réponse à cette problématique, des formulations hyperboliques basées sur la prise en compte d'un terme de *micro-inertie* (déjà suggéré par FRÉMOND et NEDJAR en 96) ont été proposées ces dernières années. D'un côté, un modèle dérivé pour un cadre volume fini et qui est construit sur l'introduction d'une variable d'endommagement auxiliaire aussi appelée *variable micromorphique*¹ a été présenté dans [3]. Ladite variable auxiliaire de ce modèle, non-dissipative, obéit à une équation d'onde avec terme source tandis que la variable d'endommagement "classique" suit une loi d'évolution dictée par un pseudo-potentiel de dissipation visqueux. Il s'ensuit que deux problèmes liés à l'évolution local de l'endommagement d'une part et au transport de l'endommagement auxiliaire d'autre part peuvent être résolus de manière étagée, les deux variables étant maintenues proches l'une de l'autre par un terme de pénalité. D'un autre côté, c'est la variable d'endommagement qui suit une équation d'onde dans le modèle *champ de phase* dérivé dans [6] pour les éléments finis. L'évolution thermodynamique du système est alors assurée par l'introduction d'un terme visqueux dans l'équation d'onde.

Une première différence majeure entre les deux approches est que l'irréversibilité est gérée par le potentiel de dissipation dans le modèle micromorphique et de manière algorithmique dans le modèle champ de phase. Par ailleurs, la décomposition de l'énergie utilisée afin de modéliser l'effet unilatéral en cas de fermeture de micro-fissures doit impérativement garantir l'hyperbolicité des équations pour une résolution volumes finis tandis que les éléments finis offrent plus de flexibilité.

L'objectif de ces travaux est de *combinaison le meilleur des deux mondes* en discrétisant le système d'équations locales dérivé pour les volumes finis grâce à la méthode des éléments finis.

1. Le terme *micromorphique* vient de la forme que prend l'énergie interne, très proche des modèles du même nom développés par FOREST [4] et permettant la prise en compte d'aspects multi-échelles à travers l'introduction de degrés de liberté internes (ou microscopiques)

Le modèle ainsi que la stratégie de résolution numérique sont présentés dans la suite. Des résultats numériques sur un test d'écaillage unidimensionnel sont également comparés aux solutions champ de phase et volumes finis.

2 Équations locales

On s'intéresse à la modélisation de la répose d'un solide occupant le domaine Ω , et soumis à un chargement dynamique dans le cadre des petites déformations isothermes.

2.1 Thermodynamique

Afin de décrire le comportement du matériau fragile occupant le domaine Ω , on suppose une énergie libre de Helmholtz et un pseudo-potentiel de dissipation dual de la forme suivante :

$$\Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \mathcal{D}, \underline{\underline{\nabla}}\tilde{\mathcal{D}}) = \psi^e(\underline{\underline{\varepsilon}}, \mathcal{D}) + \psi^{\mathcal{D}}(\mathcal{D}) + \frac{\alpha}{2} \left\| \underline{\underline{\nabla}}\tilde{\mathcal{D}} \right\|^2 + \frac{\kappa}{2} (\tilde{\mathcal{D}} - \mathcal{D})^2 \quad (1)$$

$$\varphi^*(Y_{\mathcal{D}}) = \frac{1}{2\eta} \langle Y_{\mathcal{D}} \rangle_+^2 \quad (2)$$

Dans (1), $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est le tenseur des déformations linéarisé, \mathcal{D} est la variable d'endommagement, $\tilde{\mathcal{D}}$ est la variable auxiliaire ou micromorphe, α est une constante prenant en compte la longueur caractéristique² associé au terme non-local $\underline{\underline{\nabla}}\tilde{\mathcal{D}}$ et κ est un coefficient de pénalisation. L'introduction de la variable auxiliaire comme porteuse de la non-localité du modèle provient de la méthode du *Lagrangien étendu* [2] qui va être appliquée dans la suite pour la dérivation des équations locales.

La forme du pseudo-potentiel de dissipation (2) correspond par ailleurs à une régularisation visqueuse de type PERZYNA [7] qui permet, lorsque la viscosité η est prise très grande de tendre vers un modèle indépendant des vitesses de chargement. L'intérêt de cette régularisation est de pouvoir dériver directement une loi d'évolution de l'endommagement :

$$\dot{\mathcal{D}} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial Y_{\mathcal{D}}},$$

où $\dot{\mathcal{D}} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$ et $Y_{\mathcal{D}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{D}}$ est la force thermodynamique conjuguée à l'endommagement. On note par ailleurs que $\dot{\mathcal{D}}$ et $Y_{\mathcal{D}}$ sont reliés par le pseudo-potentiel primal φ selon :

$$Y_{\mathcal{D}} = \frac{\partial \varphi(\dot{\mathcal{D}})}{\partial \dot{\mathcal{D}}}$$

On rappelle que l'on peut passer de φ à φ^* par une transformée de Legendre-Fenchel.

2.2 Système hyperbolique

La méthode du lagrangien étendu, déjà évoquée ci-dessus, consiste à appliquer le principe variationnel d'Hamilton à une fonctionnelle Lagrangien construite sur des énergies cinétiques et de déformation faisant intervenir les dérivées spatiale et temporelle premières d'une variable auxiliaire. En conséquence, la densité volumique d'énergie cinétique du solide est supposée de la forme suivante :

$$K = \frac{1}{2} \rho \|\underline{\underline{u}}\|^2 + \frac{1}{2} \rho_{\mathcal{D}} \left\| \dot{\tilde{\mathcal{D}}} \right\|^2,$$

ρ étant la masse volumique du matériau, $\underline{\underline{u}}$ le vecteur déplacement et $\rho_{\mathcal{D}}$ le paramètre de micro-inertie.

En l'absence de forces extérieures, qui ne complexifient en rien la dérivation des équations, le Lagrangien s'écrit donc :

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} [K - \Psi] dv,$$

2. En particulier, on retrouve le modèle dit "AT1" dans [9] pour $\alpha = 3G_c \ell_0 / 8$, G_c étant le taux de restitution d'énergie élastique critique et ℓ_0 la longueur caractéristique.

et le principe d'Hamilton consiste à assurer la stationnarité de l'action obtenue par intégration du Lagrangien sur l'intervalle de temps considéré $\mathcal{T} = [t_1, t_2]$ avec $t_1 \leq t_2$:

$$\delta \mathcal{A} = \int_{\mathcal{T}} \delta \mathcal{L} dt = 0$$

Moyennant les hypothèses classiquement faites dans le cadre du calcul de variations qui sont omises ici pour des raisons de concision, l'application du principe d'Hamilton aux énergies définies plus haut conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \rho \ddot{\underline{u}} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0} \\ \rho_{\mathcal{D}} \ddot{\mathcal{D}} - \alpha \Delta \tilde{\mathcal{D}} + \kappa (\tilde{\mathcal{D}} - \mathcal{D}) = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{D}} = -Y_{\mathcal{D}} = 0 \end{cases} \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \quad (3)$$

auquel s'ajoutent les conditions aux limites naturelles :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0} \\ \nabla \tilde{\mathcal{D}} \cdot \underline{n} = 0 \end{cases} \quad \forall \underline{x} \in \partial \Omega,$$

$\partial \Omega$ étant le bord du domaine.

La dernière équation volumique du système (3) traduit l'absence de dissipation inhérente à l'application du principe (conservatif) d'Hamilton. Cette caractéristique de l'évolution du système est contournée en introduisant le pseudo-potential de dissipation primal ou, plus commode, le pseudo-potential dual. Le système d'équations volumiques devient alors :

$$\begin{cases} \rho \ddot{\underline{u}} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0} \\ \rho_{\mathcal{D}} \ddot{\mathcal{D}} - \alpha \Delta \tilde{\mathcal{D}} + \kappa (\tilde{\mathcal{D}} - \mathcal{D}) = 0 \\ \dot{\mathcal{D}} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial Y_{\mathcal{D}}} = \frac{1}{\eta} \langle Y_{\mathcal{D}} \rangle_+ \end{cases} \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \quad (4)$$

La preuve de l'hyperbolicité du système ci-dessus a été faite pour une forme particulière de l'énergie libre [3, 8]. Ce point est susceptible de représenter un verrou pour une résolution par la méthode des volumes finis qui requiert une hyperbolicité stricte des équations. Toutefois, ceci n'est pas bloquant pour une résolution par la méthode des éléments finis, ce qui motive ces travaux.

2.3 Borne supérieure sur l'endommagement

La loi d'évolution visqueuse de l'endommagement utilisée plus haut peut conduire, dans une approche incrémentale, à un endommagement plus grand que 1, ce qui n'est pas physiquement admissible avec les modèles courants. Afin d'empêcher de telles situations, le problème est reformulé grâce au changement de variable suivant [8] :

$$\mathcal{D} = 1 - e^{-q \mathcal{D}}$$

Dans cette relation, $\mathcal{D} \geq 0$ est une nouvelle mesure de l'endommagement que l'on appelle *variable relâchée* et $q \in \mathbb{R}^{+,*}$ est un paramètre dont l'analyse est pour l'instant reportée à des travaux futurs. On prendra donc $q = 1$ dans la suite.

3 Schéma éléments finis

Les équations dérivées précédemment peuvent facilement être discrétisées par la méthode des éléments finis. La stratégie adoptée dans ces travaux consiste à résoudre trois problèmes de manière étagée dans une approche complètement explicite :

1. résolution du bilan de la quantité de mouvement
2. résolution de l'équation d'onde portant sur l'endommagement auxiliaire

3. intégration de la loi d'évolution de l'endommagement

Tandis que les deux premières étapes consistent en la résolution d'un système global, la dernière est purement locale et est effectuée aux points de Gauss. Ceci n'est possible que grâce à l'introduction de la variable auxiliaire $\tilde{\mathcal{D}}$, rendant $Y_{\mathcal{D}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{D}}$ et donc $\dot{\mathcal{D}}$ indépendantes des contributions non-locales.

Dans ce contexte, la discrétisation éléments finis conduit à l'écriture de formes semi-discrètes impliquant les matrices masses $[M_u]$ et $[M_d]$, respectivement pour les problèmes en déplacement et en endommagement auxiliaire. Dès lors, pour un ensemble de N^{\max} pas de temps et de N^{PI} points de gauss dans le maillage, la procédure de résolution suit l'algorithme 1. On note que la discrétisation temporelle suit un

Algorithm 1 Procédure de résolution explicite étagée de la forme discrete du problème (4)

```

for n=1,...,Nmax do
  1. Résolution du problème en déplacement
   $\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n + \Delta t^n \underline{v}^n$ 
  Calculer les forces internes  $\rightarrow f_{u,int}^{n+1}(\underline{u}^{n+1}, \mathcal{D}^n)$ 
  Résoudre  $[M_u] \underline{a}^{n+1} = -f_{u,int}^{n+1}$ 
   $\underline{v}^{n+1} = \underline{v}^n + \Delta t^n \underline{a}^{n+1}$ 
  2. Résolution du problème en endommagement auxiliaire
   $\tilde{\mathcal{D}}^{n+1} = \tilde{\mathcal{D}}^n + \Delta t^n \dot{\tilde{\mathcal{D}}}^{n+1/2}$ 
  Calculer les forces internes  $\rightarrow f_{d,int}^{n+1}(\tilde{\mathcal{D}}^{n+1}, \mathcal{D}^n)$ 
  Résoudre  $[M_d] \dot{\tilde{\mathcal{D}}}^{n+1} = -f_{d,int}^{n+1}$ 
   $\dot{\tilde{\mathcal{D}}}^{n+1} = \dot{\tilde{\mathcal{D}}}^n + \Delta t^n \ddot{\tilde{\mathcal{D}}}^{n+1}$ 
  3. Évolution de l'endommagement
  for k=1,...,NPI do
     $\mathcal{D}_k^{n+1} = \mathcal{D}_k^n + \left\langle Y_{\mathcal{D}}(\underline{u}_k^{n+1}, \tilde{\mathcal{D}}_k^{n+1}, \mathcal{D}_k^n) \right\rangle_+$ 
  end for
end for

```

schéma classique aux différences centrées pour les parties déplacement et endommagement auxiliaire. Ceci est une différence notable par rapport au modèle champs de phase [6] qui utilise un algorithme de Verlet pour la partie endommagement en raison de la force visqueuse introduite.

4 Illustration numérique : test d'écaillage en une dimension

4.1 Modélisation du problème

Afin d'illustrer le modèle proposé, on s'intéresse à une représentation uni-dimensionnelle d'un problème d'écaillage. La configuration étudiée, représentée sur la figure 1, consiste en un domaine unidimensionnel de longueur $L = 5$ mm soumis à des conditions initiales de type Riemann sur la vitesse :

$$v(x, t = 0) = \begin{cases} 1.5 \text{ m/s} & \text{si } x \leq L/3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les bords gauche et droit sont libres d'efforts surfaciques et les forces de volumes sont négligées. La

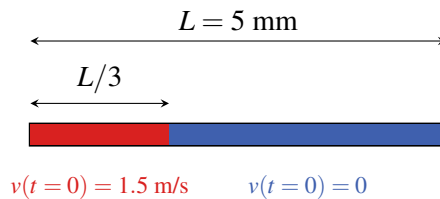


FIGURE 1 – Conditions initiales pour le problème d'écaillage 1D

solution de ce problème consiste en deux ondes de compression dues à la discontinuité initiale de la vitesse (modélisation d'un impact) qui se propagent vers les bords du domaine où elle sont réfléchies comme des ondes de traction en raison des conditions de bord libre. Ensuite, les deux ondes de traction vont se superposer en $2L/3$ et générer un état de contrainte conduisant à la rupture ($\mathcal{D} \approx 1$).

On considère les formes suivantes des potentiels thermodynamiques :

$$\begin{aligned}\psi^e(\varepsilon, \mathcal{D}) &= \frac{1}{2}e^{-2\mathcal{D}}E\langle\varepsilon\rangle_+^2 + E\langle\varepsilon\rangle_-^2 \\ \psi^{\mathcal{D}}(\mathcal{D}) &= w_l(1 - e^{-\mathcal{D}}),\end{aligned}$$

et les valeurs numériques des paramètres utilisées sont données dans le tableau 1.

E (GPa)	ρ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	$\rho_{\mathcal{D}}$ ($\text{Pa}\cdot\text{s}^2$)	α ($\text{Pa}\cdot\text{m}^2$)	η ($\text{Pa}\cdot\text{s}$)	w_l (Pa)	κ (Pa)
27	2500	3.47×10^{-13}	3.75×10^{-6}	1×10^{-4}	750	1×10^3

TABLE 1 – Paramètres utilisés pour la simulation du test d'écaillage 1D

Un maillage régulier constitué de 500 éléments finis est utilisé et le pas de temps $\Delta t = CFL \times \Delta t^{\text{crit}}$ est fixé de manière à avoir nombre CFL à 0.5.

4.2 Résultats

La figure 2 montre les champs de contrainte et d'endommagement \mathcal{D} le long du domaine à trois instants différents. La solution éléments finis du modèle micromorphe est par ailleurs comparée à la solution champ de phase [6] et à la solution volumes finis de [8]. Dans la colonne 2a, on voit les deux ondes de compression qui se propagent vers les bords du domaine et un champ d'endommagement qui n'a pas encore évolué. À l'instant $t = 1.17 \mu\text{s}$ (figure 2b), les deux ondes incidentes se sont réfléchies sur les bords libres et se dirigent l'une vers l'autre pour interagire afin de donner deux ondes de traction qui se propagent vers les bords du domaine comme on peut le voir dans la figure 2c. Les ondes de traction génère un état de contrainte qui déclenche l'évolution de l'endommagement jusqu'à ce que la rupture soit atteinte (*i.e.* $\mathcal{D} \approx 1$). On voit que les trois approches conduisent à des résolutions différentes du

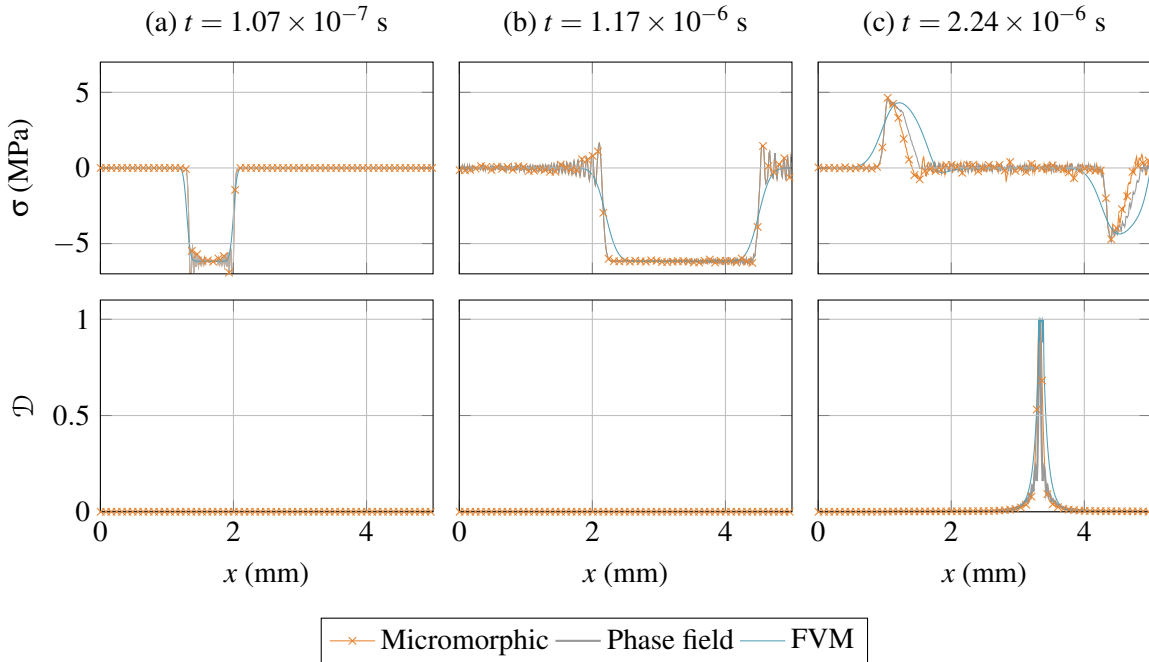


FIGURE 2 – Comparaison de solutions au problème d'écaillage 1D calculées avec les modèles d'endommagement micromorphe et champ de phase.

problème. Premièrement, bien que les solutions éléments finis présentent des oscillations au passage des

discontinuités élastiques (contrairement aux volumes finis), la diffusion numérique est bien plus faible que pour les volumes finis. Ensuite, le champ d'endommagement obtenu par les simulations éléments finis est nettement plus localisé que celui obtenu par volumes finis. Enfin, l'approche micromorphique permet d'obtenir une description des ondes après localisation plus cohérente avec celle offerte par les volumes finis, qui fait office de référence lorsqu'il s'agit de décrire les ondes.

5 Conclusion

La discrétisation par la méthode des éléments finis des équations du modèle micromorphique d'endommagement à gradient présentée permet, comme il a été montré, d'obtenir des résultats numériques très satisfaisants. Bien que les développements du modèle numérique en sont encore à un stade préliminaire, la qualité de l'approximation s'apprécie au niveau du suivi des ondes en comparaison à la solution volumes finis sur le même modèle mathématique, et du profil d'endommagement comparé à une solution champs de phase hyperbolique.

L'approximation des solutions de ce modèle par un cadre éléments finis offre une multitude de perspectives pour la simulation précise des problèmes de rupture fragile dynamique comme par exemple l'approximation de haut ordre et/ou l'implémentation dans des codes de calculs hautes performances.

6 Références bibliographiques

Références

- [1] B. BOURDIN, G. FRANCFORT, J.-J. MARIGO, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **2000**, *48*, 797-826.
- [2] N. FAVRIE, S. GAVRILYUK, *Nonlinearity* **2017**, *30*, 2718.
- [3] N. FAVRIE, A. RENAUD, D. KONDO, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **2024**, *419*, 116643.
- [4] S. FOREST, *Journal of Engineering Mechanics* **2009**, *135*, 117-131.
- [5] M. FRÉMOND, B. NEDJAR, *International Journal of Solids and Structures* **1996**, *33*, 1083-1103.
- [6] L. MERSEL, P. BOUDA, J. GERMAIN, J. RÉTHORÉ, *Comptes Rendus. Mécanique* **2025**, *353*, 687-724.
- [7] P. PERZYNA in *Advances in applied mechanics*, t. 9, Elsevier, **1966**, p. 243-377.
- [8] A. RENAUD, T. HEUZÉ, N. FAVRIE, *International Journal of Solids and Structures* **En révision**.
- [9] E. TANNÉ, T. LI, B. BOURDIN, J.-J. MARIGO, C. MAURINI, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **2018**, *110*, 80-99.