

Simulations vibro-acoustiques par approche isogéométrique immergée avec B-Splines hiérarchiques

C. Hoareau¹, T. Landi^{1,2}, R. Citarella², J.-F. Deü¹, R. Ohayon¹

¹ LMSSC, Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, {christophe.hoareau}@lecnam.net

² Department of Industrial Engineering, University of Salerno, Fisciano, SA, Italy

Résumé — Ce travail présente une approche isogéométrique immergée pour des simulations vibro-acoustiques. La structure est décrite par la théorie des coques de Kirchhoff-Love, tandis que le fluide interne est modélisé par l'équation de Helmholtz en régime harmonique. La formulation variationnelle du problème couplé est établie. Les champs de déplacement et de pression sont discrétisés respectivement par des fonctions NURBS et par des B-Splines hiérarchiques. La méthodologie, basée sur une approche immergée, est décrite. Enfin, un exemple numérique illustre la faisabilité de l'approche proposée.

Mots clés — vibro-acoustique, isogéométrie, B-Splines hiérarchiques, approche immergée.

1 Introduction

La simulation des phénomènes vibro-acoustiques [1] est essentielle pour la conception et l'analyse de structures générant du bruit dans une cavité interne, telle que l'habitacle d'un véhicule automobile. Ces problèmes impliquent l'interaction entre un milieu fluide compressible et une structure élastique. Ce travail présente une méthode de prédiction de la réponse dynamique du problème couplé par analyse isogéométrique [2, 3], utilisant des B-Splines hiérarchiques [4] couplées à une coque immergée. De façon générale, le point de départ d'une simulation est la création d'une géométrie issue d'un logiciel de conception assistée par ordinateur (CAO). La mise en place d'un problème vibro-acoustique nécessite la création de plusieurs maillages : (i) celui du domaine fluide, (ii) celui de la structure, et (iii) celui de l'interface fluide-structure. Il s'agit d'une étape pouvant être longue et complexe, en particulier lorsque les maillages doivent être compatibles. Le modèle est ensuite construit à partir de ces maillages, perdant au passage certaines informations issues de la géométrie initiale. Une question naturelle émerge alors : peut-on effectuer des simulations numériques non pas à partir d'un maillage, mais directement à partir d'un fichier issu d'un logiciel de CAO ? En effet, ces fichiers, communément appelés B-Rep, décrivent uniquement les surfaces délimitant un volume. De ce fait, l'assemblage des opérateurs matriciels et vectoriels demeure un véritable défi. Ce point particulier justifie l'utilisation de B-Splines hiérarchiques, au sein desquelles la surface du domaine peut être immergée.

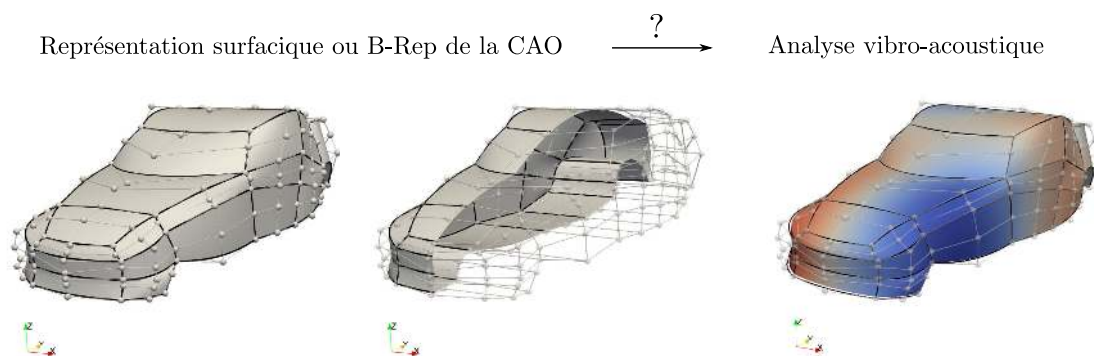


FIGURE 1 – Représentation surfacique issue d'un fichier CAO (IGS) et exemple de mode acoustique.

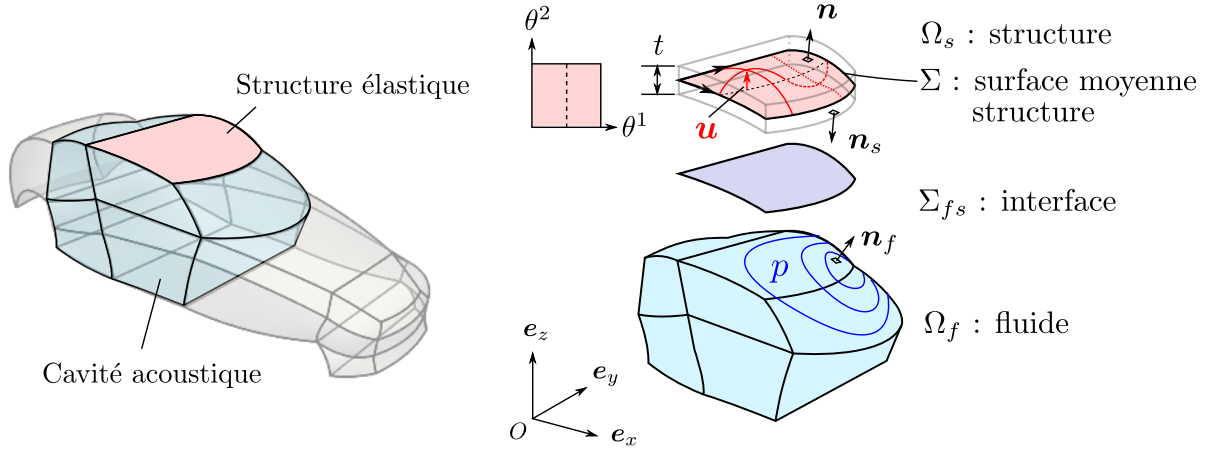


FIGURE 2 – Domaines géométriques considérés pour le fluide, la structure et l’interface.

2 Équations du problème dynamique couplé (u, p)

2.1 Hypothèses et cinématique de la coque

Nous considérons l’hypothèse des petites perturbations dans les domaines du fluide et de la structure. Le fluide occupe un domaine Ω_f délimité par l’interface fluide-structure Σ_{fs} et une paroi rigide Σ_w . Le fluide est supposé homogène, compressible et non visqueux et la variable d’état considérée est la fluctuation d’un champ de pression scalaire, notée $p \in \mathbb{R}$.

La structure est élastique linéaire, homogène et isotrope, et supposée très mince avec une épaisseur notée t . Elle est modélisée par une coque de Kirchhoff–Love [5], dans laquelle les normales à la surface moyenne restent droites et l’épaisseur reste constante après déformation, ce qui revient à négliger les cisaillements transverses. Le domaine de la structure Ω_s est donc approximée par une coque d’épaisseur t définie par une surface moyenne courbe notée Σ . Un point matériel \mathbf{X}_s du volume est défini par un point de la courbe moyenne \mathbf{X} associé à un système d’axes orthonormés (O, e_x, e_y, e_z) , il est défini par un couple de coordonnées curvilignes (θ^1, θ^2) appartenant à des intervalles notés I_1 et I_2 et d’une troisième coordonnée $\theta^3 \in [-t/2, t/2]$ tel que $\mathbf{X}_s(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{X}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{n}(\theta^1, \theta^2)$. La variable d’état considérée est la fluctuation d’un champ de déplacement de surface moyenne $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Le champ de déplacement dans la structure $\mathbf{u}_s \in \mathbb{R}^3$ est défini par celui de la surface moyenne \mathbf{u} et une composante fonction de la troisième coordonnée θ^3 , d’une rotation linéarisée $\Phi(\mathbf{u})$ et de la normale \mathbf{n} explicitée dans [6] tel que :

$$\mathbf{u}_s(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{u}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 [\Phi(\mathbf{u}) \wedge \mathbf{n}]. \quad (1)$$

La définition du tenseur de déformation linéarisé n’est pas détaillée ici par souci de concision. Il s’obtient à partir des bases covariantes, contravariantes et de leurs métriques. Ce tenseur fait apparaître une partie membrane et une partie flexion, fonctions de grandeurs issues de la géométrie différentielle rappelées dans [5]. Enfin, le problème couplé fluide-structure est formulé en supposant une excitation et des réponses harmoniques de pulsation ω . Les domaines géométriques sont illustrés en Fig. 2 sur un exemple de cavité de voiture.

2.2 Équations locales dans le fluide et la structure

Sous les hypothèses précédentes, le champ de pression harmonique vérifie les équations suivantes :

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c_0^2} p = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (2)$$

$$\mathbf{grad} p \cdot \mathbf{n}_f - \rho_f \omega^2 \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_f = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{fs} \quad (3)$$

$$\mathbf{grad} p \cdot \mathbf{n}_f = 0 \quad \text{sur } \Sigma_w \quad (4)$$

avec c_0 la célérité du son dans le fluide, ρ_f la masse volumique du fluide. L'équation Eq. (2) correspond à l'équation de Helmholtz. Les Eqs. (3) et (4) correspondent aux conditions aux limites traduisant la continuité de l'accélération normale de la structure et du fluide. La structure tridimensionnelle vérifie l'équation élastodynamique linéarisée :

$$\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_s) + \omega^2\rho_s\mathbf{u}_s = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_s \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_s)\mathbf{n}_s = \mathbf{f}_s \quad \text{sur } \Sigma_s \quad (6)$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{n}_s l'opérateur des contraintes de Cauchy et la normale sortant de la structure et \mathbf{f}_s un effort surfacique externe appliqué à une surface Σ_s . Ces équations doivent être complétées par les équations de la cinématique des coques et une loi de comportement adaptée. Dans la suite nous ferons l'hypothèse que la surface moyenne Σ de la structure est confondue avec l'interface fluide-structure Σ_{fs} du point de vue du fluide et Σ_s du point de vue de la structure.

2.3 Écriture sous forme variationnelle des coques de Kirchhoff-Love

Dans ce modèle, le cisaillement transverse est négligé et le comportement mécanique provient des contributions de membrane et de flexion. Le travail virtuel peut s'écrire sous la forme suivante :

$$k(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Sigma} \underbrace{(\delta\varepsilon(\delta\mathbf{u})^T \mathbf{N}(\mathbf{u}))}_{\text{membrane}} + \underbrace{\delta\kappa(\delta\mathbf{u})^T \mathbf{M}(\mathbf{u})}_{\text{flexion}} dS, \quad (7)$$

avec $\delta\varepsilon$ la déformation virtuelle de membrane, \mathbf{N} les efforts globaux de membrane, $\delta\kappa$ la variation de courbure virtuelle et \mathbf{M} les moments globaux. Sous l'hypothèse des petites perturbations, des opérateurs différentiels peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\delta\varepsilon(\delta\mathbf{u}) = \mathcal{B}_{\text{mem}}\delta\mathbf{u}, \quad \mathbf{N}(\mathbf{u}) = t\mathbf{D}\mathcal{B}_{\text{mem}}\mathbf{u}, \quad \delta\kappa(\delta\mathbf{u}) = \mathcal{B}_{\text{fle}}\delta\mathbf{u}, \quad \mathbf{M}(\mathbf{u}) = \frac{t^3}{12}\mathbf{D}\mathcal{B}_{\text{fle}}\mathbf{u}, \quad (8)$$

avec les opérateurs différentiels \mathcal{B}_{mem} , \mathcal{B}_{fle} et la matrice de la loi de comportement \mathbf{D} proviennent de la cinématique des coques et sont non explicités par souci de concision. La discrétisation spatiale est obtenue à partir du code igafem [7].

2.4 Formulation variationnelle couplée

Le problème consiste à trouver le champ de déplacement $\mathbf{u} \in C_u$ et le champ de pression $p \in C_p$ tel que :

$$k(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - \omega^2 m(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - c(p, \delta\mathbf{u}) - f(\delta\mathbf{u}) = 0, \quad \forall \delta\mathbf{u} \in C_u, \quad (9)$$

$$h(p, \delta p) - \omega^2 q(p, \delta p) - \omega^2 \rho_f c(\delta p, \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \delta p \in C_p. \quad (10)$$

avec C_u et C_p les espaces appropriés des champs de déplacement et de pression virtuels. Les formes linéaires et bilinéaires sont définies ci-après :

$$k(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = t \int_{\Sigma} \delta\mathbf{u}^T \mathcal{B}_{\text{mem}}^T \mathbf{D} \mathcal{B}_{\text{mem}}(\mathbf{u}) ds + \frac{t^3}{12} \int_{\Sigma} \delta\mathbf{u}^T \mathcal{B}_{\text{fle}}^T \mathbf{D} \mathcal{B}_{\text{fle}}(\mathbf{u}) ds, \quad (11)$$

$$m(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = t \int_{\Sigma} \rho_s \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u} ds, \quad (12)$$

$$f_s(\delta\mathbf{u}) = \int_{\Sigma} \mathbf{f}_s \cdot \delta\mathbf{u} ds, \quad (13)$$

$$c(p, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Sigma} (pn) \cdot \delta\mathbf{u} ds, \quad (14)$$

$$h(p, \delta p) = \int_{\Omega_f} \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{grad} \delta p dv, \quad (15)$$

$$q(\delta p, p) = \int_{\Omega_f} p \delta p dv. \quad (16)$$

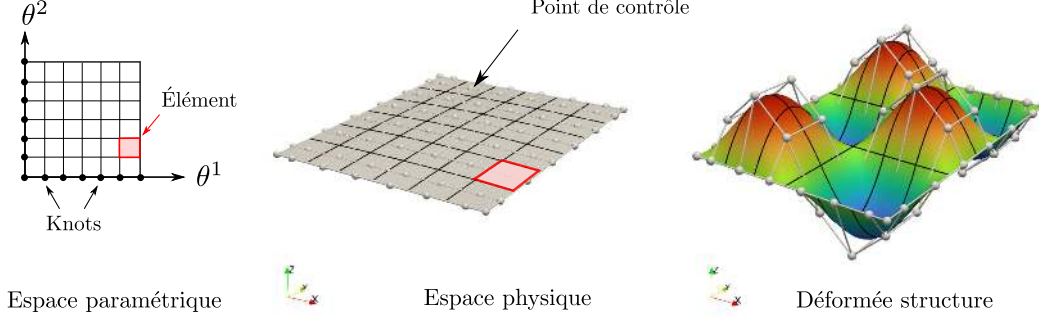


FIGURE 3 – Espace paramétrique, espace physique et exemple de déformée modale d’une plaque de Kirchhoff-Love simplement appuyée avec un degré polynomial $p = 2$ et 6×6 éléments d’intégration.

3 Discrétisations par approches isogéométriques

3.1 Champ de déplacement approximé par fonctions de base de NURBS

Le champ de déplacement est approximé par une combinaison linéaire de fonctions de base NURBS :

$$\mathbf{u}^h(\theta^1, \theta^2) = \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{u}_i R_i(\theta^1, \theta^2) = \mathbb{R}(\theta^1, \theta^2) \mathbf{U}, \quad (17)$$

où N_s est le nombre de points de contrôle, \mathbf{u}_i le déplacement associé au point de contrôle i , R_i une fonction de base de NURBS, \mathbb{R} la matrice de fonctions de forme et \mathbf{U} le vecteur de déplacement aux points de contrôle. Le nombre total de degrés de liberté en déplacement de la structure est $n_{\text{ddl}}^s = 3 \times N_s$. Une surface NURBS fait apparaître de façon explicite les coordonnées curvilignes (θ^1, θ^2) , utilisées dans le modèle de coque de Kirchhoff–Love. Pour une présentation détaillée de la définition mathématique des fonctions de base R_i , le lecteur est renvoyé à [2]. Certains fichiers issus de la CAO (par exemple un fichier IGS) fournissent directement les données nécessaires à la reconstruction d’une surface, en particulier les vecteurs de nœuds (« knots »), les points de contrôle et les poids. Il est possible d’effectuer un raffinement par insertion de nœuds et/ou par élévation du degré polynomial des fonctions de base. La Fig. 3 illustre la représentation d’une déformée modale de plaque à partir d’une surface physique, elle-même associée à un espace paramétrique.

3.2 Champ de pression approximé par B-Splines hiérarchiques

Le champ de pression est approximé par une combinaison linéaire de fonctions de base de splines hiérarchiques tel que :

$$p^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{N_l} p_i^l B_i^l(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{B}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{P}, \quad (18)$$

avec L le nombre de niveaux hiérarchiques, N_l le nombre de fonctions au niveau l , B_i^l la fonction de forme i pour un niveau donné l , et p_i^l les coefficients correspondants aux inconnues du problème. La matrice \mathbb{B} regroupe l’ensemble des fonctions de forme et \mathbf{P} désigne le vecteur de pression associé aux points de contrôle. Le nombre total de degrés de liberté en pression côté fluide est donc $n_{\text{ddl}}^f = \sum_{l=1}^L N_l$. L’un des intérêts des B-Splines hiérarchiques est de pouvoir raffiner localement un champ. La Fig. 4 illustre le concept en 1D sur 3 niveaux de raffinement. Les zones raffinées verront apparaître des fonctions de forme ayant des supports de plus en plus réduits. Ceci permet d’approximer de forts gradients ou des discontinuités de pression. La Fig. 5 présente les éléments d’intégration obtenus ainsi que l’organisation hiérarchique des niveaux : les éléments les plus grossiers correspondent au premier niveau, tandis que les éléments les plus fins, obtenus par subdivision des éléments grossiers, correspondent aux niveaux supérieurs.

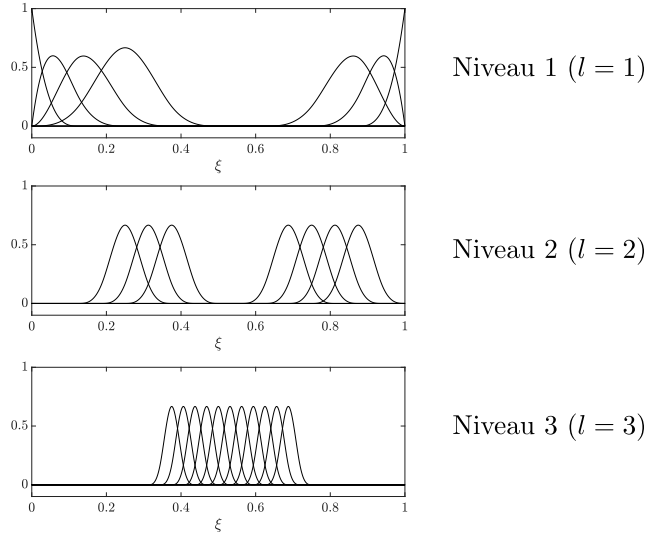


FIGURE 4 – Exemple de fonctions de forme B-Splines hiérarchiques en 1D.

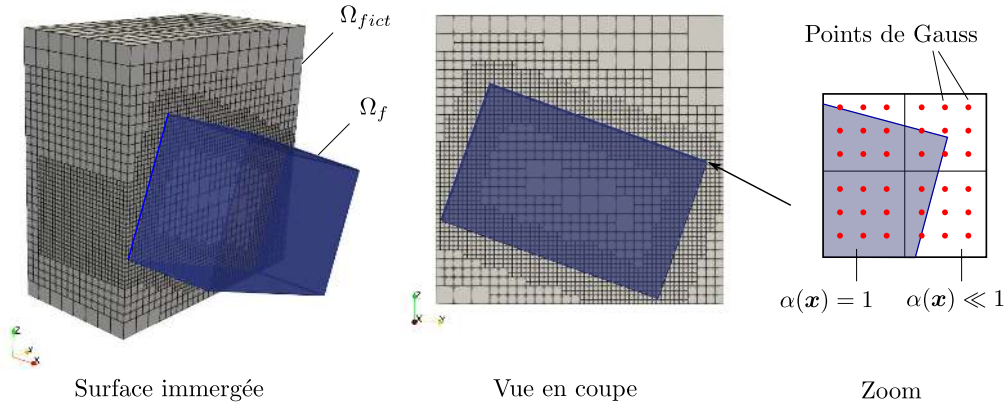


FIGURE 5 – Parallélépipède incliné immergé dans un cube B-Spline hiérarchique Ω étant l'union de la cavité acoustique Ω_f et d'un domaine fictif Ω_{fict} . Une partie des éléments d'intégration sont représentés.

3.2.1 Intégration numérique et domaine fictif

La Fig. 5 illustre les ingrédients nécessaires pour effectuer l'intégration numérique des opérateurs dans le volume fluide $\Omega_f = \Omega \setminus \Omega_{fict}$ avec Ω le domaine complet et Ω_{fict} appelé domaine fictif. Nous pouvons introduire un paramètre de pénalisation noté $\alpha(\mathbf{x})$ tel que :

$$h_\alpha(p, \delta p) = \int_{\Omega} \alpha(\mathbf{x}) \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{grad} \delta p \, dv \quad \text{et} \quad q_\alpha(p, \delta p) = \int_{\Omega} \alpha(\mathbf{x}) p \delta p \, dv, \quad (19)$$

avec

$$\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} = 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_f, \\ \ll 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_{fict}. \end{cases} \quad (20)$$

Le paramètre de pénalisation réduit la contribution du domaine fictif lors de l'intégration numérique sur les éléments proches de la surface. Les degrés de liberté appartenant aux éléments du domaine fictif non découpé par la surface sont quant à eux retirés de la base.

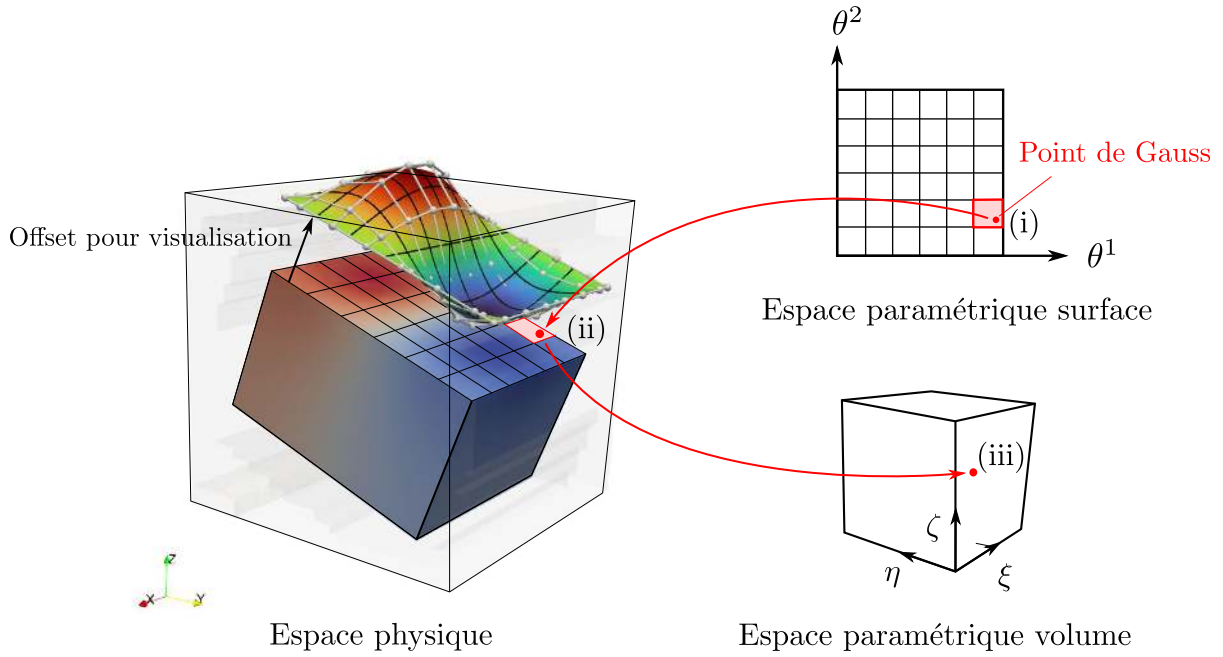


FIGURE 6 – Points de Gauss : (i) coordonnées dans l’espace paramétrique surfacique, (ii) coordonnées dans l’espace physique et (iii) coordonnées dans l’espace paramétrique du fluide.

3.3 Problème couplé discrétisé

À partir de la formulation variationnelle et de la discrétisation des champs, on obtient les opérateurs suivants :

$$k(\delta \mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) = \delta \mathbf{U}^T \mathbb{K} \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{K} : \text{matrice de raideur}, \quad (21)$$

$$m(\delta \mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) = \delta \mathbf{U}^T \mathbb{M} \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{M} : \text{matrice de masse}, \quad (22)$$

$$c(\delta \mathbf{u}^h, p^h) = \delta \mathbf{U}^T \mathbb{C} \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C} : \text{matrice de couplage}, \quad (23)$$

$$f_s(\delta \mathbf{u}^h) = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} : \text{vecteur d'effort extérieur}, \quad (24)$$

$$h_\alpha(\delta p^h, p^h) = \delta \mathbf{P}^T \mathbb{H}_\alpha \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{H}_\alpha : \text{matrice de gradient de fluide}, \quad (25)$$

$$q_\alpha(p^h, \delta p^h) = \delta \mathbf{P}^T \mathbb{Q}_\alpha \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{Q}_\alpha : \text{matrice liée à la compressibilité fluide}. \quad (26)$$

Le problème couplé discrétisé s’écrit de la façon suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbb{K} & -\mathbb{C} \\ \mathbb{0} & \frac{1}{\rho_f} \mathbb{H}_\alpha \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbb{M} & \mathbb{0} \\ \mathbb{C}^T & \frac{1}{\rho_f c_0^2} \mathbb{Q}_\alpha \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

L’exemple numérique consiste à évaluer la réponse en fréquence pour différentes valeurs de ω à partir de ce système matriciel.

3.4 Intégration de la matrice de couplage

L’opérateur de couplage est évalué sur la surface Σ immergé dans le cube B-Spline. Une point clé consiste à : (i) évaluer le champ de pression au point de Gauss de la structure lors de l’intégration numérique, (ii) évaluer ses coordonnées dans l’espace physique et enfin (iii) identifier les coordonnées dans l’espace paramétrique du fluide pour évaluer la valeur des fonctions de forme B-Spline hiérarchiques. La Fig. 6 illustre les ingrédients nécessaires lors de la boucle d’intégration numérique.

TABLE 1 – Données du problème

Notations	Définitions	Valeurs	Unité
L_x, L_y, L_z	Longueurs	(0.7, 0.8, 0.5)	m
t	Épaisseur plaque	0.005	m
ρ_s	Masse volumique structure	7861	kg.m ⁻³
E	Module d'Young	210×10^9	Pa
ν	Module de Poisson	0.3	-
c_0	Célérité du son dans l'air	340	m.s ⁻¹
ρ_f	Masse volumique de l'air	1.2	kg.m ⁻³
\mathbf{x}_c	Position max effort surfacique	[0.5, 0.5, 0.5]	m
σ	Paramètre effort surfacique	10^{-3}	m

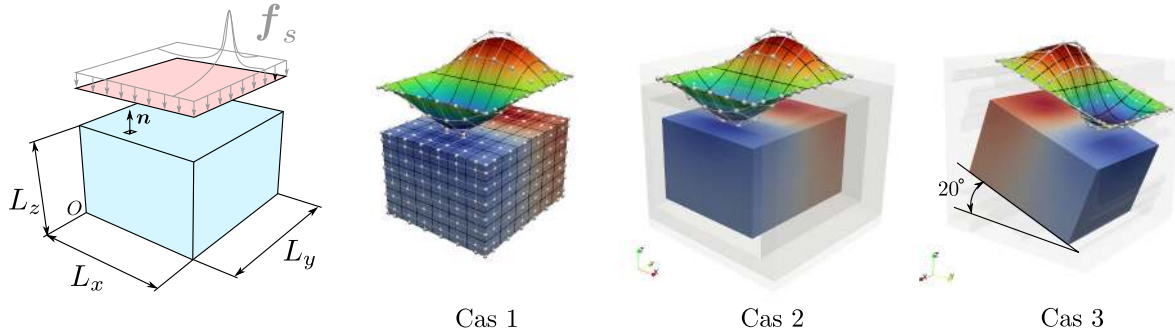


FIGURE 7 – Calcul de la réponse en fréquence d'une cavité acoustique couplée à une plaque, soumise à une densité d'effort surfacique. Trois cas sont considérés : (cas 1) cavité avec IGA conforme, (cas 2) cavité immergée et (cas 3) cavité immergée inclinée.

4 Exemple numérique : réponse en fréquence

4.1 Réponse en fréquence sur 3 configurations

Le problème proposé est illustré en Fig. 7. L'objectif est de calculer la pression quadratique moyenne dans une cavité parallélépipédique en contact avec une plaque élastique située sur sa face supérieure. Trois configurations sont étudiées (cas 1, cas 2 et cas 3) afin d'évaluer la faisabilité de l'approche, indépendamment de l'orientation de la géométrie immergée. Le Cas 1 correspond à une géométrie spline compatible entre la structure et le fluide (cas de référence). Les cas 2 et 3 considèrent une surface immergée issue de la CAO, respectivement en position horizontale et inclinée. L'effort surfacique est défini ci-dessous :

$$\mathbf{f}_s = -\exp\left(\frac{-(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)}{\sigma^2}\right) \mathbf{n}. \quad (28)$$

Les paramètres du problème sont donnés en Tab. 1. En Fig. 8, nous comparons la pression quadratique moyenne pour chaque configuration sur une plage de fréquence $f \in [10, 200]$ Hz soit :

$$\text{QI}(f) = \int_{\Omega_f} p^2(f) dv, \quad \text{avec} \quad f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (29)$$

Les courbes sont superposées dans les 3 configurations et montrent la faisabilité de l'approche immergée sur ce cas test.

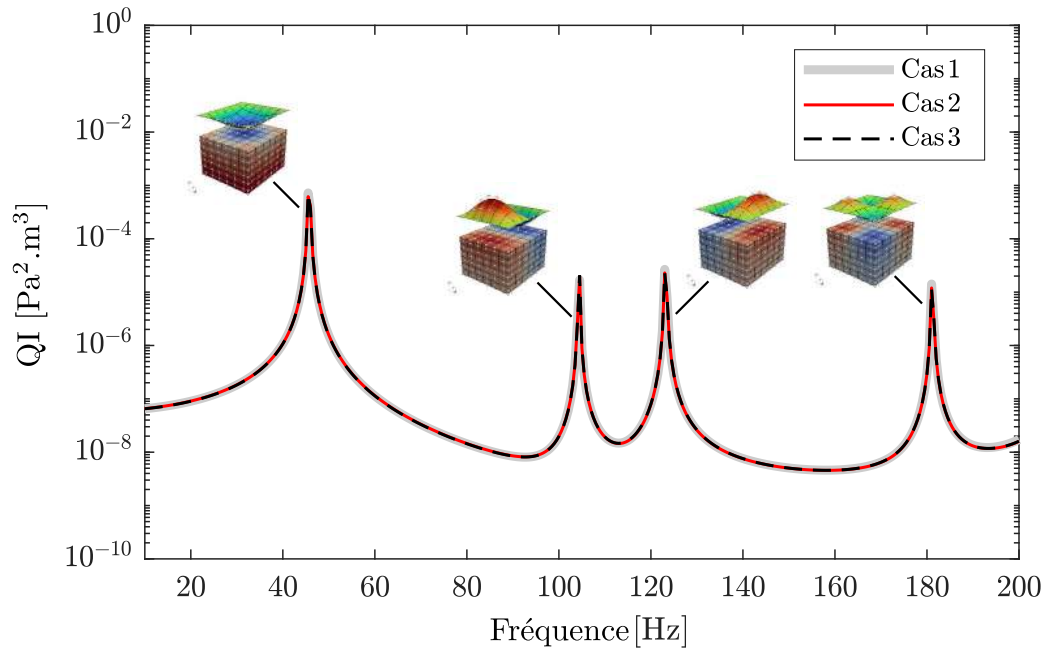


FIGURE 8 – Réponse en fréquence des trois configurations considérées. (Remarque : un amortissement visqueux a été introduit dans la structure sous la forme d’une matrice $\mathbb{C} = \beta\mathbb{K}$, avec $\beta = 10^{-6}$, afin d’éviter des pics infinis dus aux fréquences de résonance).

5 Conclusion

Nous proposons dans ce travail une stratégie de couplage vibro-acoustique basée sur une discrétisation isogéométrique, combinant une coque de Kirchhoff–Love pour la structure et des B-Splines hiérarchiques avec une méthode immergée pour le fluide. Certains calculs sont réalisés directement à partir d’un fichier CAO au format IGS, représentant uniquement les surfaces de la cavité acoustique, ce qui facilite la préparation des données du problème. L’exemple numérique illustre la faisabilité de l’approche pour le calcul de la réponse en fréquence : les courbes obtenues se superposent pour les géométries conformes (cas 1) et les géométries immergées horizontales et inclinées (cas 2 et cas 3). Les perspectives incluent : la comparaison des tailles de problèmes et des temps de calcul entre les approches conformes et immergées et l’étude du conditionnement des matrices immergées. Enfin, un travail futur portant sur la projection sur une base modale est en cours de développement.

Références

- [1] H.J.-P. Morand, R. Ohayon. *Fluid Structure Interaction*, John Wiley & Sons, 1995.
- [2] J.A. Cottrel, T.J.R. Hughes, Y. Bazilevs. *Isogeometric Analysis : Toward Integration of CAD and FEA*, John Wiley & Sons, 2009.
- [3] T. Landi, C. Hoareau, J.-F. Deü, R. Ohayon, R. Citarella. *Comparative vibroacoustic analyses : FEM vs. IGA*, Computational Mechanics, Springer, 1027-1059, 20125.
- [4] D. Schillinger, L. Dedè, M. A. Scott, J. A. Evans, M. J. Borden, E. Rank, T. J. R. Hughes. *An isogeometric design-through-analysis methodology based on adaptive hierarchical refinement of NURBS, immersed boundary methods, and T-spline CAD surfaces*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 116-150, 2012.
- [5] J. Kiendl, K.-U. Bletzinger, J. Linhard. *Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 3902-3914, 2009.
- [6] T. Hirschler, R. Bouclier, A. Duval, T. Elguedj, J. Morlier. *The embedded isogeometric Kirchhoff–Love shell : From design to shape optimization of non-conforming stiffened multipatch structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 774-797, 2019.
- [7] V.P. Nguyen, C. Anitescu, S. Bordas, T. Rabczuk. *Isogeometric analysis : An overview and computer implementation aspects*, Mathematics and Computers in Simulation, Elsevier, 89–116, 2015.