

Extension du domaine de validité des modèles réduits fondés sur la méthode de paramétrisation de variétés invariantes : continuation analytique automatisée de cycles limites

A. de Figueiredo Stable¹, A. Grolet², C. Touzé³

¹ Institut des Sciences de la Mécanique et Applications, CNRS-EDF-ENSTA, IP Paris, Palaiseau, andre.de-figueiredo-stabile@ensta.fr

² Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Physiques Et Numériques, ENSAM, Lille, aurelien.grolet@ensam.eu

³ Institut des Sciences de la Mécanique et Applications, CNRS-EDF-ENSTA, IP Paris, Palaiseau, cyril.touze@ensta.fr

Résumé — La méthode de paramétrisation de variétés invariantes est une technique de réduction de modèle pour les systèmes dynamiques permettant de calculer les modes non linéaires de vibration d'une structure. Cette contribution montre comment appliquer la méthode en insérant un développement nouveau sur la paramétrisation de cycles limites, permettant de continuer les solutions périodiques jusqu'à des grandes amplitudes avec un calcul automatique de la limite de validité.

Mots clés — Méthode de paramétrisation de variétés invariantes, Limites de validité, Paramétrisation de cycles limites.

1 Introduction

Les techniques de réduction de modèle sont souvent employées dans le domaine des vibrations non linéaires pour permettre la résolution de systèmes complexes avec un coût de calcul réduit et pour les rendre plus interprétables. La méthode de paramétrisation de variétés invariantes [1] s'inscrit dans ce contexte et permet le calcul des modes de vibration non linéaires d'un système mécanique en cherchant des variétés invariantes associées à un point fixe (une configuration d'équilibre) au moyen de développements asymptotiques et en restreignant la dynamique du système à ce sous-ensemble. L'extension du domaine d'application de la méthode aux modèles en éléments finis a été un thème de fort intérêt dans la dernière décennie, cf. [2, 3, 4, 5], et a permis de l'utiliser pour plusieurs classes de problèmes, comme les MEMS (Micro-Electro-Mechanical Systems) [6, 7], les structures tournantes [8] et les coques minces [9].

Récemment, le traitement de systèmes dépendant d'un paramètre et subissant une bifurcation de Hopf a été traité [10, 11, 12] par l'addition du paramètre de contrôle comme une variable auxiliaire dans la paramétrisation, permettant de retrouver le diagramme de bifurcation du système à partir d'un modèle réduit construit pour une seule valeur du paramètre. La zone de validité pour laquelle le modèle réduit s'accorde avec le modèle complet dépend de l'application. Cependant, il a été montré [10] que cette zone dépend de la distance entre le cycle limite et le point fixe instable, où est calculé le modèle réduit. Or cette distance augmente lorsque l'on s'éloigne du seuil.

En parallèle, dans [13], la méthode de paramétrisation a été combinée avec la méthode d'équilibrage harmonique, permettant l'implémentation d'une procédure de redémarrage pour le calcul des courbes amplitude-fréquence (ou *backbone curve* en anglais) de systèmes conservatifs en vibration libre. Cette version de la méthode correspond, en fait, à une paramétrisation des variétés invariantes d'un cycle limite du système, dans une procédure similaire à celle introduite dans [14], avec un terme supplémentaire permettant de tenir compte du changement de fréquence des cycles limites le long de la *backbone*.

Dans cette contribution, nous présentons une procédure permettant de calculer des diagrammes de bifurcation de systèmes paramétrés, augmentant drastiquement leur zone de validité. Pour cela, la paramétrisation de points fixes, telle que décrite dans [4, 10], et la paramétrisation de cycles limites, comme proposée dans [13], sont combinées, permettant des redémarrages successifs, avec un calcul automatique de la limite de validité des expansions asymptotiques. Le texte est organisé comme suit : les Sections 2.1 à 2.3 introduisent les points clés pour l'application de la méthode aux points fixes et aux cycles limites, ainsi que le critère pour le calcul des limites de validité. Ensuite, un exemple d'application, le calcul

du diagramme de bifurcation d'un pendule inversé soumis à une force suiveuse, est présenté dans la [Section 3](#). Les conclusions sont données ensuite dans la [Section 4](#).

2 La méthode de paramétrisation de variétés invariantes

Cette section présente succinctement les développements principaux relatifs à l'application de la méthode de paramétrisation. On considère des systèmes dynamiques de dimension D de la forme

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}), \quad (1)$$

où $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^D$ est le vecteur d'état du système, \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des matrices $D \times D$ réelles et $\mathbf{Q} : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^D$ est un opérateur bilinéaire qui représente les non-linéarités du système. On suppose de plus, sans perte de généralité, que l'origine est un point fixe du système.

2.1 Paramétrisation de points fixes

Les développements traités dans cette section sont présentés en beaucoup plus de détail dans [4, 5], avec une extension au cas de systèmes dépendant d'un paramètre dans [10]. Pour paramétrer une variété liée à un point fixe, la méthode introduit des variables normales $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d$ comme des coordonnées curvilignes décrivant la variété. Les deux inconnues du problème sont la relation entre les variables physiques \mathbf{y} et les variables normales, appelée paramétrisation, et l'évolution temporelle des variables normales, appelée dynamique réduite. Il convient de noter que, en général, $d \ll D$: il s'agit bien d'une méthode de réduction directe. Les inconnues sont écrites comme des développements asymptotiques en fonction des variables normales :

$$\mathbf{W}(\mathbf{z}) = \sum_{p=1}^o [\mathbf{W}(\mathbf{z})]_p = \sum_{p=1}^o \sum_{k=1}^{m_p} \mathbf{W}^{(p,k)} \mathbf{z}^{\alpha(p,k)}, \quad (2a)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \sum_{p=1}^o [\mathbf{f}(\mathbf{z})]_p = \sum_{p=1}^o \sum_{k=1}^{m_p} \mathbf{f}^{(p,k)} \mathbf{z}^{\alpha(p,k)}, \quad (2b)$$

où $\mathbf{W}^{(p,k)}$ et $\mathbf{f}^{(p,k)}$ sont les coefficients inconnus des développements asymptotiques, $[\cdot]_p$ représente la partie polynomiale de degré p , le degré maximal considéré étant o , m_p est le nombre de monômes de degré p en d variables, et $\alpha(p,k) \in \mathbb{N}^d$ est le multi-indice associé au k -ème monôme d'ordre p .

Remarque 1. Le choix de la dimension d du vecteur de variables normales est lié à des informations connues au préalable sur la dynamique du système (*e.g.* résonances internes, contenu fréquentiel d'un potentiel forçage, etc.). Pour les systèmes autonomes et conservatifs, d est toujours pair, et correspond à deux fois le nombre de modes maîtres retenus. L'introduction d'un forçage harmonique augmente d de deux unités par composante harmonique, suivant la procédure décrite dans [4], alors que l'introduction d'un paramètre de contrôle l'augmente d'une unité [10].

La paramétrisation et la dynamique réduite peuvent être substituées dans l'Éq. (1), et donnent lieu à l'équation d'invariance du système :

$$\mathbf{B}\nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{W}(\mathbf{z})\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{A}\mathbf{W}(\mathbf{z}) + \mathbf{Q}(\mathbf{W}(\mathbf{z}), \mathbf{W}(\mathbf{z})). \quad (3)$$

Si on injecte, de plus, les développements asymptotiques données par l'Éq. (2) dans l'Éq. (3), celle-ci peut être résolue ordre par ordre, et on a affaire à *o équations homologiques*. Au premier ordre, il existe d monômes, et la solution de l'équation homologique d'ordre 1 donne :

$$\mathbf{W}^{(1,k)} = \mathbf{Y}_k \quad \text{et} \quad f_k^{(1,k)} = \lambda_k \quad \forall k \in [1, \dots, d], \quad (4)$$

avec λ_k et \mathbf{Y}_k les k -ème valeur propre et vecteur propre à droite du problème. Aux ordres polynomiaux suivants, la détermination des coefficients liés à chacun des monômes est faite à travers la résolution d'un système linéaire de taille $(D+d) \times (D+d)$, où le membre de droite ne dépend que de quantités calculées précédemment. Pour plus de détails, voir [4, 5].

2.2 Paramétrisation de cycles limites

On suppose que le système étudié possède une orbite périodique, ou cycle limite, γ , qui satisfait l'Éq. (1) et la condition de périodicité $\gamma(\theta) = \gamma(\theta + \tau) \forall \theta \in [0, 2\pi]$, où τ est la période minimale du cycle limite. Pour décrire les variétés du cycle limite γ , la paramétrisation est désormais une fonction de θ aussi, et est écrite en série de Fourier-Taylor sous la forme

$$\mathbf{W}(\mathbf{z}, \theta) = \sum_{p=0}^o \sum_{k=1}^{m_p} \mathbf{W}^{(p,k)}(\theta) \mathbf{z}^{\alpha(p,k)} = \sum_{p=0}^o \sum_{k=1}^{m_p} \sum_{h=-H}^H \mathbf{W}_h^{(p,k)} e^{ih\theta} \mathbf{z}^{\alpha(p,k)}, \quad (5)$$

avec H le nombre d'harmoniques considéré dans le développement de Fourier. Dans ce cas, la variété paramétrée par les coordonnées \mathbf{z} est transverse au cycle limite, et, comme dans le cas de la paramétrisation de points fixes, elle peut être choisie avec une dimension d quelconque. Cependant, pour les applications présentées dans cette contribution, on se limitera au cas où $d = 1$ et la dynamique de la variable réduite est nulle :

$$\dot{z} = f(z) = 0. \quad (6)$$

Cette situation peut paraître restrictive, mais elle correspond au cas d'une variété composée entièrement de cycles limites : c'est la situation que l'on trouve, par exemple, pour les systèmes paramétrés subissant une bifurcation de Hopf, où z est une abscisse curviligne le long du diagramme de bifurcation directement liée au paramètre de contrôle. Il est à noter que ce cadre peut s'étendre aux systèmes conservatifs en vibration libre, où les cycles limites définissant la courbe *backbone* du système remplissent densément la sous-variété centrale de Lyapunov (ou en anglais LSM pour *Lyapunov subcenter manifold*), et z peut être interprété comme une mesure de leur amplitude. Dans ce cadre, la méthode peut être comprise comme une procédure de continuation analytique de cycles limites : la paramétrisation donnée par l'Éq. (5) décrit l'évolution des cycles limites et du paramètre de contrôle en fonction de z , qui peut être interprété comme un paramètre de continuation. La taille du pas de continuation est déterminée par la limite de validité de la méthode, et une nouvelle paramétrisation peut être calculée pour continuer la procédure. L'adjectif analytique met en relief le fait que tous les points du diagramme de bifurcation sont connus le long de chaque pas de continuation, différemment des algorithmes de continuation numérique [15].

Additionnellement, pour tenir compte de la variation fréquentielle des orbites périodiques dans la variété, une dynamique réduite pour la variable angulaire est également introduite :

$$\dot{\theta}(z) = \omega(z) = \sum_{p=0}^o \omega_p z^p. \quad (7)$$

La procédure pour calculer les coefficients de la paramétrisation dans ce cas est très similaire à celle de la paramétrisation de points fixes : les Éqs. (5) à (7) sont injectées dans l'Éq. (1), ce qui mène à l'équation d'invariance

$$\mathbf{B}\nabla_{\theta} \mathbf{W}(z, \theta) \omega(z) = \mathbf{A}\mathbf{W}(z, \theta) + \mathbf{Q}(\mathbf{W}(z, \theta), \mathbf{W}(z, \theta)). \quad (8)$$

La résolution ordre par ordre des équations homologues qui en découlent mène aux résultats présentés ci-dessous :

- **Ordre 0** : puisque le cycle limite ne se situe pas à l'origine du système, il est nécessaire de considérer des constantes dans la paramétrisation. Les coefficients d'ordre zéro de la paramétrisation résultent simplement du développement de Fourier du cycle limite, et celui de la dynamique réduite correspond à sa fréquence :

$$\mathbf{W}_h^{(0,1)} = \gamma_h \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} \quad \forall h \in [-H, \dots, H], \quad (9)$$

avec γ_h les coefficients du développement harmonique du cycle limite. Dans le cas où l'orbite périodique est déterminée au moyen d'une paramétrisation de point fixe, ce développement est accessible de manière analytique comme un produit de la méthode.

- **Ordre 1** : les coefficients d'ordre 1 de la paramétrisation et de la dynamique réduite de la variable angulaire sont obtenus à partir du noyau de l'opérateur homologue écrit dans le domaine de Fourier :

$$(i\omega_0 \mathbb{B}_H - \mathbb{A}_t) \mathbb{W}^{(1,1)} + i\mathbb{B}_H \mathbb{W}^{(0,1)} \omega_1 = \mathbf{0}, \quad (10)$$

où les matrices \mathbb{B}_H et \mathbb{A}_t peuvent être construites à partir de \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{Q} , et représentent les opérateurs de l'équation d'invariance dans l'espace de Fourier. Des expressions explicites pour leur calcul sont fournies dans [13]. Les vecteurs $\mathbb{W}^{(p,1)}$ regroupent les coefficients de la paramétrisation pour tous les harmoniques :

$$\mathbb{W}^{(p,1)} = \left[(\mathbf{W}_{-H}^{(p,1)})^T, \dots, (\mathbf{W}_H^{(p,1)})^T \right]^T \quad \forall p \in [0, \dots, o]. \quad (11)$$

Il est possible de montrer [14] que les coefficients de la paramétrisation représentent le développement harmonique des vecteurs propres de la matrice de monodromie du système associés à un multiplicateur de Floquet unitaire. L'Éq. (10) doit donc être complétée par une condition supplémentaire, imposant l'orthogonalité de $\mathbb{W}^{(1,1)}$ au développement harmonique du vecteur tangent au cycle limite, qui fait aussi partie du noyau de l'Éq. (10) puisqu'il est associé à un multiplicateur unitaire.

- **Ordres supérieurs** : pour les ordres suivants, la même matrice de coefficients est employée pour résoudre le système, mais désormais le membre de droite est non nul et dépend des coefficients précédemment calculés. Une condition d'orthogonalité supplémentaire par rapport à $\mathbb{W}^{(1,1)}$ doit être imposée pour que le système possède une solution unique. Ce type de procédure est caractéristique de la résolution des équations de la méthode de paramétrisation. Il est intéressant de noter, à ce stade, que le système d'équations à résoudre à chaque ordre est couplé dans tous les harmoniques, et présente donc une grande taille. Cependant, puisque la matrice de coefficients reste la même pour tous les ordres, elle peut être factorisée une seule fois, ce qui garantit une meilleure efficacité de la procédure.

2.3 Limite de validité

Pour la construction des modèles réduits obtenus avec la méthode de paramétrisation, les coefficients des développements asymptotiques de la paramétrisation décrivant la variété sont obtenus, ordre par ordre, par la résolution de l'équation d'invariance : soit l'Éq. (3) dans le cas des points fixes soit l'Éq. (8) dans le cas des cycles limites. Puisque le résultat est obtenu sous forme de développement asymptotique, il n'est pas exact, et présente en général un rayon de convergence fini. Une façon assez naturelle d'estimer la qualité des approximations issues de la méthode de paramétrisation, et donc de déterminer sa limite de validité, consiste à vérifier à quel point l'équation d'invariance est vérifiée par l'approximation fournie par le développement asymptotique. On choisira d'utiliser une version de ce critère pour estimer la limite de validité de la méthode dans cette contribution, bien que d'autres possibilités existent, voir *e.g.* [16] pour plus de détails.

En particulier, quand on considère un système autonome avec un seul mode maître présent dans la paramétrisation, il est possible de simplifier le critère de l'équation d'invariance en supposant que, pour une paramétrisation d'ordre o , toute l'erreur de l'approximation est concentrée dans le terme dominant, d'ordre $o + 1$. En utilisant cette hypothèse, une expression analytique (permettant de calculer la limite de validité de la méthode en fonction d'une tolérance ε spécifiée) peut être déterminée, permettant un calcul rapide, et en général précis, de la limite de validité. Elle sera utilisée dans les exemples qui suivent pour déterminer quand un nouveau développement asymptotique doit être calculé. Pour plus de détails, et pour les expressions permettant l'application de ce critère, voir [13, 16].

3 Exemple d'application

Cette section présente un exemple illustratif de l'application de la méthode. On considère un pendule inversé avec trois degrés de liberté soumis à une force suiveuse, subissant une bifurcation de Hopf pour une valeur critique de l'intensité de la force, et pour laquelle le diagramme de bifurcation est tracé. On calcule d'abord une paramétrisation de point fixe autour de la configuration d'équilibre correspondant à l'origine de l'espace de phase, qui permet de trouver des cycles limites du système. Une fois la limite de validité, calculée selon le critère présenté dans la Section 2.3, atteinte, des paramétrisations de cycle limite successives sont déterminées, permettant d'étendre les deux courbes mentionnées.

Le système considéré est un pendule de Ziegler [17] avec une masse supplémentaire. Son équation du mouvement peut être écrite sous la forme

$$\mathbf{M}\ddot{\theta} + \mathbf{C}\dot{\theta} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_g)\theta = \mathbf{F}_{nl}, \quad (12)$$

et des expressions précises pour chacun des matrices et vecteurs dans Éq. (12), ainsi que l'établissement des équations du mouvement, sont rappelées dans [10]. Dans la même référence, une étude du système avec un modèle réduit construit à travers une paramétrisation de point fixe a été menée, permettant de tracer son diagramme de bifurcation jusqu'à une certaine amplitude, au-delà de laquelle l'approximation diverge dû à l'éloignement du cycle limite au point fixe. Dans cette section, nous essayons d'étendre la zone de validité du diagramme obtenu avec le modèle réduit utilisant la paramétrisation de cycles limites.

Pour appliquer la méthode de paramétrisation l'ordre polynomial maximal de l'approximation, ainsi que le nombre d'harmoniques, ont été choisis comme $o = H = 15$, et deux tolérances pour la procédure permettant de déterminer la limite de validité ont été testées : $\varepsilon = 10^{-2}$ et $\varepsilon = 10^{-6}$. Le diagramme de bifurcation obtenu pour l'angle de l'extrémité du pendule est présenté dans la Fig. 1. Il est comparé avec le diagramme trouvé utilisant la paramétrisation de point fixe seulement et une référence obtenue par continuation numérique du modèle complet avec le logiciel Matcont [18]. Les parties stables et instables du diagramme sont montrées en trait continu et pointillé, respectivement. La stabilité n'a été calculée que pour le modèle complet.

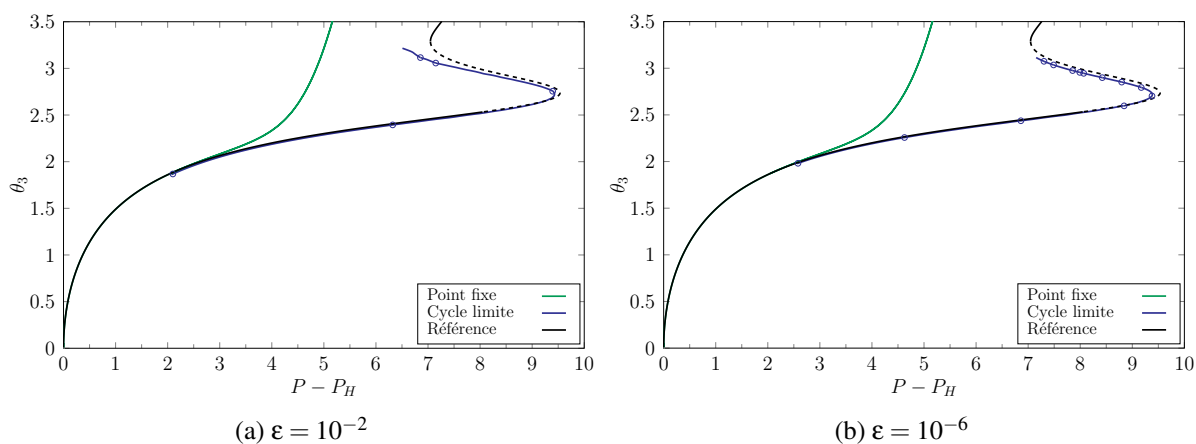


FIGURE 1 – Diagrammes de bifurcation pour le pendule de Ziegler à 3 degrés de liberté. La paramétrisation de cycles limites est utilisée pour étendre les résultats présentés dans [10], obtenus avec une paramétrisation de point fixe seulement. Des résultats de référence, calculés avec le logiciel de continuation numérique Matcont, sont également présentés.

La figure montre comment la paramétrisation de cycles limites a permis d'augmenter la zone de validité du modèle réduit : pour les deux cas il est possible d'aller au moins jusqu'au point de repliement de la variété, situé à une charge plus de trois fois supérieure à la celle pour laquelle la paramétrisation de points fixes ne converge plus. Il est possible de remarquer qu'une fois la partie instable du diagramme est atteinte, des difficultés de convergence apparaissent. D'autres valeurs de o , H et ε ont été testés, mais ce phénomène est toujours présent. Il sera étudié en plus de détails par la suite. Une possible explication est l'apparition d'une bifurcation de cycles limites avec le changement de stabilité, qui pourrait perturber le calcul de la tangente à l'ordre 1 de la paramétrisation.

4 Conclusion

Dans cette contribution, une procédure permettant d'étendre la zone de convergence de la méthode de paramétrisation de variétés invariantes a été présentée. L'approche proposée combine la paramétrisation de points fixes et de cycles limites avec une procédure permettant d'estimer la limite de validité de la méthode, afin d'obtenir un calcul automatisé de diagrammes de bifurcation. En particulier, la démarche présentée est adaptée aux cas où la solution recherchée a la topologie d'une variété densément peuplée de cycles limites.

Un exemple a été traité : le cas d'un pendule inversé soumis à une force suiveuse, pour lequel le diagramme de bifurcation décrivant l'évolution de l'amplitude des cycles limites issus d'une bifurcation de Hopf en fonction de l'intensité du forçage est tracé. La méthode proposée a permis d'augmenter significativement la zone de convergence de la paramétrisation de points fixes, pour un coût numérique modéré. Des exemples de structures continues discrétisées par éléments finis (cas de la colonne de Beck) seront présentés lors du colloque afin de montrer que la méthode permet de traiter des systèmes de grande taille. Les résultats présentés dans cette contribution montrent que les branches non linéaires peuvent être calculées à l'aide d'une méthode de continuation que l'on peut qualifier d'analytique, dont chaque tronçon de branche correspond à l'approximation locale de la variété invariante centrale attachée au cycle limite.

Références

- [1] A. Haro, M. Canadell, J.-L. Figueras, A. Luque, and J.-M. Mondelo. *The parameterization method for invariant manifolds. From rigorous results to effective computations*. Springer, Switzerland, 2016.
- [2] A. Vizzaccaro, A. Opreni, L. Salles, A. Frangi, and C. Touzé. High order direct parametrisation of invariant manifolds for model order reduction of finite element structures : application to large amplitude vibrations and uncovering of a folding point. *Nonlinear Dynamics*, 110 :525–571, 2022.
- [3] S. Jain and G. Haller. How to compute invariant manifolds and their reduced dynamics in high-dimensional finite-element models. *Nonlinear Dynamics*, 107 :1417–1450, 2022.
- [4] A. Vizzaccaro, G. Gobat, A. Frangi, and C. Touzé. Direct parametrisation of invariant manifolds for non-autonomous forced systems including superharmonic resonances. *Nonlinear Dynamics*, 112 :6255–6290, 2024.
- [5] A. Grolet, A. Vizzaccaro, M. Debeurre, and O. Thomas. High order invariant manifold model reduction for systems with non-polynomial non-linearities : geometrically exact finite element structures and validity limit. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 178 :105138, 2025.
- [6] A. Opreni, G. Gobat, C. Touzé, and A. Frangi. Nonlinear model order reduction of resonant piezoelectric micro-actuators : an invariant manifold approach. *Computers and Structures*, 289 :107154, 2023.
- [7] A. Frangi, A. Colombo, A. Vizzaccaro, and C. Touzé. Reduced order modelling of fully coupled electro-mechanical systems through invariant manifolds with applications to microstructures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 126 :e7641, 2025.
- [8] A. Martin, A. Opreni, A. Vizzaccaro, M. Debeurre, L. Salles, A. Frangi, O. Thomas, and C. Touzé. Reduced order modeling of geometrically nonlinear rotating structures using the direct parametrisation of invariant manifolds. *Journal of Theoretical, Computational and Applied Mechanics*, 10430, 2023.
- [9] F. A. X. Carneiro Pinho, M. Amabili, Z. J. G. N. del Prado, and F. M. Alves da Silva. Nonlinear forced vibration analysis of doubly curved shells via the parameterization method for invariant manifold. *Nonlinear Dynamics*, 112 :20677–20701, 2024.
- [10] A. de Figueiredo Stabile, A. Vizzaccaro, L. Salles, A. Colombo, A. Frangi, and C. Touzé. Reduced-order modelling of parameter-dependent systems with invariant manifolds : application to Hopf bifurcations in follower force problems. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 177 :105133, 2025.
- [11] A. Colombo, A. Vizzaccaro, C. Touzé, A. de Figueiredo Stabile, L. Pastur, and A. Frangi. Reduced order modelling of Hopf bifurcations for the Navier-Stokes equations through invariant manifolds. *Physical Review E*, submitted, 2025.
- [12] M. Li and L. Wang. Parametric model reduction for a cantilevered pipe conveying fluid via parameter-dependent center and unstable manifolds. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 160 :104629, 2024.
- [13] A. Grolet, C. Touzé, A. de Figueiredo Stabile, and O. Thomas. A harmonic balance normal form parameterisation for single mode reduction of nonlinear vibrating systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, submitted, 2025.
- [14] R. Castelli, J.-P. Lessard, and J. D. Mireles James. Parameterization of invariant manifolds for periodic orbits, I : Efficient numerics via the Floquet normal form. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 14(1) :132–167, 2015.
- [15] Rüdiger Seydel. *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Springer Verlag, New York, 2010.
- [16] A. de Figueiredo Stabile, A. Grolet, A. Vizzaccaro, and C. Touzé. On the validity limits of the parametrisation method for invariant manifolds : an assessment of practical criteria for vibrating systems. *Submitted to Nonlinear Dynamics*, 2025.

- [17] H. Ziegler. Die stabilitätskriterien der elastomechanik. *Ingenieur-Archiv*, 20(1) :49–56, 1952.
- [18] A. Dhooge, W. Govaerts, and Y. A. Kuznetsov. Matcont : a matlab package for numerical bifurcation analysis of odes. *ACM SIGSAM Bulletin*, 38(1) :21–22, 2004.