

Étude statique et dynamique des instabilités des coques représentatives d'un divergent de lanceur spatial

A. Gellé^{1,2}, M. Brun¹, A. K. Chau¹, P. Ventura¹, N. Mathieu¹, M. Potier-Ferry¹, H. Zahrouni¹, B. Tang²

¹ Université de Lorraine, CNRS, Arts et Métiers Institute of Technology, LEM3, F-57000 Metz, France, adrien.gelle@univ-lorraine.fr

² Centre National d'Etudes Spatiales (CNES), Paris, benoit.tang@cnes.fr

Résumé — Les divergents de moteurs de lanceurs spatiaux sont des structures de coques minces dont le dimensionnement est critique. Ces structures, dimensionnées généralement en quasi-statique, sont pourtant vulnérables au flambage sous des chargements dynamiques intenses, notamment ceux subis lors du décollage. La présente étude propose une évaluation numérique comparative de la stabilité de coques de révolution représentatives de la géométrie des divergents. Plusieurs types d'analyses sont confrontés en quasi-statique et en dynamique en utilisant les méthodes de résolution classiques implantées dans les codes industriels et la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) développée au sein du laboratoire. Différentes vitesses de chargement seront considérées en tenant compte des imperfections géométriques qui ont un impact sur la réduction de la charge critique de flambage. Une modélisation d'une structure conique représentative de la géométrie des divergents sera présentée dans cette étude.

Mots clés — Flambage dynamique, instabilités, coques minces, méthode des éléments finis, méthode asymptotique numérique, divergent de lanceur.

1 Introduction

L'optimisation du rapport résistance/masse conduit à concevoir les tuyères de moteurs de lanceurs spatiaux sous forme de structures minces. Durant la phase de décollage, l'allumage des propulseurs d'appoint génère une onde de souffle qui se traduit par un champ de pression externe, à la fois intense et transitoire, sur la paroi du divergent. Cette sollicitation peut provoquer la ruine de la structure par flambage dynamique, un phénomène qui demeure moins documenté et plus complexe à modéliser que son homologue quasi-statique. Les normes de dimensionnement actuelles, notamment les recommandations de la NASA (SP-8007 [1] et SP-8019 [2]), sont réputées pour leur caractère fortement conservateur [3, 4]. Elles peinent à prendre en compte de manière fidèle la nature dynamique et transitoire des chargements réels. Pour pallier ce manque, des travaux expérimentaux récents, en particulier ceux menés par l'équipe d'Ali Limam avec le CNES [5], ont permis de caractériser la réponse des coques cylindriques à des pulses de pression générés par explosion. Ces essais fournissent une base de données essentielle à la validation des outils de simulation numérique. Les objectifs de ce travail sont multiples. Il s'agit premièrement de mettre au point et de valider des modèles numériques par éléments finis, via le code commercial Abaqus, capable de répliquer fidèlement ces résultats expérimentaux de référence. Deuxièmement, cette étude vise à comparer les performances des solveurs standards de type Newton-Raphson en dynamique implicite et explicite à une méthodologie alternative basée sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) implantée dans un code interne au sein de l'équipe. Enfin, ces outils validés sont employés pour comparer la réponse au flambage d'une coque cylindrique de référence à celle d'une coque conique, celle-ci étant géométriquement plus représentative d'un divergent du moteur du lanceur de fusée. La méthode asymptotique numérique, qui est basée sur un solveur d'ordre élevé, permet d'explorer toutes les solutions de flambage possibles grâce à sa grande précision.

2 Méthodologie Numérique

Pour atteindre les objectifs de validation et de comparaison, deux approches numériques distinctes sont mises en œuvre : une modélisation basée sur un logiciel commercial standard (Abaqus) et une s'appuyant sur un code de calcul développé sur MatLab utilisant la Méthode Asymptotique Numérique [6, 7, 8] et un élément de Büchter [9].

2.1 Approche 1 : Modélisation par le logiciel commercial Abaqus

La validation par rapport aux essais de [5] ainsi que les analyses dynamiques de référence sont effectuées à l'aide du code de calcul par éléments finis Abaqus [10].

- Solveurs : Les analyses quasi-statiques (QS) et dynamiques implicites reposent sur un solveur non linéaire standard de type Newton-Raphson (NR). Les analyses dynamiques impulsionnelles utilisent un schéma d'intégration temporelle explicite (type différences centrées).
- Éléments : Conformément à la littérature et aux études de convergence, les modèles quasi-statiques et implicites utilisent des éléments de coque quadratiques à 8 nœuds et intégration réduite (S8R). Les modèles dynamiques explicites, par contrainte du logiciel, emploient des éléments de coque linéaires à 4 nœuds et intégration réduite (S4R). Ces éléments sont basés sur une cinématique de type Mindlin-Reissner (6 DDL par nœud).

2.2 Approche 2 : Développement d'un Solveur Alternatif (Code Interne)

Les schémas d'intégration temporelle implicites, couramment utilisés en analyse dynamique non linéaire, conduisent à la résolution d'un système d'équations algébriques non linéaires à chaque incrément de temps. La méthode de Newton-Raphson (NR) constitue l'approche itérative standard, implémentée dans la majorité des codes commerciaux [10], en raison de sa convergence quadratique dans des conditions favorables. Cette procédure consiste à linéariser les équations du résidu autour de l'estimation courante de la solution, à résoudre le système linéaire résultant, puis à mettre à jour la solution jusqu'à atteindre la convergence.

Malgré son efficacité, la méthode NR impose l'assemblage et la factorisation répétés de l'opérateur tangent, une opération qui devient particulièrement coûteuse pour les modèles de grande taille. Les alternatives simplifiées, telles que les stratégies de Newton modifiées ou quasi-Newton, réduisent ce coût en réutilisant ou en approximant la matrice tangente, mais elles se révèlent souvent peu performantes face à des phénomènes de flambage.

Ces limitations ont motivé le développement de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) comme alternative. La MAN a été introduite initialement par Damiel et Potier-Ferry [11] et développée dans [12, 13] en tant que technique de suivi de chemin ("path-following") pour les problèmes d'élasticité non linéaire en quasi-statique. La différence fondamentale avec la procédure NR est que cette dernière calcule la solution par linéarisations successives, tandis que la MAN construit une approximation de la solution sous la forme d'un développement en série entière, basée sur la théorie des perturbations.

Cette approche transforme le système non linéaire original en une séquence de problèmes linéaires impliquant tous le même opérateur tangent. Par conséquent, une seule factorisation de la matrice tangente est requise par pas de calcul, rendant la MAN particulièrement attrayante. La MAN a également démontré d'excellentes performances pour l'identification de points de bifurcation et le suivi de branches post-critiques [14, 15], et a été étendue aux matériaux non linéaires [16, 17, 18] ainsi qu'aux problèmes de contact unilatéral [19].

L'extension de la MAN à la dynamique, initiée par Cochelin et Compain [20] suivie de plusieurs variantes [21, 22], a abouti à des algorithmes implicites d'ordres élevés. Dans ce cadre, un paramètre d'homotopie ϵ est introduit dans les équations et sert de paramètre de développement. Le système non linéaire est ainsi transformé en une séquence de systèmes linéaires avec le même opérateur tangent, et la solution du problème original est recouverte en posant $\epsilon = 1$. Cette stratégie a été développée plus tard en mécanique des fluides [23, 24, 25], montrant une réduction significative du temps de calcul par rapport à NR [24]. Une approche alternative utilisant le temps t comme paramètre de développement [26] nécessite des pas de temps beaucoup plus faibles et des paramètres de régularisation des charges externes.

Les schémas implicites, bien que garantissant une stabilité inconditionnelle, ne constituent pas la

seule approche efficace pour l'étude des phénomènes de flambage dynamique. À cet égard, la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) émerge comme une alternative prometteuse à la méthode classique de Newton-Raphson (NR). Cependant, les comparaisons systématiques entre ces deux méthodes, appliquées spécifiquement au flambage dynamique des structures de coques, restent rares dans la littérature.

L'application de la MAN à ce problème consiste en un développement en série entière des variables par rapport à un paramètre ϵ utilisé ici dans le cadre de la méthode d'homotopie.

Pour illustrer le concept, considérons une équation non linéaire de la forme :

$$R(U) = C + L(U) + Q(U, U) = 0 \quad (1)$$

où U est l'inconnue, C un terme constant, $L(U)$ la partie linéaire et $Q(U, U)$ la contribution non linéaire (supposée quadratique ici). En introduisant un paramètre d'homotopie ϵ , on a :

$$R(U) = C + L(U) + \epsilon Q(U, U) = 0 \quad (2)$$

L'équation originale est retrouvée pour $\epsilon=1$. La MAN approxime la solution U sous la forme d'une série entière en ϵ :

$$U = \sum_{p=1} \epsilon^{p-1} U_p \quad (3)$$

où U_p sont les termes d'ordre p de la série. La substitution de (3) dans (2) mène à :

$$\begin{aligned} R(U) &= C + \sum_{p=1} \epsilon^{p-1} L(U_p) + \sum_{p=1} \sum_{r=1} \epsilon^{p+r-1} Q(U_p, U_r) \\ &= C + \sum_{p=1} \epsilon^{p-1} \left[L(U_p) + \sum_{r=1} Q(U_r, U_{p-r}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

En identifiant les termes de même puissance en ϵ , on obtient une séquence de problèmes linéaires :

$$\begin{aligned} p = 1 \quad (\epsilon^0) : \quad & C + L(U_1) = 0 \\ p \geq 2 \quad (\epsilon^{p-1}) : \quad & L(U_p) + \sum_{r=1}^{p-1} Q(U_r, U_{p-r}) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Ces problèmes peuvent être résolus successivement, car ils impliquent tous le même opérateur linéaire $L(\cdot)$. L'approximation finale de la solution est obtenue en évaluant la série pour $\epsilon=1$.

2.3 Cinématique de l'élément coque

Pour modéliser les instabilités en grandes déformations, la formulation d'élément 3D-coque proposée par [9] est employée [27, 14, 28]. Elle se distingue des éléments de coque standards par sa capacité à intégrer le changement d'épaisseur et le concept EAS (Enhanced Assumed Strain) [29], impliquant une formulation de coque à 7 paramètres. Cette approche permet l'utilisation d'une loi de comportement 3D sans condensation.

La cinématique de l'élément (Figure 1) définit la position d'un point matériel \mathbf{x} (configuration initiale) et $\bar{\mathbf{x}}$ (configuration déformée) par :

$$\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{a}_3(\theta^1, \theta^2), \quad \bar{\mathbf{x}}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{\mathbf{r}}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_3(\theta^1, \theta^2) \quad (6)$$

où \mathbf{r} et $\bar{\mathbf{r}}$ sont les positions sur le feuillet moyen, \mathbf{a}_3 et $\bar{\mathbf{a}}_3$ sont les vecteurs directeurs, et $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ sont les coordonnées curvilignes de la coque. Le champ de déplacement \mathbf{u} s'exprime comme suit :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{v}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{w}(\theta^1, \theta^2) \quad (7)$$

où \mathbf{v} est le déplacement du feuillet moyen et \mathbf{w} la différence des vecteurs directeurs. La cinématique est ainsi définie par 6 paramètres. De là, les vecteurs des bases covariantes \mathbf{g}_i et contravariantes \mathbf{g}^j permettent d'exprimer le tenseur de déformation de Green-Lagrange [9] :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{g}}_{ij} - \mathbf{g}_{ij}) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = [E_{ij}^l(\mathbf{u}) + E_{ij}^n(\mathbf{u})] \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (8)$$

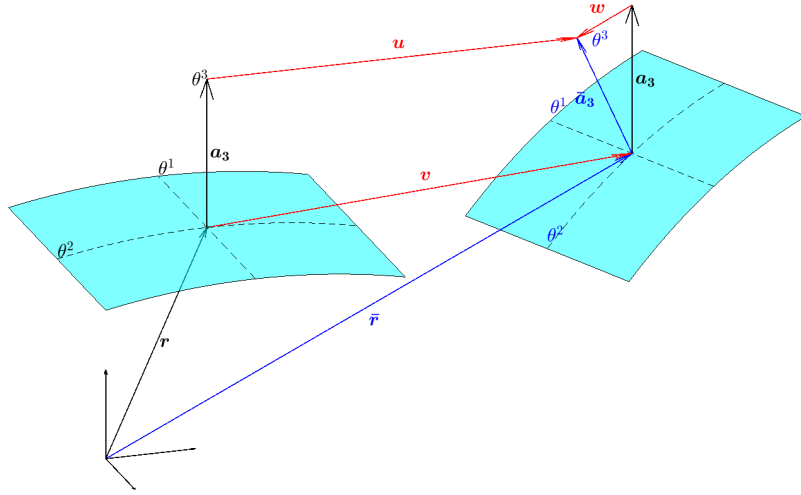


FIGURE 1 – Géométrie et cinématique de l'élément coque

Afin de contrer les phénomènes de verrouillage, une déformation supplémentaire $\tilde{\mathbf{E}}$ est introduite via le concept EAS, menant à l'élément à 7 paramètres. Cette déformation, linéaire dans l'épaisseur, s'écrit $\tilde{\mathbf{E}} = \theta^3 \beta_{33} \mathbf{g}^3 \otimes \mathbf{g}^3$. Le tenseur de Green-Lagrange modifié devient :

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) = \mathbf{E}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}^l(\mathbf{u}) + \mathbf{E}^{nl}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{E}} \quad (9)$$

Ce champ additionnel EAS doit en outre respecter la condition d'orthogonalité suivante, assurant la nullité du travail des contraintes associées sur ce champ de déformation :

$$\int_{\Omega} \mathbf{S} : \delta \tilde{\mathbf{E}} \, d\Omega = 0 \quad (10)$$

2.4 Discrétisation éléments finis

Suivant [9], l'approximation par éléments finis du champ de déplacement s'appuie sur un élément quadrilatéral à 8 nœuds :

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n N^k \mathbf{v}^k + \theta^3 N^k \mathbf{w}_3^k \quad (11)$$

où N^k est la fonction de forme du nœud k .

Le vecteur des inconnues nodales \mathbf{q} regroupe les déplacements moyens \mathbf{v}_k et les variations de vecteurs directeurs \mathbf{w}_k pour les 8 nœuds. L'approximation spatiale du champ de déplacement s'écrit de façon matricielle :

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}] \mathbf{q} \quad (12)$$

où $[\mathbf{N}]$ est la matrice des fonctions de forme. Le lecteur pourra se référer à [28] pour les détails complets de la discrétisation de cet élément.

3 Application numérique

3.1 Définition des modèles

La validation du modèle numérique s'effectue en répliquant la configuration expérimentale de [5]. Deux géométries principales, de même hauteur (110 mm) et épaisseur t (0,1 mm), sont analysées.

- Matériau : Les deux structures sont en acier, dont les propriétés élasto-plastiques sont : module de Young $E = 186 \text{ GPa}$, coefficient de Poisson $\nu = 0.265$, masse volumique $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, limite élastique $\sigma = 214 \text{ MPa}$.

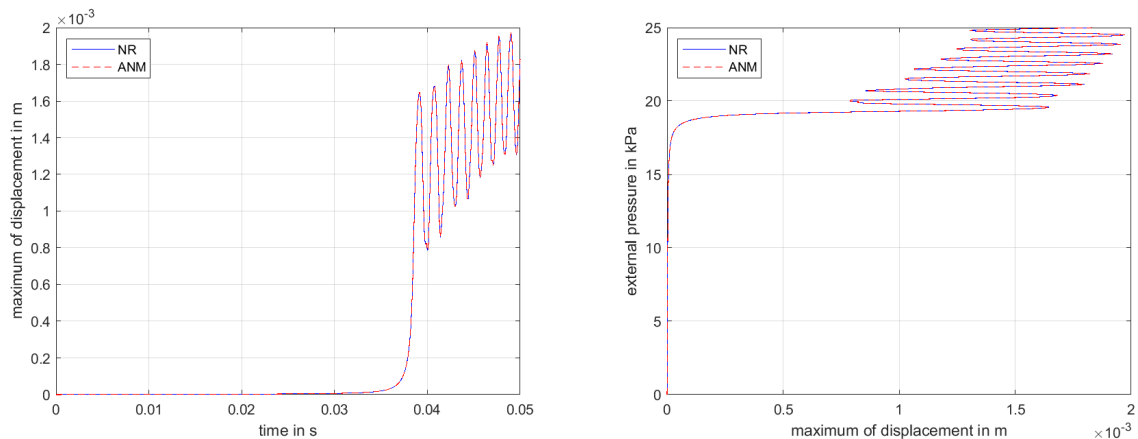
- Un modèle cylindrique de 110 mm de diamètre, servant de cas test pour la validation par rapport aux données expérimentales.
- Un modèle conique dont le rayon moyen est identique à celui du cylindre, permettant une comparaison directe de l'influence de la conicité. L'angle α de conicité est représentatif de la géométrie du divergent.

Une étude de convergence de maillage a été réalisée. Elle a conduit à l'emploi d'éléments S8R (quadrilatère à 8 nœuds, intégration réduite) pour les analyses quasi-statiques et dynamiques implicites, et S4R (quadrilatère à 4 nœuds, intégration réduite) pour les simulations dynamiques explicites, en cohérence avec les capacités d'Abaqus.

Afin de s'approcher de la géométrie du divergent, le modèle du cône possède deux configurations de conditions limites. Une première configuration, comme décrite précédemment, est encastrée aux deux extrémités pour reproduire les conditions du modèle cylindrique expérimental. Ensuite, une configuration dont l'extrémité inférieure est libre est utilisée pour reproduire le comportement du divergent.

3.2 Réponse transitoire sous chargement progressif en pression externe (NR - MAN)

Une première étude permettant de reproduire une simulation quasi-statique en dynamique implicite a été réalisée pour s'assurer de l'adéquation entre l'analyse Newton-Raphson (NR) et la Méthode Asymptotique Numérique (MAN).



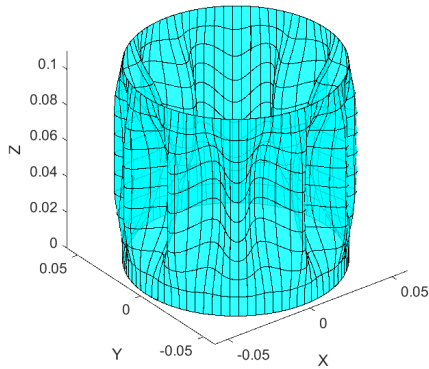
(a) Déplacement maximal en fonction du temps

(b) Pression en fonction du déplacement maximal

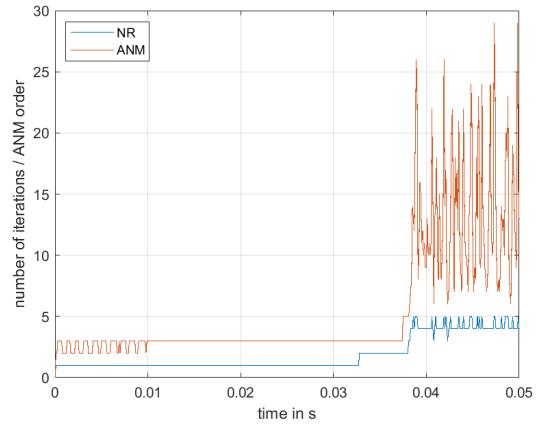
FIGURE 2 – Analyse des déplacements maximaux du cylindre soumis à une pression externe

Une analyse de flambage préliminaire est conduite, avec la prise en compte des forces non-conservatives (pression externe), donnant une valeur de pression critique de 18,4 kPa et un premier mode de flambement caractérisé par 11 lobes autour de la circonférence du cylindre. Une pression externe est donc appliquée graduellement au cylindre, atteignant une pression de 25 kPa. Le calcul est effectué sur une durée totale $T_f = 0.05s$, nettement plus grande que la période fondamentale de la structure, autour de 0.001s, permettant de simuler, via des schémas temporels dynamiques, un comportement proche d'un calcul quasi-statique. Sur la Figure 2, nous observons que la charge de flambage se situe autour de 18,5 kPa, très proche de la charge critique de flambement obtenue précédemment. Les deux calculs en dynamique lente, NR et MAN, avec le même pas de temps $\Delta t = 10^{-4}s$, donnent des résultats superposés. Notons que ces calculs ont été effectués en introduisant un défaut géométrique initial, correspondant au premier mode de flambement. Ce défaut initial est retrouvé en fin de calcul, à $t = T_f$, comme montré sur la Figure 3(a). Enfin, la Figure 3(b) donne des informations complémentaires sur le nombre d'itérations et l'ordre de troncature de la série utilisé pour réaliser les calculs NR et MAN. Après flambement, c'est-à-dire après $t = 37ms$, le comportement vibratoire impose un ordre des séries MAN plus important, oscillant entre 10 et 25 afin d'atteindre la convergence sur le pas de temps. Le calcul NR utilise 4 à 5 itérations par pas. Le modèle conique a été analysé, les résultats sont très similaires avec une charge critique de flambage légèrement plus faible.

Deformed configuration et the end of the simulation (scale factor=10)



(a) Déformée du cylindre à la fin de la simulation



(b) Nombre d'itérations NR et ordre de troncature de la série MAN

FIGURE 3 – Analyse des déplacements maximaux du cylindre soumis à une pression externe

3.3 Réponse transitoire sous pulse de pression externe (Abaqus)

Pour cette étude dynamique, la structure est soumise à un pulse de pression dont le profil temporel est identique à celui enregistré lors des essais expérimentaux [5]. Le critère de Budiansky-Roth, qui identifie le flambage par une augmentation soudaine du déplacement maximal pour une faible hausse de la charge, est adopté. Plusieurs simulations représentées dans la Figure 4 sont menées avec des amplitudes maximales de pulse croissantes (de 10 kPa à 50 kPa) pour cartographier la réponse de la structure. En revanche, le critère de Budiansky-Roth n'était pas aussi flagrant qu'attendu lors des simulations. On constate plutôt ces comportements :

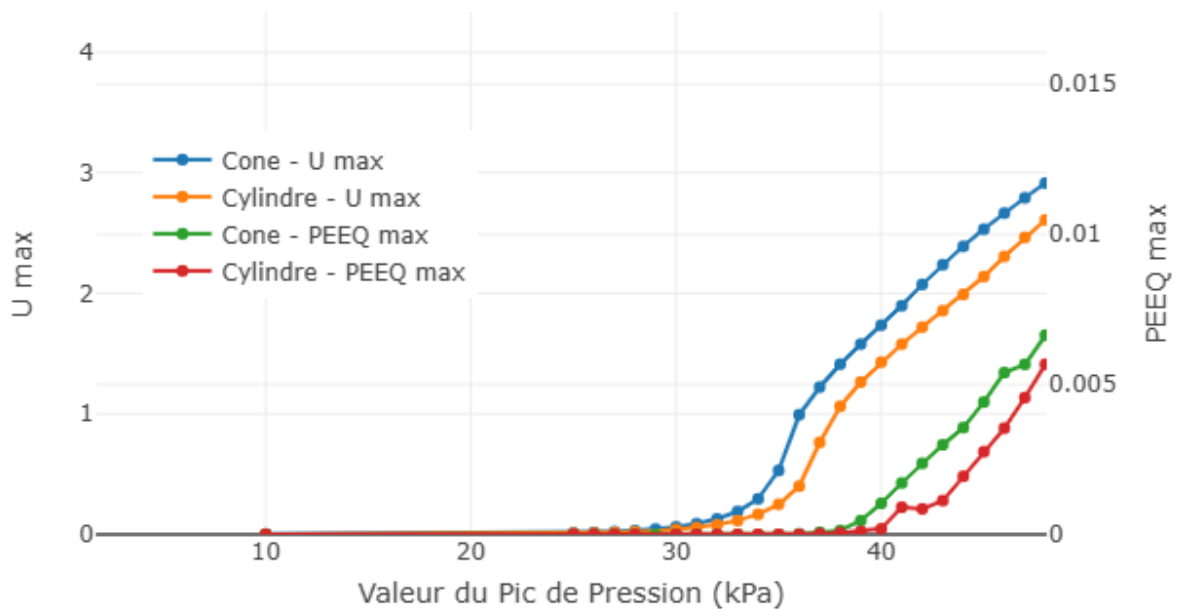


FIGURE 4 – Graphique comparant le déplacement max et la plasticité du cylindre avec le cône

- Réponse élastique : la structure vibre puis revient à sa position initiale.
- Régime non-linéaire : les déplacements sont importants, mais le retour à la position initiale se fait sans déformation permanente.
- Flambage dynamique : la structure subit des déplacements résiduels permanents après le passage du pulse.

L'analyse se concentre sur l'évolution du déplacement maximal durant la phase transitoire et sur le déplacement résiduel en fin de simulation.

4 Conclusion et perspectives

Une étude numérique de flambage dynamique d'une structure mince sous forme cylindrique ou conique représentative d'un divergent de lanceur spatial a été présentée. Les simulations ont permis de valider les modèles numériques de coques à l'aide de deux méthodes numériques basées sur la méthode de Newton-Raphson et sur la méthode asymptotique numérique par comparaison avec des résultats expérimentaux de référence [5].

Les travaux futurs s'orienteront vers une étude de flambage dynamique de ce type de structure en considérant des cas de charges proches des conditions réelles de fonctionnement du moteur de fusée.

5 Remerciements

Nous tenons à remercier le CNES et la région Grand Est pour leur soutien dans ce projet de recherche.

Références

- [1] P. Seide, V. I. Weingarten, and J. P. Peterson. Buckling of thin-walled circular cylinders, nasa sp-8007. Technical report, NASA, 1965.
- [2] P. Seide, V. I. Weingarten, and J. P. Peterson. Buckling of thin-walled truncated cones, nasa sp-8019. Technical report, NASA, 1968.
- [3] M. Nemeth and J. J. Starnes. The nasa monographs on shell stability design recommendations-a review and suggested improvements. *Stability Analysis of Plates and Shells*, page 1302, 1997.
- [4] A. Da Silva. *Flambage de coques cylindriques minces sous chargements combinés : pression interne, compression, flexion et cisaillement*. Thesis, INSA, 2011.
- [5] V. Thierry, B. Tang, P. Joffrin, T.T. Bui, and A. Limam. Flambage dynamique de coques cylindriques minces soumises à un pulse de pression externe. In *15ème colloque national en calcul des structures*, 2022.
- [6] Anh-Khoa Chau, Michael Brun, Pascal Ventura, Hamid Zahrouni, and Michel Potier-Ferry. Non-linear buckling analysis of thin-walled beams modeled with 7-parameter shell elements. *Thin-Walled Structures*, 201, 2024.
- [7] Anh-Khoa Chau, Michael Brun, Pascal Ventura, Hamid Zahrouni, and Michel Potier-Ferry. Asymptotic numerical method for dynamic buckling of shell structures with follower pressure. *International Journal of Solids and Structures*, 308, 2025.
- [8] Anh-Khoa Chau, Michael Brun, Pascal Ventura, Hamid Zahrouni, and Michel Potier-Ferry. Explicit dynamics and buckling simulations with 7-p shell elements and enhanced assumed strain. *Finite Elements in Analysis and Design*, 247 :104346, 2025.
- [9] N. Butcher, E. Ramm, and D. Roehl. Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :2551–2568, 1994.
- [10] ABAQUS. (2014) *Theory Manual, Version 6.14*. Dassaults Systemes Simulia, Inc, 2014.
- [11] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. Asymptotic-numerical method and padé approximants for non-linear elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :1187–1213, 1994.
- [12] B. Cochelin. A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers and Structures*, 53 :1181–1192, 1994.
- [13] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*. Hermès-Lavoisier, Paris, 2007.
- [14] S. Baguet and B. Cochelin. On the behaviour of the anm continuation in the presence of bifurcation. *Communication in Numerical Methods in Engineering*, 19 :459–471, 2003.
- [15] E.H. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, and M. Boudi. Bifurcation points and bifurcation branches by asymptotic-numerical method and padé approximants. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60 :1987–2012, 2004.

- [16] S. Nezamabadi, J. Yvonnet, and H. Zahrouni. Solving hyperelastic material problems by asymptotic numerical method. *Computational Mechanics*, 2011.
- [17] S. Nezamabadi, J. Yvonnet, H. Zahrouni, and M. Potier-Ferry. A multiscale finite element approach for buckling analysis of elastoplastic long fiber composites. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2010.
- [18] M. Assidi, H. Zahrouni, N. Damil, and M. Potier-Ferry. Regularization and perturbation technique to solve plasticity problems. *International Journal of Material Forming*, 2009.
- [19] W. Aggoune, H. Zahrouni, and M. Potier-Ferry. Asymptotic numerical method for unilateral contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006.
- [20] B. Cochelin and C. Compain. An asymptotic numerical method for non-linear transient dynamics. *Revue européenne des éléments finis*, 2000.
- [21] M. Jamal, B. Braikat, S. Boutmir, N. Damil, and M. Potier-Ferry. A high order implicit algorithm for solving nonlinear problems. *Computational Mechanics*, 28 :375–390, 2002.
- [22] S. Boutmir, B. Braikat, M. Jamal, N. Damil, B. Cochelin, and M. Potier-Ferry. Des solveurs implicites d’ordre supérieur pour les problèmes de dynamique non linéaire des structures. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 2004.
- [23] Y. Guevel, G Girault, and J. Cadou. Parametric analysis of steady bifurcations in 2d incompressible viscous flow with high order algorithm. *Computers & Fluids*, 2014.
- [24] Y. Guevel, G Girault, and J. Cadou. Numerical comparisons of highorder nonlinear solvers for the transient navier–stokes equations based on homotopy and perturbation techniques. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015.
- [25] Y. Guevel, G Girault, and J. Cadou. Numerical bifurcation analysis for 3-dimensional sudden expansion fluid dynamic problem. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2015.
- [26] B. Claude, G. Girault, B. Leblé, and J.-M. Cadou. On the use of high order perturbation method for numerical time integration in structural dynamics. *Comptes Rendus Mécanique*, 2023.
- [27] E. Ramm and W.A. Wall. Shell structures - a sensitive interrelation between physics and numerics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60 :381 – 427, 2004.
- [28] H. Zahrouni, B. Cochelin, and M. Poiter-Ferry. Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175 :71–85, 1999.
- [29] J.C. Simo and M.S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29 :1595–1638, 1990.