

Formulation hybride fortement couplée pour des sous-domaines fluide et structure non-conformes avec stratégie de sous-cyclage.

R. Pulicani^{1,2}, M. Brun², O. Allain¹, A. Gravouil³

¹ LEMMA, 2000 route des Lucioles, Biot, 06160, roxan.pulicani@lemma-ing.com, olivier.allain@lemma-ing.com

² LEM3, Université de Lorraine, CNRS, Arts et Métiers Institute of Technology, LEM3, F-57000 Metz, France, michael.brun@univ-lorraine.fr

³ INSA Lyon, CNRS, LaMCoS, UMR5259, 27bis, Avenue Jean Capelle, Villeurbanne, 69621, France, anthony.gravouil@insa-lyon.fr

Résumé — Cet article présente une approche fortement couplée dans le cadre "Arbitrary Lagrangian–Eulerian" (ALE) pour résoudre des problèmes d'interaction fluide-structure (FSI) avec fluide compressible. La méthode des volumes finis (FVM) pour le fluide est couplée à la méthode des éléments finis (FEM) pour la structure. Le couplage est effectué via des multiplicateurs de Lagrange qui assurent la continuité de la vitesse normale à l'interface. La méthode permet d'utiliser des pas de temps différents pour les solveurs fluide et solide et de traiter des maillages non-conforme grâce à la méthode Mortar.

Mots clés — Interaction Fluide-Structure, Multiplicateurs de Lagrange, Multi-pas de temps, Continuité de la vitesse normale, Maillage non conforme

1 Introduction

Les phénomènes d'interaction fluide-structure (IFS) impliquant de grands déplacements de structures soumises à des écoulements compressibles, comme le flottement [1, 2], les chargements par explosion ou les explosions sous-marines, représentent des défis majeurs dans divers domaines de l'ingénierie. Ces phénomènes nécessitent une approche de couplage bidirectionnel pour capturer fidèlement les dynamiques en jeu. Cependant, les échelles de temps physiques du fluide et de la structure ne sont pas toujours compatibles, rendant coûteuse et parfois peu pertinente l'utilisation de pas de temps identiques ou de maillages conformes avec des raffinements similaires pour les deux sous-domaines. Par exemple, dans les cas du flottement [1, 2], la résolution d'un écoulement compressible à haut nombre de Mach impose généralement un pas de temps et un maillage fin au fluide, tandis que la structure, soumise principalement à des déformations de flexion, peut être résolue avec un pas de temps plus grand et un maillage plus grossier.

Les équations gouvernant les sous-domaines fluide et structure sont généralement résolues à l'aide d'algorithmes IFS classés en deux catégories : monolithiques ou partitionnés. Les approches monolithiques intègrent l'ensemble des informations des deux sous-domaines dans un système unique, permettant une résolution simultanée des équations fluide et structure [3]. Bien que ces méthodes assurent un couplage fort et conservatif à l'interface, elles impliquent souvent des systèmes de grande taille et mal conditionnés, limitant l'utilisation de solveurs spécialisés et entraînant des coûts de calcul élevés. Les approches partitionnées, en revanche, résolvent séparément les sous-domaines fluide et structure, échangeant les données entre eux. Les approches partitionnées sans itérations de couplage, dites faiblement couplées, ont ainsi des coûts de calcul relativement faibles. Bien que largement utilisées dans la résolution de problèmes aeroélastiques [4, 5, 6, 7], elles ne garantissent pas la continuité à l'interface et peuvent souffrir d'instabilités numériques en raison d'un décalage temporel entre les calculs fluide et structure.

Pour permettre l'utilisation de solveurs spécialisés et découpler les calculs fluide et structure tout en conservant une formulation forte, des multiplicateurs de Lagrange (ML) peuvent être introduits à l'interface fluide-structure (FS). Cette approche, couramment employée en simulation de solide, facilite l'interaction entre sous-domaines aux propriétés hétérogènes. Sans exhaustivité, la gestion de pas de temps distincts peut être assurée par l'algorithme de Gravouil-Combescuré (GC) [8, 9, 10], tandis que la non-conformité des maillages à l'interface peut-être traitée par la méthode Mortar [11].

En IFS, les ML ont déjà été employées dans le cadre de la méthode des frontières immergées pour satisfaire les conditions cinématiques relatives à la structure immergée dans le maillage fluide [12, 13].

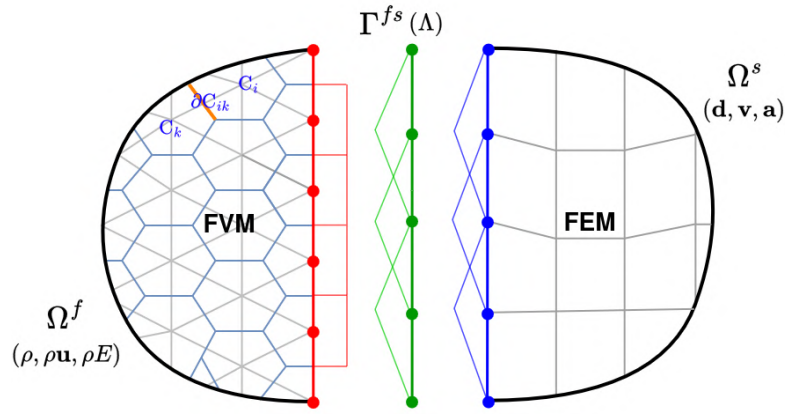


FIGURE 1 – Représentation schématique des trois domaines constituant le problème IFS : le domaine fluide, le domaine structure et le domaine des ML. Les fonctions de formes associées à chaque domaine sont représentées sur l’interface.

Récemment, les ML ont aussi été utilisés pour des couplage IFS avec une formulation "Arbitrary Lagrangian–Eulerian" (ALE). Dans ce cadre, nous retrouvons principalement des couplages de solveurs éléments finis (EF) pour résoudre le fluide et la structure [14, 15, 16, 17, 18]. Des couplages hybrides ont également été explorés, combinant systématiquement la méthode des éléments finis pour la structure avec différentes méthodes pour le fluide. Parmi ces combinaisons, on retrouve le couplage avec la méthode SPH (*Smooth Particle Hydrodynamics*) [19, 20], ainsi que le couplage entre la méthode PFEM (*Particle Finite Element Method*) [21]. Malgré l’importance de la méthode des volumes finis (VF) en CFD, l’utilisation des ML pour coupler VF et EF reste peu exploitée [22, 23].

Cet article présente une approche de couplage fort entre la méthode des volumes finis en formulation ALE et la méthode des éléments finis. Ce couplage s’appuie sur des multiplicateurs de Lagrange pour garantir la continuité de la vitesse normale à l’interface. Le fluide compressible est traité par un schéma explicite de Runge-Kutta d’ordre trois (RK3), tandis que la structure utilise le schéma de Newmark implicite de l’accélération moyenne d’ordre deux. Les pas de temps fluide et structure sont dissociés, avec un sous-cyclage du solveur fluide. L’algorithme implicite-explicite multi-pas de temps GC est alors employé. Les maillages, non conformes à l’interface fluide-structure, sont traités via une adaptation de la méthode Mortar au contexte IFS.

2 Aperçu de la stratégie de couplage basée sur la continuité des vitesses normales et la décomposition free/link

Nous considérons deux sous-domaines Ω^f et Ω^s associés au fluide et à la structure. La stratégie de couplage introduit un troisième champ, les multiplicateurs de Lagrange (ML), au niveau de l’interface fluide structure Γ^{fs} . Les ML peuvent être considérés comme un champ de pression à valeur sur les deux sous-domaines au niveau de l’interface et construit pour imposer la continuité des vitesses normales du fluide et du solide (voir la Figure 1).

2.1 Continuité des vitesses normales et matrice de contrainte avec la méthode Mortar

La contrainte cinématique liée à la continuité des vitesses à l’interface s’exprime par l’égalité des vitesses normales entre les sous-domaines fluide et solide :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur} \quad \Gamma^{fs}, \quad (1)$$

où \mathbf{u} et \mathbf{v} désignent respectivement les vitesses du fluide et de la structure, et \mathbf{n} la normale sortante à l’interface Γ^{fs} . Nous considérons des maillages fluide et structure non conformes à l’interface avec les fonctions de forme ϕ_i^f et ψ_j^s associées aux maillages fluide et structure. Les vitesses discrètes s’écrivent alors :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N^f} \mathbf{u}_i \phi_i^f \quad \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{N^s} \mathbf{v}_j \psi_j^s, \quad (2)$$

où \mathbf{u}_i et \mathbf{v}_j sont les degrés de liberté nodaux, et N^f , N^s les nombres de nœuds respectifs.

Le principe de la méthode Mortar est d'imposer faiblement la continuité des vitesses sur l'espace des ML qui fait office de support. Nous considérons donc un champ de ML à l'interface à valeur dans l'espace discrétisé \mathcal{M} défini sur Γ , avec des fonctions de forme associées μ_k . La formulation variationnelle de la continuité des vitesses s'écrit :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mu_k d\Gamma = 0, \quad \forall \mu_k \in \mathcal{M}. \quad (3)$$

En substituant les expressions discrètes des vitesses Eq.(2) dans Eq.(3), on obtient :

$$\sum_{i=1}^{N^f} \mathbf{u}_i \cdot \int_{\Gamma} \phi_i^f \mu_k \mathbf{n} d\Gamma - \sum_{j=1}^{N^s} \mathbf{v}_j \cdot \int_{\Gamma} \psi_j^s \mu_k \mathbf{n} d\Gamma = 0, \quad \forall \mu_k \in \mathcal{M}. \quad (4)$$

Cette équation peut être réécrite sous forme matricielle :

$$\mathbf{L}^f \mathbf{u} + \mathbf{L}^s \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

où \mathbf{u} et \mathbf{v} représentent les vecteurs contenant les ddl \mathbf{u}_i et \mathbf{v}_j . Les matrices de contrainte \mathbf{L}^f et \mathbf{L}^s sont définies par :

$$\mathbf{L}_{ki}^f = \int_{\Gamma} \phi_i^f \mu_k \mathbf{n} d\Gamma, \quad (6)$$

$$\mathbf{L}_{kj}^s = - \int_{\Gamma} \psi_j^s \mu_k \mathbf{n} d\Gamma. \quad (7)$$

Ces matrices projettent les degrés de liberté du fluide et de la structure sur l'espace des ML, assurant ainsi la continuité des vitesses normales même pour des maillages non conformes. La contrainte de vitesse à l'interface est assurée par le vecteur de multiplicateurs de Lagrange $\Lambda(t)$, qui impose l'équilibre des sous-domaines. Par la suite, Λ désignera le vecteur regroupant les multiplicateurs de Lagrange Λ_i associés à l'interface et donc à \mathcal{M} .

La structure est résolue avec la méthode des EF, définissant directement les fonctions de formes. Le fluide est lui résolu avec une formulation VF centrée aux nœuds permettant une analogie avec une formulation EF [24, 25, 26]. Les fonction de formes correspondantes sont constantes par morceaux dans les cellules du maillage. Avec la méthode Mortar, l'espace des ML est généralement choisi conforme à celui d'un des deux sous-domaine [27, 28]. Ici c'est le maillage solide et ses fonctions de formes qui sont utilisés pour construire l'espace des ML. La Figure 1 schématise les fonctions de forme utilisées.

2.2 Équation discrètes et décomposition free/link

Cette section présente les équations discrètes liées aux sous-domaines fluide et solide. Ces deux sous-domaines sont résolus avec des schémas différents mais une même logique s'applique quant à leur décomposition, nécessaire à l'application de la méthode GC. Aux équations usuelles du fluide et de la structure, nous rajoutons la contribution liée aux ML.

Pour la structure on obtient :

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{L}^{sT} \Lambda \quad (8)$$

avec \mathbf{a} l'accélération, \mathbf{d} les déplacements, \mathbf{M} et \mathbf{K} les matrices de masse et de rigidité et \mathbf{F}_{ext} les forces externes. La structure est résolue avec le schéma implicite de Newmark de l'accélération moyenne ($\gamma_s = \frac{1}{2}$ et $\beta_s = \frac{1}{4}$) [29, 30]. La vitesse au pas de temps $n+1$ s'exprime par :

$$\mathbf{v}^{n+1} = {}^p\mathbf{v}^{n+1} + \frac{1}{2} \Delta t \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \left(\mathbf{F}_{ext}^{n+1} - \mathbf{K} {}^p\mathbf{d}^{n+1} + \mathbf{L}^{sT} \Lambda^{n+1} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} {}^p\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{d}^n + \Delta t \mathbf{v}^n + \frac{1}{4} \Delta t^2 \mathbf{a}^n \\ {}^p\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{a}^n \\ \tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K} \end{cases} \quad (9)$$

Pour le fluide, en considérant une cellule i , l'équation liée à la quantité de vitesse s'exprime par :

$$\frac{\partial(\rho_i C_i \mathbf{u}_i)}{\partial t} = \sum_k^{n_i} \Phi_{i,k} + \mathbf{L}_i^{fT} \Lambda \quad (10)$$

avec ρ la densité, C le volume d'une cellule et $\Phi_{i,k}$ le flux de Roe [31, 26] défini entre les cellules i et k . En considérant un schéma de Runge Kutta d'ordre 1, la vitesse au pas de temps $n+1$ est donnée par :

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \frac{\rho_i^n C_i^n \mathbf{u}_i^n}{\rho_i^{n+1} C_i^{n+1}} + \frac{\Delta t}{\rho_i^{n+1} C_i^{n+1}} \left(\sum_k^{n_i} \Phi_{i,k}^{n+1} + \mathbf{L}_i^{fT} \Lambda^{n+1} \right) \quad (11)$$

Les vitesses de chaque sous-domaine sont décomposées en parties *free* et *link*. La partie *free* est totalement indépendante des quantités d'interface et donc de Λ , tandis que les quantités *link* dépendent exclusivement de ces quantités d'interface. Les vitesses du fluide et de la structure au pas de temps n peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}_{free}^{n+1} + \mathbf{u}_{link}^{n+1} \\ \mathbf{v}^{n+1} &= \mathbf{v}_{free}^{n+1} + \mathbf{v}_{link}^{n+1} \end{aligned} \quad (12)$$

Les parties *link* sont définies avec Λ^{n+1} et les opérateurs \mathbf{H}^f et \mathbf{H}^s :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{link}^{n+1} &= -\mathbf{L}^{f-1} \mathbf{H}^f \Lambda^{n+1} \\ \mathbf{v}_{link}^{n+1} &= -\mathbf{L}^{s-1} \mathbf{H}^s \Lambda^{n+1} \end{aligned} \quad (13)$$

En insérant Eq.(12) et Eq.(13) dans Eq.(5), nous obtenons :

$$\mathbf{L}^f \mathbf{u}_{free}^{n+1} - \mathbf{H}^f \Lambda^{n+1} + \mathbf{L}^s \mathbf{v}_{free}^{n+1} - \mathbf{H}^s \Lambda^{n+1} = 0 \quad (14)$$

Λ^{n+1} peut alors être obtenu à partir des quantités *free* :

$$\Lambda^{n+1} = (\mathbf{H}^f + \mathbf{H}^s)^{-1} (\mathbf{L}^f \mathbf{u}_{free}^{n+1} + \mathbf{L}^s \mathbf{v}_{free}^{n+1}) \quad (15)$$

Les vitesses *free* et *link* de la structure s'expriment :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{free}^{n+1} &= \mathbf{v}^{n+1} + \gamma \Delta t \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\mathbf{F}_{ext}^{n+1} - \mathbf{K}^p \mathbf{d}^{n+1}) \\ \mathbf{v}_{link}^{n+1} &= -\gamma \Delta t \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{L}^{n+1T} \Lambda^{n+1} \end{aligned} \quad (16)$$

Les vitesses *free* et *link* pour une cellule fluide i s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{free,i}^{n+1} &= \frac{C_i^n \rho_i^n \mathbf{u}_i^n}{\rho_i^{n+1} C_i^{n+1}} + \frac{\Delta t \sum_k^{n_i} \Phi_{i,k}^{n+1}}{\rho_i^{n+1} C_i^{n+1}} \\ \mathbf{u}_{link,i}^{n+1} &= \frac{\Delta t}{\rho_i^{n+1} C_i^{n+1}} \mathbf{L}_i^{n+1T} \Lambda^{n+1} \end{aligned} \quad (17)$$

Ce formalisme s'adapte facilement à des schémas de Runge Kutta d'ordre supérieurs. Il suffit de décomposer chaque sous itération de Runge Kutta. Dans nos calculs, nous utiliseront un schéma de Shu d'ordre 3 [32, 25].

2.3 Algorithmes mono et multi-pas de temps

L'algorithme mono-pas de temps est décrit dans la Figure 2. Basé sur la décomposition précédente, l'algorithme comporte trois phases principales. La résolution de \mathbf{u}_{free}^{n+1} et \mathbf{v}_{free}^{n+1} , qui peut être faite séparément avec les quantités du pas de temps précédent. Ensuite, le calcul de Λ^{n+1} à partir des quantités *free* en utilisant Eq.(15). Enfin, la résolution de \mathbf{u}_{link}^{n+1} et \mathbf{v}_{link}^{n+1} à partir de Λ^{n+1} en utilisant Eq.(13).

Pour le calcul *free* du fluide, une extrapolation du maillage fluide est nécessaire. Cette extrapolation est basée sur la cinématique de la structure :

$$\mathbf{x}_{face}^{n+1} = \mathbf{x}_{face}^n + \Delta t^f \mathbf{v}_{face}^n + \frac{\Delta t^f}{2} \mathbf{a}_{face}^n \quad (18)$$

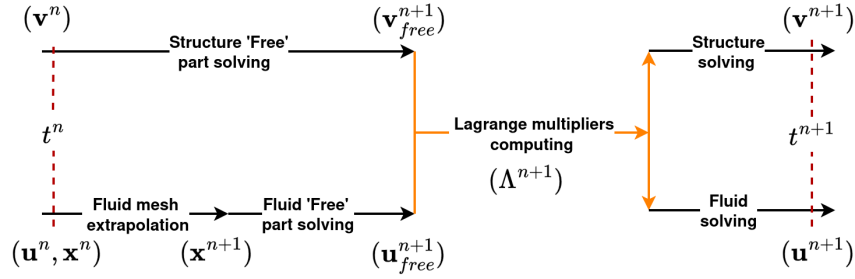


FIGURE 2 – Stratégie de couplage proposée avec le même pas de temps pour le fluide et la structure.

où \mathbf{v}_{face} et \mathbf{a}_{face} représentent la vitesse et l'accélération de la structure à l'interface.

Pour le multi-pas de temps, nous considérerons toujours un pas de temps plus grand pour la structure et un sous-cyclage du fluide. L'indice du pas de temps fluide sera j , variant de 0 à m , avec 0 et m étant des pas de temps communs pour le fluide et la structure. Le diagramme, présenté Figure 3, décrit le fonctionnement de l'algorithme, en tenant compte du sous-cyclage du fluide. Deux difficultés se posent lors de la résolution des états fluides : obtenir Λ^j pour calculer \mathbf{u}_{link}^j alors que la vitesse *free*, \mathbf{v}_{free}^j , n'est pas calculée, et extrapoler le maillage fluide, qui peut ne plus être basé sur la structure.

Pour approximer Λ^j , une interpolation de la vitesse *free* de la structure est effectuée :

$$\mathbf{v}_{free}^j = \frac{m-j}{m} \mathbf{v}_{free}^0 + \frac{j}{m} \mathbf{v}_{free}^m \quad (19)$$

et Λ^j est calculé à chaque sous-cycle fluide à partir de \mathbf{v}_{free}^j et \mathbf{u}_{free}^j .

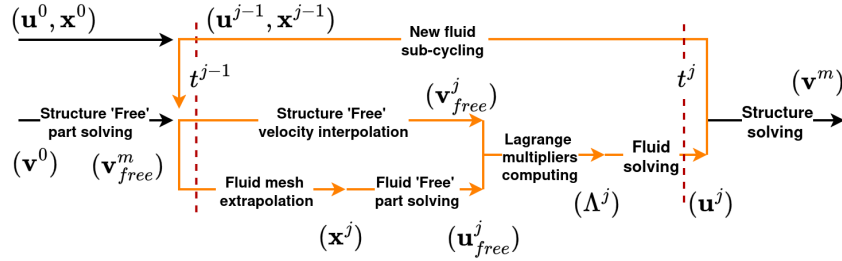


FIGURE 3 – Stratégie de couplage proposée avec des pas de temps différents et sous-cyclage du solveur fluide. Il y a un total de m sous-cycles j , pour j variant de 1 à m .

A chaque pas de temps fin $\Delta t^f = [t^{j-1}; t^j]$, l'extrapolation du maillage fluide repose sur des quantités intermédiaires calculées à partir de quantités connues au temps t_j et qui permettent d'approximer les déplacements de la structure lors du sous-cyclage :

$$\mathbf{a}_{free}^{j-1} = \frac{m-(j-1)}{m} \mathbf{a}_{free}^0 + \frac{j-1}{m} \mathbf{a}_{free}^m \quad (20)$$

La vitesse et l'accélération à l'interface sont estimées par :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{face}^{j-1} &= \mathbf{v}_{face, free}^{j-1} + \gamma_s \Delta t^s \mathbf{L}_s \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{L}_s^T \Lambda^{j-1} \\ \mathbf{a}_{face}^{j-1} &= \mathbf{a}_{face, free}^{j-1} + \mathbf{L}_s \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{L}_s^T \Lambda^{j-1} \end{aligned} \quad (21)$$

Le déplacement du maillage fluide est alors calculé par :

$$\mathbf{x}_{face}^j = \mathbf{x}_{face}^{j-1} + \Delta t^f \mathbf{v}_{face}^{j-1} + \frac{(\Delta t^f)^2}{2} \mathbf{a}_{face}^{j-1} \quad (22)$$

Cette méthode assure la stabilité, même pour des rapports de pas de temps élevés.

3 Étude numérique : onde de choc impactant une plaque déformable

Nous avons étudié l'interaction entre une onde de choc plane et une plaque déformable, suivant la configuration décrite par Giordano [33]. Un schéma de la configuration est présenté sur la Figure 4. Ce cas constitue l'une des rares configurations FSI compressibles bidimensionnelles pour lesquelles une validation expérimentale est disponible, offrant une référence intéressante pour les études numériques [34]. Cette application numérique a pour objectif de déterminer l'impact sur les résultats du sous-cyclage du solveur fluide et de la non conformité des maillages fluide et structure.

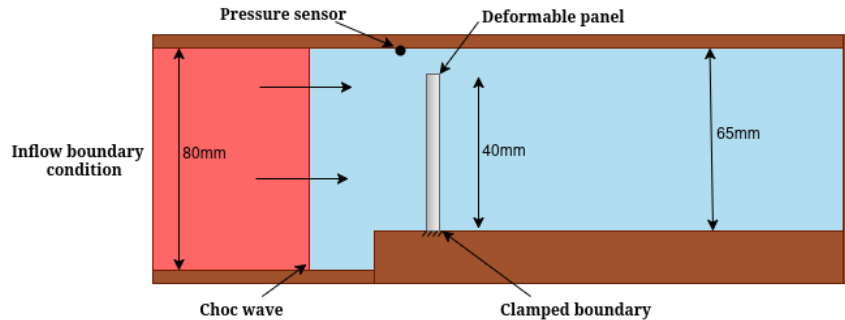


FIGURE 4 – Schéma de la configuration de la plaque déformable soumise à une onde de choc plane.

La simulation est constituée d'une plaque mince de hauteur $H = 40$, mm et d'épaisseur $t = 1$ mm, montée verticalement dans un tube à choc et encastrée à sa base. Le matériau de la plaque présente les caractéristiques suivantes : module de Young $E = 73$ GPa, coefficient de Poisson $\nu = 0.33$ et densité $\rho = 2780$ kg.m⁻³. Une onde de choc incidente plane est générée avec une vitesse de 105.03 m.s⁻¹, une pression de 151333 Pa et une densité de 1595 kg.m⁻³. L'onde de choc se propage dans de l'air à conditions ambiantes. Lorsqu'elle frappe le solide, l'onde induit des contraintes dues à la pression, suivi d'une réponse dynamique de la structure. L'interaction fluide-structure qui en résulte entraîne des oscillations de la plaque et des réflexions d'onde dans la géométrie confinée.

Lors des expériences menées par [33], des données sur le déplacement du côté supérieur de la plaque et la pression dans le fluide en amont de la plaque ont été obtenues. Ces mesures constituent une référence fiable pour valider les simulations numériques. Les Figures 5a et 5b comparent les résultats numériques, obtenus avec un maillage conforme et le même pas de temps dans les sous-domaines fluide et structure, aux données expérimentales, respectivement pour l'évolution temporelle du déplacement de la plaque et pour le signal de pression. Les résultats montrent un bon accord en termes de déplacement et de pression, confirmant la capacité de l'approche par multiplicateurs de Lagrange à reproduire les principales caractéristiques de la dynamique FSI.

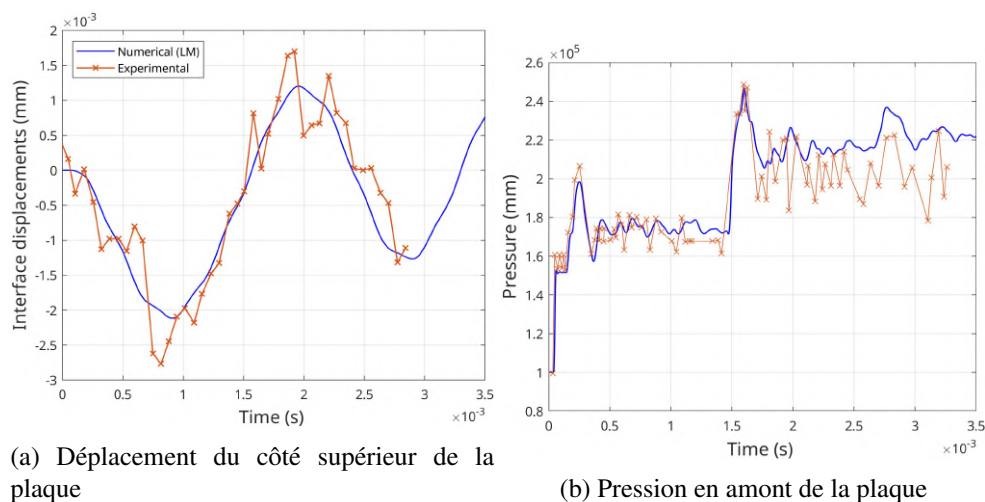
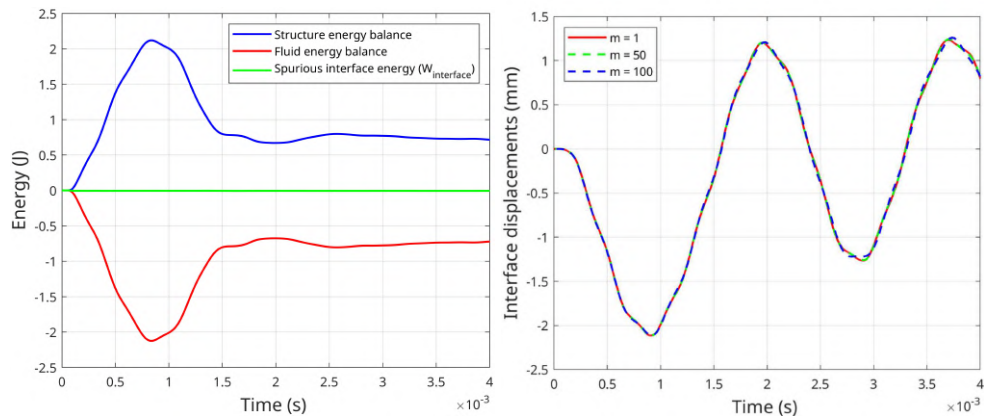


FIGURE 5 – Comparaison entre les données expérimentales de [33] et les résultats numériques obtenus avec l'approche LM.

Les résultats numériques présentés dans la Figure 5 sont utilisés comme une référence à laquelle sont comparés les résultats avec sous-cyclage et maillage non conformes.

La Figure 6b montre les déplacements de la plaque pour différents ratios de pas de temps m . Les déplacements de la plaque calculés avec un ratio $m = 50$ correspondent très bien à ceux obtenus avec un ratio $m = 1$. Pour $m = 100$, les déplacements restent précis pendant la phase initiale et présentent une très légère divergence en fin de simulation. La Figure 6a montre l'évolution des bilans énergétiques des solveurs Fluide et Structure ainsi que l'énergie parasite d'interface introduite dans le système par le couplage. On observe que l'énergie parasite d'interface est faible, comparée aux bilans énergétiques dans chaque sous-domaine, et représente environ 1% de l'énergie transmise par l'interface pour $m = 50$, et 2% pour $m = 100$.

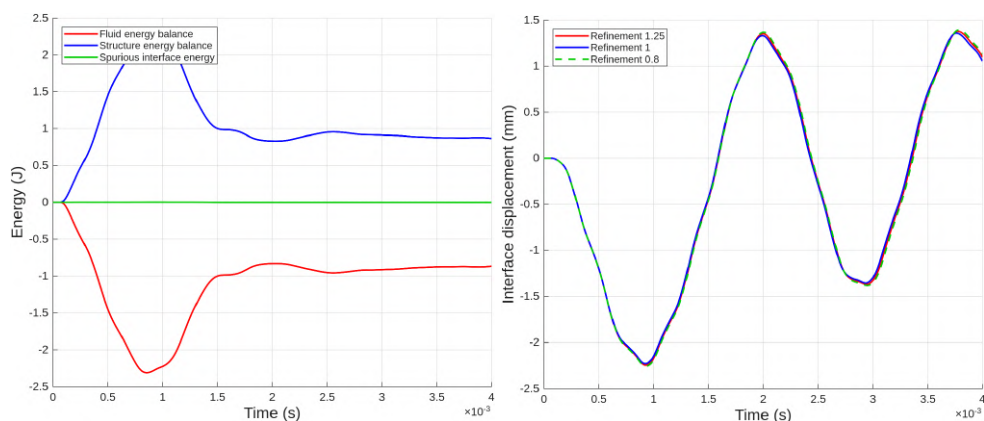


(a) Évolution temporelle de l'énergie pour un ratio de pas de temps $m = 100$. (b) Déplacement de la plaque pour différents ratios de pas de temps ($m = 1, 50$ et 100).

FIGURE 6 – Étude de l'impact du sous-cyclage fluide sur les déplacements et l'énergie : le pas de temps fluide reste constant tandis que le pas de temps structure est multiplié par le ratio m .

Le cas de référence conforme est comparé avec des résultats obtenues avec deux maillages structures. Un maillage plus fin avec une taille de maille de 0.8 fois plus fine que le maillage référence et un maillage plus grossier avec une taille de maille 1.25 plus grande. Les résultats sont obtenus en mono-pas de temps.

La Figure 7 montre les déplacements pour ces différents maillages et l'évolution de l'énergie avec le maillage le plus grossier. Nous observons des déplacements très proches du cas de référence et un bon contrôle de l'énergie d'interface, soulignant la pertinence de la méthode Mortar pour notre couplage volumes finis-éléments finis, non-conforme à l'interface.



(a) Évolution temporelle de l'énergie avec le raffinement de maille (1.25 plus grand). (b) Déplacement de la plaque pour différents raffinements de maillages de la structure.

FIGURE 7 – Étude de l'impact de la non-conformité des maillages fluide et structure : seul le maillage structure est modifié, le maillage fluide reste inchangé.

4 Conclusion

Ce travail présente le développement et l'évaluation d'une méthode de couplage fort entre un fluide compressible et une structure utilisant des multiplicateurs de Lagrange pour garantir la continuité de la vitesse normale à l'interface. Le fluide est modélisé par la méthode des volumes finis avec un schéma explicite de Runge-Kutta, tandis que la structure est résolue par la méthode des éléments finis avec un schéma implicite de Newmark. Une approche multi-pas de temps fortement couplée, basée sur la méthode GC, est proposée avec un sous-cyclage du fluide. La méthode Mortar est également intégrée pour permettre l'utilisation de maillages non conformes à l'interface. Les méthodes développées sont validées sur le cas d'une onde de choc impactant une plaque, offrant une comparaison directe avec des résultats expérimentaux. Les simulations démontrent qu'un rapport de pas de temps de 100, combiné à des maillages non conformes, permet de reproduire fidèlement la dynamique de la plaque, confirmant ainsi la précision et la robustesse des approches proposées. Une analyse du bilan énergétique met en évidence un contrôle rigoureux de l'énergie introduite par le couplage à l'interface, tout en assurant la stabilité numérique du système couplé. L'utilisation des multiplicateurs de Lagrange s'avère particulièrement efficace pour le couplage VF/EF, avec des possibilités de multi-pas de temps efficaces grâce à la méthode GC et une gestion performante des maillages non conformes via la méthode Mortar. Pour les perspectives, l'objectif est d'abord d'étendre cette méthode à des applications tridimensionnelles. Ensuite, il sera intéressant de l'adapter à d'autres modèles physiques afin d'élargir son champ d'application. En effet, son extension à des écoulements visqueux (laminaires ou turbulents) et à des structures non linéaires permettra de traiter des cas plus complexes et représentatifs des enjeux industriels.

Références

- [1] S. C. Dixon. Comparison of panel flutter results from approximate aerodynamic theory with results from exact inviscid theory and experiment. *NASA technical note*, 1966.
- [2] R. L. Bisplinghoff and H Ashley. *Principles of Aeroelasticity*. Wiley, New York, (1975).
- [3] P. Moschopoulos, Y. Dimakopoulos, and J. Tsamopoulos. A new finite element formulation unifying fluid-structure and fluid-fluid interaction problems. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 336 :105366, 2025.
- [4] C. Farhat, P. Geuzaine, and C. Grandmonty. The Discrete Geometric Conservation Law and the Nonlinear Stability of ALE Schemes for the Solution of Flow Problems on Moving Grids. *Journal of Computational Physics*, 174 :669–694, 2001.
- [5] C. Farhat, K.G. Van der Zee, and P. Geuzaine. Provably second-order time-accurate loosely-coupled solution algorithms for transient nonlinear computational aeroelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :1973–2001, 2006.
- [6] S. Piperno, C. Farhat, and B. Larrouturou. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aroelastic problems part i : Model problem, theory and two-dimensional application. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 124 :79–112, 1995.
- [7] A.K Slone, K. Pericleous, C. Bailey, M. Cross, and C. Bennett. A finite volume unstructured mesh approach to dynamic fluid–structure interaction : an assessment of the challenge of predicting the onset of flutter. *Applied Mathematical Modelling*, 28 :211–239, 2004.
- [8] A. Gravouil and A. Combescure. Multi-time-step explicit–implicit method for non-linear structural dynamics. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 50(1) :199–225, 2000.
- [9] M. Brun, A. Gravouil, A. Combescure, and A. Limam. Two feti-based heterogeneous time step coupling methods for newmark and α -schemes derived from the energy method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283 :130–176, 2015.
- [10] A. Gravouil, A. Combescure, and M. Brun. Heterogeneous asynchronous time integrators for computational structural dynamics. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 102(3-4) :202–232, 2014.

- [11] C. Bernardi, Y. Maday, and A.T. Patera. A new nonconforming approach to domain decomposition : The mortar element method. *Nonlinear partial differential equations and their applications : Collège de France Seminar*, 299 :13–51, 1994.
- [12] A. Gerstenberger and W.A. Wall. An eXtended Finite Element Method/Lagrange multiplier based approach for fluid–structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :1699–1714, 2008.
- [13] D. Boffi, F. Credali, L. Gastaldi, and S. Scacch. A parallel solver for fluid–structure interaction problems with lagrange multiplier. *Mathematics and Computers in Simulation*, 220 :406–424, 2024.
- [14] M. Nonino, F. Ballarin, and G. Rozza. A monolithic and a partitioned reduced basis method for fluid-structure interaction problems. *Fluids*, 6(6),229 :6060229, 2021.
- [15] A. De Castro, H. Lee, and M.M. Wiecek. Reduced order modeling for a schur complement method for fluid-structure interaction. *Journal of Computational Physics*, 515 :113282, 2024.
- [16] A. De Castro, H. Lee, and M.M. Wiecek. A Lagrange multiplier method for fluid-interaction : Well-posedness and domain decomposition. *Computers and Mathematics and Applications*, 181 :193–215, 2025.
- [17] P.G. Geredeli, H. Kunwar, and H. Lee. Partitioning method for the finite element approximation of a 3D fluid-2D plate. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 40 :23132, 2024.
- [18] H. Kunwar and H. Lee. Domain decomposition with local time discretization for the nonlinear stokes-biot system. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 457 :116311, 2025.
- [19] J. Nunez-Ramirez, J.-C. Marongiu, M. Brun, and A. Combescure. A partitioned approach for the coupling of sph and fe methods for transient nonlinear fsi problems with incompatible time-steps. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 109(10) :1391–1417, 2016.
- [20] Z. Li, J. Leduc, J. Nunez-Ramirez, A. Combescure, and J.C. Marongiu. on-intrusive partitioned approach to couple smoothed particle hydrodynamics and finite element methods for transient fluid-structure interaction problems with large interface motion. *Computational Mechanics*, 55 :697–718, 2015.
- [21] S. Meduri, M. Cremonesi, U. Perego, O. Bettinotti, A. Kurkchubasche, and V. Oancea. A partitioned fully explicit lagrangian finite element method for highly nonlinear fluid-structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 113 :43–44, 2018.
- [22] Z. Li, A. Combescure, and F. Leboeuf. Coupling of finite volume and finite element subdomains using different time integrators. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 72(12) :1286–1306, 2013.
- [23] F. Casadei and N. Leconte. Coupling finite elements and finite volumes by lagrange multipliers for explicit dynamic fluid–structure interaction. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 86 :1–17, 2011.
- [24] A. Dervieux, F. Alauzet, A. Loseille, and B. Koobus. *Mesh Adaptation for Computational Fluid Dynamics I : Continuous Riemannian Metrics and Feature-based Adaptation*. Wiley-ISTE, (2022).
- [25] G. Olivier. *Anisotropic metric-based mesh adaptation for unsteady CFD simulations involving moving geometries*. PhD thesis, Ecole Doctorale de Mathématiques de Paris Centre, 2012.
- [26] B. Nkonga and H. Guillard. Godunov-type method on non-structured meshes for three-dimensional moving boundary problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 113 :183–204, 1994.
- [27] V. Faucher and A. Combescure. A time and space mortar method for coupling linear modal subdomains and non-linear subdomains in explicit structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(5) :509–533, 2003.

- [28] C. Bernardi. A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method. *Technical Report, Universite Pierre at Marie Curie*, 1990.
- [29] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, (1987).
- [30] M. Geradin and D. J. Rixen. *Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics – 3rd Edition*. Wiley, (2015).
- [31] P. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vector, and difference schemes. *J. Comp. Phys.*, 135(2) :250–258, 1981.
- [32] B. Van Leer. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *J. Comp. Phys.*, 77(2) :439–471, 1988.
- [33] J. Giordano, G. Jourdan, Y. Burtschell, M. Medale, D.E. Zeitoun, and L. Houas. Shock wave impacts on deforming panel, an application of fluid-structure interaction. *Shock Waves*, 14 :103–110, 2005.
- [34] V. Pasquariello, G. Hammerl, F. Örley, S. Hickel, C. Danowski, A. Popp, Wolfgang A. Wall, and N. A. Adams. A cut-cell finite volume – finite element coupling approach for fluid–structure interaction in compressible flow. *Journal of Computational Physics*, 307 :670–695, 2016.