

# pyVTCR: un logiciel pour la simulation des systèmes vibro-acoustiques en moyennes fréquences.

R. Thevenot<sup>1,2</sup>, A. Barbarulo<sup>2</sup>, G. Puel<sup>2</sup>, P. Dec<sup>1</sup>

<sup>1</sup> SNCF-DTIPG, La plaine - Saint-Denis, {raphael.thevenot, patryk.dec}@sncf.fr

<sup>2</sup> LMPS (Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay), Gif-sur-Yvette, {raphael.thevenot, andrea.barbarulo, guillaume.puel}@centralesupelec.fr

**Résumé** — *pyVTCR* est une nouvelle librairie python ayant pour objectif la simulation de problèmes vibro-acoustiques en moyennes fréquences. Cette librairie utilise la théorie variationnelle des rayons complexes afin de s'affranchir de l'erreur de dispersion et des coûts de calcul grandissants inhérents à la méthode des éléments finis classiques. De plus, l'architecture du code a été conçue afin de permettre l'utilisation de librairies python pour le calcul haute performance, en étant hautement parallélisable et pouvant même utiliser le calcul GPU pour la résolution des systèmes linéaires. *pyVTCR* est en cours de développement dans le cadre d'une collaboration entre le LMPS et la SNCF. Après une présentation générale du contexte du développement du code, nous présentons quelques exemples d'utilisation de *pyVTCR*.

**Mots clés** — TVRC, moyennes fréquences, vibro-acoustique, *pyVTCR*.

## 1 Contexte du développement de *pyVTCR*

Une des principales difficultés de la simulation vibro-acoustique en moyennes fréquences est l'explosion du coût de calcul lorsque la fréquence augmente. Deraemaeker [4] montre l'existence, dans la méthode des éléments finis, d'une erreur de pollution en plus de l'erreur de discrétisation pour la résolution de l'équation de Helmholtz. Cette erreur limite grandement l'utilisation de la méthode pour les hautes et moyennes fréquences ; c'est pourquoi de nombreuses techniques ont été développées au cours des dernières années, comme résumé dans le livre [1]. C'est dans ce contexte que P. Ladevèze [5] introduit en 1996 la théorie variationnelle des rayons complexes (TVRC), une méthode dite de Trefftz. Le code *pyVTCR* est l'implémentation la plus récente de la TVRC : son développement a été initié en 2023 par Raphael Thevenot et Antoine Solcourt, à la suite des travaux de Nhat Quang Ta dans le cadre de sa thèse entre le LMPS et la SNCF. L'objectif de *pyVTCR* est multiple :

- Créer une plateforme unifiant les 30 ans de développement de la TVRC (en particulier pour la simulation acoustique et vibratoire).
- Tirer parti du langage python afin de profiter du dynamisme de sa communauté et des récentes librairies de calcul haute performance.
- Utiliser la programmation orientée objet afin de créer une architecture modulable et suffisamment souple pour être utilisée dans des travaux de thèse, pour des projets pédagogiques et de nouvelles collaborations industrielles.
- Permettre l'ajout de nouvelles fonctionnalités dans le futur et la pérennité du développement.

Aujourd'hui le code prend en charge les études suivantes en 2D :

- Simulations acoustiques.
- Couplage vibro-acoustique entre une structure et une cavité acoustique.
- Couplage entre un domaine acoustique et un domaine élastique.
- Méthode hybride TVRC-MEF pour la vibro-acoustique.

## 2 Présentation du code pyVTCR

Le code pyVTCR se fonde sur la TVRC pour résoudre des problèmes de vibrations et d'acoustique. Dans un premier temps, la TVRC est présentée dans le cadre de l'acoustique 2D, puis l'architecture globale du code est décrite.

### 2.1 La TVRC appliquée à l'acoustique 2D

La figure 1 présente un cas de référence de problème acoustique où le domaine  $\Omega$  étudié est scindé en 2 sous-domaines. Dans la suite, nous considérerons un domaine partitionné en  $E$  sous-domaines différents.

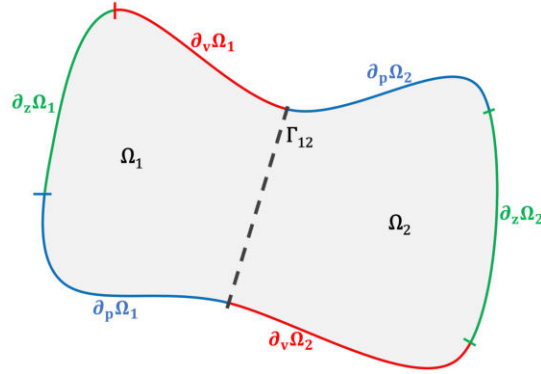


FIGURE 1 – Illustration d'un problème typique d'acoustique 2D.

Une première étape nécessaire à la TVRC est la partition du domaine étudié  $\Omega$  en  $E$  sous-domaines  $\{\Omega_e\}_{1 \leq e \leq E}$  dits étoilés [6] :

$$\Omega = \bigcup_{1 \leq e \leq E} \Omega_e, \Omega_e \cap \Omega_f = \emptyset \text{ si } e \neq f$$

Un sous-domaine  $\Omega_e$  est dit étoilé si et seulement si :

$$\exists a \in \Omega_e \mid \forall x \in \Omega_e, \{(1-t)a + tx \mid t \in [0, 1]\} \subset \Omega_e$$

La méthode TVRC étant une méthode de résolution fréquentielle, on fixe une fréquence d'étude  $f$  et le champs de pression acoustique  $p_e$ , défini sur  $\Omega_e$ , vérifie l'équation d'Helmholtz suivante :

$$\Delta p_e + k^2 p_e = 0 \quad \text{dans } \Omega_e \quad (1)$$

avec  $k = (1 + i\eta) \frac{2\pi f}{c_0}$  le nombre d'onde supposé homogène, et où  $\eta$ ,  $c_0$  sont le facteur d'amortissement et la vitesse du son dans le milieu étudié.

Chaque sous-domaine peut être soumis à 3 types de conditions aux limites différentes :

- Condition de Dirichlet :  $p_e = p_{imp}$  sur  $\partial_p \Omega_e$
- Condition de Neumann :  $\frac{-i}{\rho_0 2\pi f} \frac{\partial p_e}{\partial \underline{n}_e} = v_{imp}$  sur  $\partial_v \Omega_e$
- Condition de Robin :  $p_e + \frac{iZ_{imp}}{\rho_0 2\pi f} \frac{\partial p_e}{\partial \underline{n}_e} = 0$  sur  $\partial_Z \Omega_e$

De plus, la décomposition en sous-domaines introduit des conditions aux limites de continuité à la frontière  $\Gamma_{ef}$  entre les 2 sous-domaines  $\Omega_e$  et  $\Omega_f$  :

$$p_e - p_f = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{ef} = \partial \Omega_e \cap \partial \Omega_f \quad (2)$$

$$\frac{i}{\rho_0 2\pi f} \frac{\partial p_e}{\partial \underline{n}_e} + \frac{i}{\rho_0 2\pi f} \frac{\partial p_f}{\partial \underline{n}_f} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{ef} = \partial \Omega_e \cap \partial \Omega_f \quad (3)$$

Les normales  $\underline{n}_e$  et  $\underline{n}_f$  sont sortantes de leur sous-domaine respectif.

Une fois le problème de référence correctement défini, on peut montrer que pour chaque sous-domaine étoilé  $\Omega$ , la solution au problème peut s'écrire sous la forme d'une fonction d'Herglotz [6] :

$$p_e(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} A_e(\theta) e^{ik_e(\theta) \cdot \underline{x}} d\theta \quad (4)$$

Il s'agit d'une somme continue d'ondes planes de vecteur d'onde  $\underline{k}_e(\theta)$  tel que  $\|\underline{k}_e\| = k$ . Afin de résoudre numériquement ce problème, la méthode TVRC propose d'approximer cette somme continue par une somme discrète et finie. Plusieurs choix ont été étudiés, mais le choix retenu est d'approximer la fonction d'amplitude  $A_e$  par une somme de Dirac ; on obtient donc l'approximation suivante :

$$p_e(\underline{x}) \approx \sum_{n=1}^N a_n e^{i\mathbf{k}_e(\theta_n) \cdot \underline{x}} \quad (5)$$

Cette formulation a l'avantage de faciliter l'implémentation numérique et d'accélérer les temps de calcul en permettant un calcul analytique des intégrales de la forme faible (6).

De par ce choix, la pression  $p_e$  vérifie *a priori* l'équation d'équilibre (1), il suffit donc de trouver les amplitudes  $a_n$  qui satisfont au mieux les conditions aux limites. Pour ce faire, on introduit la formulation faible du problème aux limites :

Trouver  $(p_1, \dots, p_E) \in S_{1,ad} \times \dots \times S_{E,ad}$ , tel que :

$$\sum_{e=1}^E \Re \left( \int_{\partial_p \Omega_e} (p_e - p_{imp}) \overline{\delta v_e} dS + \int_{\partial_v \Omega_e} (v_e - v_{imp}) \overline{\delta p_e} dS + \int_{\partial_Z \Omega_e} (p_e - Z_{imp} v_e) \overline{\delta v_e} dS + \sum_{f=1, f \neq e}^E \int_{\Gamma_{ef}} (p_e - p_f) \overline{\delta v_e} + (v_e + v_f) \overline{\delta p_e} dS \right) = 0 \quad (6)$$

$$\forall (\delta p_1, \dots, \delta p_E) \in S_{1,ad} \times \dots \times S_{E,ad}$$

avec  $v_e = \frac{-i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_e}{\partial n_e}$ ,  $\delta v_e = \frac{-i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \delta p_e}{\partial n_e}$  et  $\overline{(\square)}$  qui correspond au conjugué complexe de  $\square$ .

A partir de cette forme, on peut introduire les sous-opérateurs suivants :

$$\mathcal{B}_p^e(p_e, \delta p_e) = \int_{\partial_p \Omega_e} p_e \overline{\delta v_e} dS \quad ; \quad \mathcal{B}_v^e(p_e, \delta p_e) = \int_{\partial_v \Omega_e} v_e \overline{\delta p_e} dS \quad ; \quad \mathcal{B}_Z^e(p_e, \delta p_e) = \int_{\partial_Z \Omega_e} (p_e - Z_{imp} v_e) \overline{\delta v_e} dS$$

$$\mathcal{B}_{\Gamma_f}^e(p_e, \delta p_e) = \int_{\Gamma_{ef}} p_e \overline{\delta v_e} + v_e \overline{\delta p_e} dS \quad ; \quad \mathcal{B}_f^e(p_f, \delta p_e) = \int_{\Gamma_{ef}} -p_f \overline{\delta v_e} + v_f \overline{\delta p_e} dS$$

$$\mathcal{L}_p(\delta p_e) = \int_{\partial_p \Omega_e} p_{imp} \overline{\delta v_e} dS \quad ; \quad \mathcal{L}_v(\delta p_e) = \int_{\partial_v \Omega_e} v_{imp} \overline{\delta p_e} dS$$

ce qui permet de réécrire l'équation (6) sous la forme suivante :

$$\sum_{e=1}^E \Re \left( \mathcal{B}_p^e(p_e, \delta p_e) + \mathcal{B}_v^e(p_e, \delta p_e) + \mathcal{B}_Z^e(p_e, \delta p_e) + \mathcal{L}_p(\delta p_e) + \mathcal{L}_v(\delta p_e) + \sum_{f=1, f \neq e}^E (\mathcal{B}_{\Gamma_f}^e(p_e, \delta p_e) + \mathcal{B}_f^e(p_f, \delta p_e)) \right) = 0 \quad (7)$$

ce qui donne le système linéaire suivant après discrétisation :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_p^1 + \mathbf{B}_v^1 + \mathbf{B}_Z^1 + \mathbf{B}_{\Gamma_f}^1 & \cdots & \mathbf{B}_1^E \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_E^1 & \cdots & \mathbf{B}_p^E + \mathbf{B}_v^E + \mathbf{B}_Z^E + \mathbf{B}_{\Gamma_f}^E \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_E \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{L}_p^1 + \mathbf{L}_v^1 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_p^E + \mathbf{L}_v^E \end{bmatrix}}_{\mathbb{L}} \quad (8)$$

## 2.2 Quelques propriétés de la TVRC

La première propriété de la TVRC est qu'elle ne nécessite **pas de maillage**. Elle demande beaucoup moins de degrés de liberté que la méthode des éléments finis pour résoudre un problème. De plus, l'utilisation des ondes planes comme fonctions de forme permet d'obtenir une solution  $C^\infty$  et ne nécessite

aucune interpolation. Ces ondes planes permettent un calcul analytique des intégrales nécessaires à la création du système à résoudre, ce qui permet de réduire significativement les temps de calcul. Comme de nombreuses autres méthodes de Trefftz, le système à résoudre est mal conditionné, on peut noter les propriétés suivantes :

- La matrice  $\mathbb{B}$  dépend fondamentalement de la fréquence étudiée et elle est mal conditionnée.
- La matrice  $\mathbb{B}$  est dense par bloc (cf. figure 2), elle est non symétrique, et à valeurs complexes.
- Les sous-matrices de couplage  $\mathbf{B}_e^f$  sont nulles si les domaines e et f sont séparés, sinon elles sont pleines.

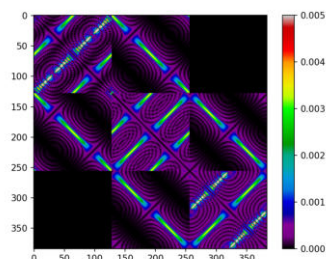
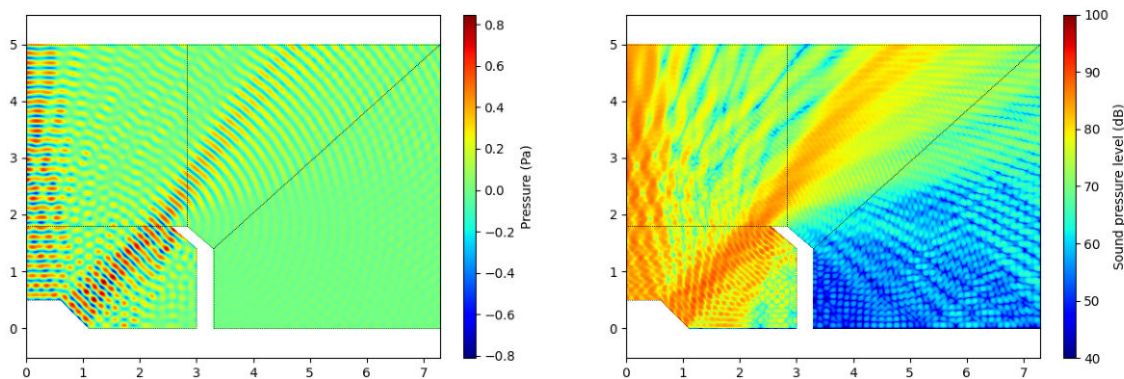


FIGURE 2 – Exemple d’une matrice TVRC pour 3 domaines acoustiques. L’échelle de couleur correspond au module des valeurs de la matrice.

### 3 Exemples d’utilisation de *pyVTCR*

#### 3.1 Propagation acoustique en extérieur

Un des principaux avantages de *pyVTCR* est que la méthode ne demande que très peu de degrés de liberté, même pour les grands domaines. Ceci est particulièrement avantageux pour l’étude de la propagation sonore en extérieur, les figures 3a et 3b présentent les résultats obtenus pour l’étude d’une barrière antibruit à 2000 Hz. Pour cette fréquence, le calcul a demandé seulement 1279 degrés de liberté alors qu’un calcul éléments finis en nécessiterait plusieurs centaines de milliers.



(a) Partie réelle de la pression acoustique à 2000 Hz. (b) Niveau de pression acoustique (dB) à 2000 Hz.

FIGURE 3 – Exemple d’une étude de propagation sonore en extérieur.

#### 3.2 Transmission au travers d’une paroi fine

Le code *pyVTCR* permet de simuler le couplage entre des cavités acoustiques et des structures fines de types poutres ou plaques. Dans cet exemple, on étudie la transmission sonore à travers une paroi fine dans le cas d’une cabine de train simplifiée.

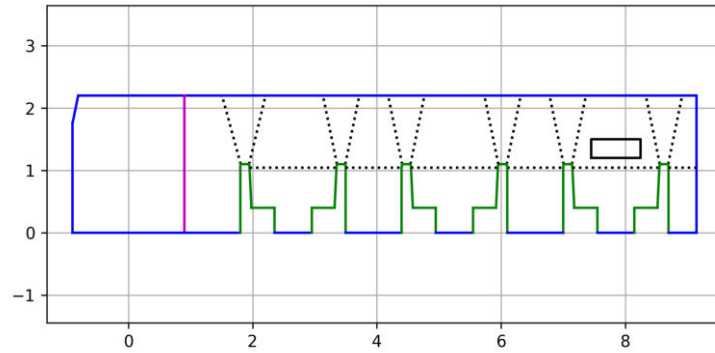


FIGURE 4 – Géométrie d’une cabine de train simplifiée. Les conditions aux limites sont : des vitesses imposées (en bleu), une impédance imposée (en vert). La paroi est ici en mauve.

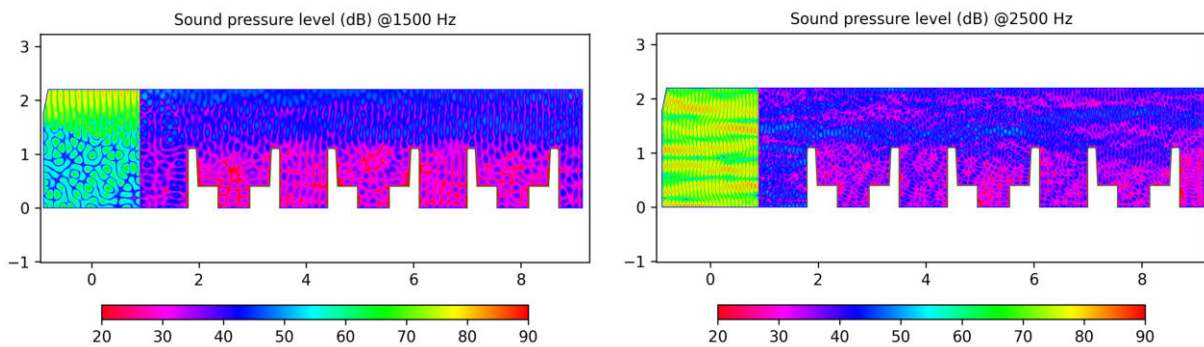
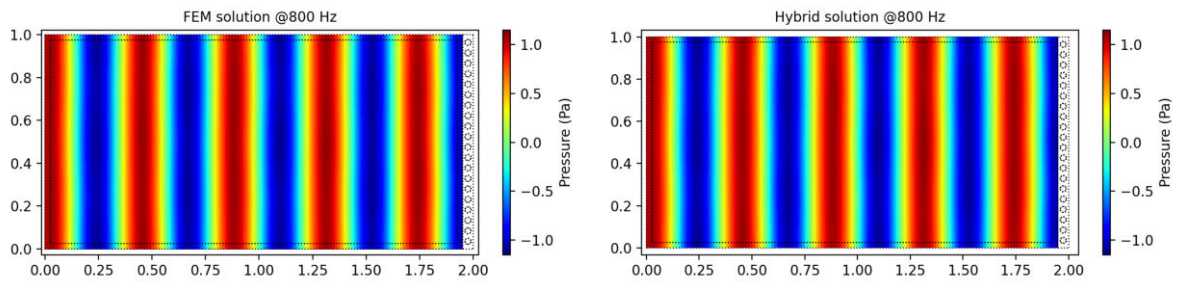


FIGURE 5 – Exemple de niveau d’intensité sonore à 1500 et 2500Hz.

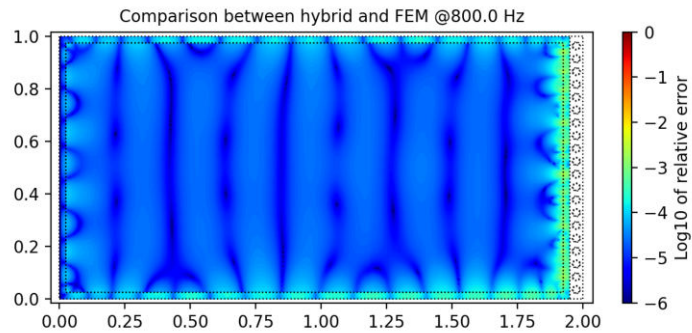
### 3.3 Etude de résonateurs de Helmholtz pour l’absorption acoustique

Le code *pyVTCR* inclut aussi un module éléments finis qui permet notamment d’effectuer des simulations vibro-acoustiques hybrides entre TVRC et MEF. Ici on présente un exemple typique d’utilisation de la méthode hybride. On souhaite étudier l’influence d’inclusions rigides résonantes à l’intérieur d’une paroi absorbante. La figure 6 présente la situation étudiée avec une comparaison entre un calcul complet éléments finis et un calcul hybride. Seul le champ acoustique est ici représenté. La MEF nécessite environ 400k dds tandis que la méthode hybride n’a besoin que d’environ 60k dds. Ainsi, le calcul hybride permet d’effectuer la simulation en 5 fois moins de temps.

La figure 7 présente la comparaison de la réponse fréquentielle en présence des résonateurs ou non pour les deux méthodes. Tout d’abord, on n’observe pas de différence significative entre les deux méthodes hormis un temps de calcul cinq fois plus rapide pour la méthode hybride. De plus, on constate l’effet des résonateurs sur les niveaux acoustiques entre 1000 et 1500Hz. L’utilisation de résonateurs permet de drastiquement réduire l’énergie acoustique de la pièce dans cette gamme de fréquences.



(a) Partie réelle de la pression acoustique obtenue par la MEF. (b) Partie réelle de la pression acoustique obtenue par la méthode hybride



(c)  $\log_{10}$  de l'écart entre la MEF et la méthode hybride.

FIGURE 6 – Comparaison de la méthode hybride avec la MEF à 800Hz sur un cas vibro-acoustique.

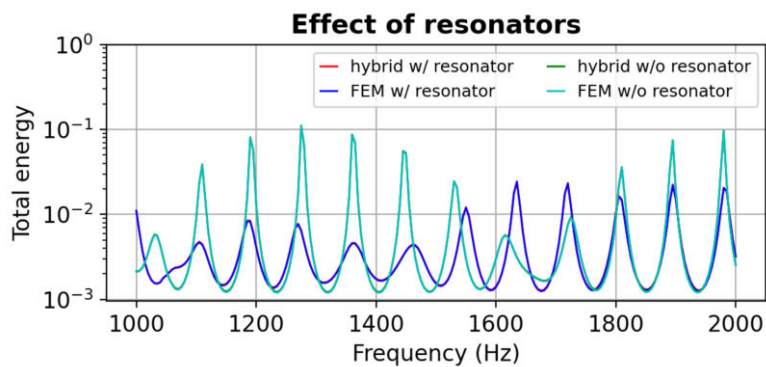


FIGURE 7 – Comparaison des réponses fréquentielles (niveau acoustique) avec et sans résonateurs entre la MEF et la méthode hybride.

## 4 Une première interface utilisateur

Afin de faciliter l'usage du code lors des projets étudiants, une interface graphique est en cours de développement. Pour l'instant, elle permet le chargement des fichiers d'entrée, la déclaration des degrés de liberté et l'affichage du résultat.

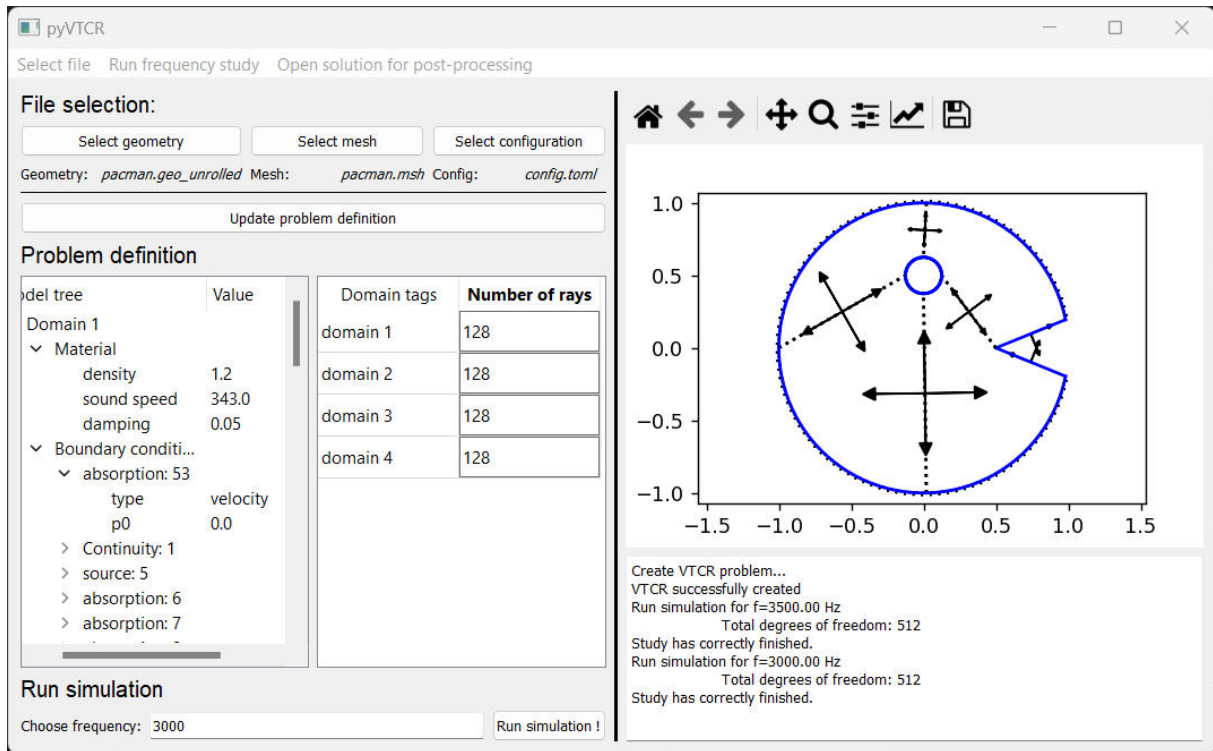


FIGURE 8 – Visuel de la première version de l'interface utilisateur de *pyVTCR*.

## 5 Perspectives de développement

*pyVTCR* est un logiciel encore récent qui est en constante évolution ; les développements à court/moyen terme sont les suivants :

- Développement du module acoustique 3D.
- Ajout de matériaux poreux.
- Intégration de méthodes HPC en particulier pour la résolutions de systèmes linéaires.
- Développement de l'interface utilisateur.

### Références

- [1] O. Atak, B. Pluymers, W. Desmet et al., *CAE Methodologies for Mid-Frequency Analysis in Vibration and Acoustics*, 2012.
- [2] A. Cattabiani, A. Barbarulo, et al, *Variational theory of complex rays applied to shell structures : in-plane inertia, quasi-symmetric ray distribution, and orthotropic materials*, *Computational Mechanics*, 983-997, 2015.
- [3] R. Cettour-Janet, *Modelling the vibrational response and acoustic radiation of the railway tracks*, Thèse de doctorat, Université Paris Saclays, 2019.
- [4] A. Deraemaeker, I. Babuska, P. Bouillard. *Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions*, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 471-499, 1999.
- [5] P. Ladevèze, *Une nouvelle approche pour le calcul des vibrations moyennes fréquences*, compte rendu de l'académie des sciences de Paris, 849-856, 1996.
- [6] R. L. Ochs, *A version of Runge's theorem for the Helmholtz equation with applications to scattering theory*, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 107-119, 1989