

# Optimisation topologique des structures élasto-viscoplastiques par la méthode SIMP avec calcul analytique de la sensibilité

P. Charkaluk<sup>1,2</sup>, M. Peigney<sup>1</sup>, G. Scalet<sup>2</sup>, G. Cumunel<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Navier, Université Gustave Eiffel, ENPC, CNRS, Marne-la-Vallée, France

<sup>2</sup> Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura (DICAr), Università degli Studi di Pavia, Pavia, Italia  
e-mail: paul.charkaluk@enpc.fr

**Résumé** — Ce travail présente l'optimisation topologique des structures élasto-viscoplastiques par la méthode SIMP, pour la minimisation de l'énergie élastique. La sensibilité de l'énergie élastique par rapport à la densité, nécessaire pour la mise à jour de la topologie à chaque itération, est calculée analytiquement à l'aide d'une méthode d'état adjoint. L'algorithme est implémenté dans un logiciel de calcul aux éléments finis et un exemple d'optimisation est présenté.

**Mots clés** — optimisation, élasto-viscoplasticité, état adjoint.

## 1 Introduction

L'optimisation topologique est une méthode d'optimisation sous contraintes permettant, dans un volume donné, de trouver la répartition optimale de la matière. Une des méthodes les plus connues d'optimisation topologique est la méthode SIMP présentée dans [1]. Cette méthode a par la suite été adaptée pour le cas élastoplastique, dans des articles comme [2]. L'ensemble de ces articles utilisent, à la connaissance des auteurs, des méthodes numériques pour le calcul de la sensibilité de la fonction objectif, élément central dans l'optimisation.

Dans le cadre de cette étude, l'objectif de l'optimisation est la minimisation de l'énergie élastique. Une attention particulière est dévolue au calcul de la sensibilité de l'énergie élastique par rapport à la densité. Cette quantité est nécessaire pour la mise à jour de la topologie à chaque itération. Dans cette étude, elle est calculée de manière analytique par une méthode d'état adjoint.

Nous rappelons dans la deuxième section les lois de comportement associées à un matériau élasto-viscoplastique. L'algorithme pour le calcul d'optimisation est présentée dans la troisième section. Il inclut à la fois le calcul des contraintes dans le domaine, de l'énergie élastique et de sa sensibilité, ainsi que la partie d'optimisation, incluant un lissage de la sensibilité, la mise à jour de la topologie, et les conditions d'arrêt de l'optimisation. Nous présentons dans la quatrième section un exemple d'application de l'algorithme dans le logiciel de calcul aux éléments finis FreeFEM++. Finalement, les conclusions et perspectives de l'étude sont présentées dans la cinquième section.

L'étude considère uniquement des domaines 2D, plus faciles à traiter et à appréhender. Son extension à la 3D ne présente pas de difficultés majeures en dehors de la complexification de plusieurs termes et de l'implémentation numérique.

## 2 Loi de comportement

### 2.1 Loi de comportement élastoplastique

Comme présenté dans [3], la loi de comportement d'un matériau élastoplastique présente un potentiel de dissipation plastique de la forme :

$$\Xi(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{cases} 0 & \text{si } q(\boldsymbol{\sigma}) < \sigma_y \\ +\infty & \text{si } q(\boldsymbol{\sigma}) \geq \sigma_y \end{cases} \quad (1)$$

avec  $\sigma_y$  la limite du domaine d'élasticité. On a alors :

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\partial \Xi}{\partial \sigma} = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad (2)$$

avec  $\epsilon^p$  la déformation plastique,  $\Phi$  la fonction de charge, et  $\dot{\gamma}$  le multiplicateur plastique.  $\Phi$  et  $\dot{\gamma}$  respectent les conditions de Kuhn-Tucker énoncées à l'Eq. 3 :

$$\dot{\gamma} \geq 0, \Phi \leq 0, \dot{\gamma}\Phi = 0 \quad (3)$$

## 2.2 Loi de comportement élasto-viscoplastique

Dans le cas de l'élasto-viscoplasticité, ce potentiel de dissipation plastique est régularisé, comme montré à la Fig. 1. Dans cette étude, nous utiliserons le modèle de Perić (introduit dans [4]), dans lequel le multiplicateur plastique est une fonction polynomiale de degré  $n$  de la contrainte, donné par :

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{si } q(\sigma) < \sigma_y \\ \frac{1}{\mu} \left[ \left( \frac{q(\sigma)}{\sigma_y} \right)^n - 1 \right] & \text{si } q(\sigma) \geq \sigma_y \end{cases} \quad (4)$$

Ce faisant, la courbe est "lissée", comme le montre la Fig. 2. On a alors :

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\partial \Xi_v}{\partial \sigma} \quad (5)$$

où  $\Xi_v$  est une fonction différentiable.

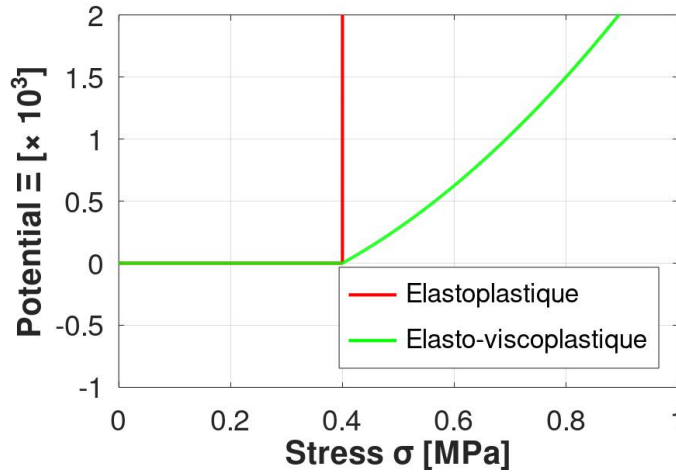


FIGURE 1 – Potentiel de déformation plastique de matériaux élastoplastique (rouge), élasto-viscoplastique (vert)

## 2.3 Algorithme de retour radial

Dans cette étude, pour le calcul aux éléments finis des structures élasto-viscoplastiques, nous utiliserons une méthode de retour radial telle que présentée dans [3]. Cette méthode est une méthode itérative en temps. A chaque pas de temps, on considère un pas élastique (prédicteur). Si ce pas est en-dehors du domaine d'élasticité, on procède ensuite à une correction viscoplastique pour le ramener à la frontière du domaine d'élasticité.

## 3 Algorithme d'optimisation

### 3.1 Énoncé du problème d'optimisation

L'optimisation topologique est une méthode d'optimisation sous contraintes consistant à répartir de manière optimale, dans un volume donné  $\Omega$ , une quantité de matière  $V_{ref} \in [0; 1]$  correspondant à une

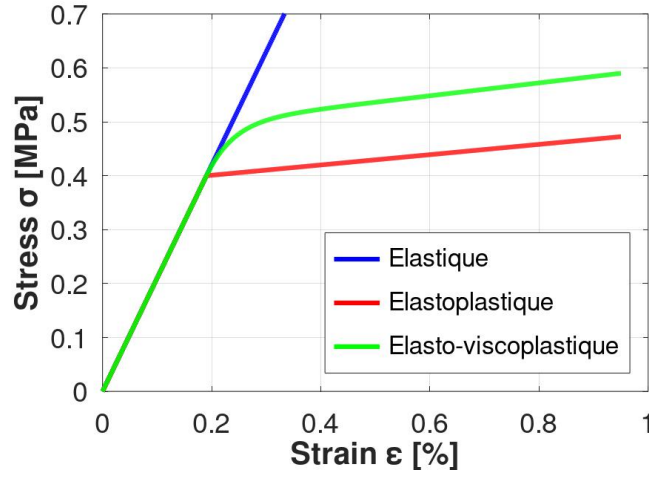


FIGURE 2 – Courbe contrainte-déformation de matériaux élastique (bleu), élastoplastique (rouge) et élasto-viscoplastique (vert)

fraction du volume total. Cette quantité de matière est répartie dans  $\Omega$  selon un champ de densité  $\rho$ . En chaque point  $x \in \Omega$ ,  $\rho(x)$  est telle que  $\rho(x) \in [0; 1]$ . En pratique, on définit  $\rho_{\min} \ll 1$  mais non nulle pour assurer la stabilité du calcul aux éléments finis.

En pratique, ce type d'optimisation est réalisé dans un logiciel de calcul aux éléments finis. Le domaine est alors divisé en pixels auxquels sont associés des densités (ou en voxels dans le cas de la 3D), et qui correspondent au maillage du domaine. Le maillage doit donc être suffisamment fin pour permettre de voir émerger la forme optimisée.

Dans notre cas, on veut minimiser l'énergie élastique  $J(\rho)$  sur l'ensemble du domaine. L'énoncé du problème d'optimisation est donc le suivant :

- Minimiser l'énergie de déformation élastique au pas de temps final  $t_f$

$$J(\rho) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(t_f) \mathbb{S}(\rho) : \boldsymbol{\sigma}(t_f) \quad (6)$$

- soumis à :

$$\circ \int_{\Omega} \rho(x) dx - V_{\text{ref}} = 0 \quad (7)$$

$$\circ \forall x \in \Omega, \rho_{\min} \leq \rho \leq 1 \quad (8)$$

L'Eq. (6) correspond à la formule de l'énergie élastique, calculée au temps final  $t_f$  (car le comportement du matériau élasto-viscoplastique est dépendant du temps et nécessite donc un calcul itératif). La dépendance de la matrice de compliance  $\mathbb{S}$  par rapport à la densité  $\rho$  est développée dans la sous-section suivante. L'Eq. (7) correspond à la contrainte en volume maximal à disposition, et l'Eq. (8) indique une densité entre  $\rho_{\min}$  et 1 comme explicité ci-dessus.

### 3.2 Méthode SIMP

Dans cette étude, la méthode utilisée pour l'optimisation est la méthode SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*). Cette méthode permet en particulier de converger vers un résultat optimisé composé uniquement de pixels "0" ou "1". En effet, une densité intermédiaire correspondrait à un matériau n'ayant qu'une fraction de la densité réelle du matériau étudié, ce qui n'a pas de sens physiquement. Un résultat "0-1" permet la réalisation de la pièce physique, avec des vides là où la densité  $\rho(x)$  est nulle et de la matière là où elle est unitaire (par exemple par découpe laser, impression 3D ou moulage).

Dans le cas de la méthode SIMP, une pénalisation est appliquée au module de Young du matériau selon la formule suivante :

$$E(x) = \rho(x)^p E_0 \quad (9)$$

Dans l'Eq. (9),  $E_0$  est le module de Young du matériau considéré, et  $p$  le facteur de pénalisation ( $p > 3$  pour assurer la convergence). Ainsi, les densités intermédiaires sont pénalisées (dans le sens où elles ne sont pas "rentables") par rapport aux densités extrémales "0" et "1".

### 3.3 Calcul de la sensibilité

Pour la mise à jour de la topologie à chaque itération (explicitée dans la sous-section suivante), la sensibilité de l'énergie élastique  $J$  par rapport à la densité  $\rho$  doit être évaluée. Dans la suite, on appelle  $\delta a$  les champs correspondant à des dérivées partielles par rapport à la densité :  $\delta a = \frac{\partial a}{\partial \rho}$ . En particulier, on obtient, avec la symétrie de  $\mathbb{S}$  :

$$(6) \Rightarrow \delta J = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma(t_f) \delta \mathbb{S}(\rho) : \sigma(t_f) + \int_{\Omega} \delta \sigma(t_f) \mathbb{S}(\rho) : \sigma(t_f) \quad (10)$$

L'Eq. (10) n'est pas utilisable en pratique, car  $\delta \sigma$  dépend implicitement de  $\delta \mathbb{S}$  :  $\delta \sigma = \delta \sigma(\delta \mathbb{S})$ .

Pour la suite, on définit :

- CA l'ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles (i.e. qui satisfont aux conditions cinématiques : équations de compatibilité et conditions aux limites de Dirichlet).
- CA0 l'ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles, et pour lesquels  $\mathbf{u} = 0$  sur  $\partial \Omega_u$ .
- SA l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles (i.e. qui satisfont aux conditions statiques : équation d'équilibre et conditions aux limites de Neumann).
- SA0 l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles, et pour lesquels  $\sigma \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial \Omega_T$ .

On introduit l'état de réponse élastique  $\{\mathbf{u}^E, \sigma^E\}$  correspondant à un champ de contraintes  $\sigma^E$  SA(t), et un champ de déplacements  $\mathbf{u}^E$  CA0(t), liés par la loi de comportement :

$$\varepsilon^E = \mathbb{S} : \sigma^E \quad (11)$$

On considère dans la suite un potentiel de dissipation viscoplastique  $\Xi_v$ , tel que l'Eq. (5) est respectée.  $\Xi_v(\sigma)$  est différentiable.

On définit un état adjoint  $(\sigma^*, \mathbf{u}^*)$ , tel que  $\sigma^*(t)$  est SA0,  $\mathbf{u}^*(t)$  est CA0 à tout temps  $t$ , et :

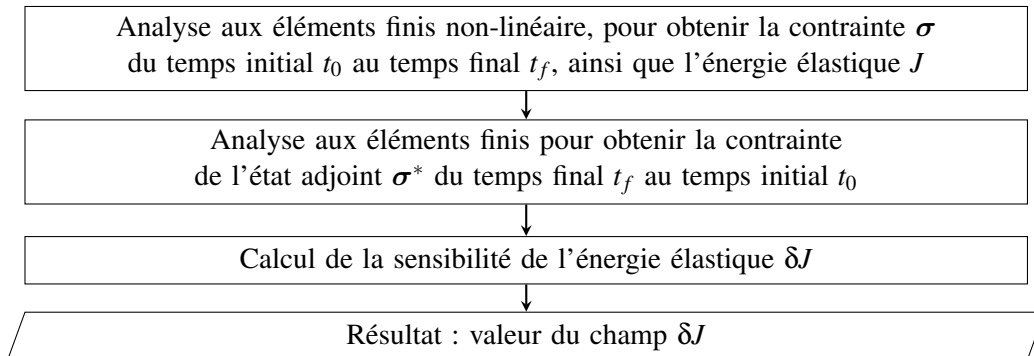
$$\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^*) = \mathbb{S}(\rho) : \dot{\sigma}^* - \Xi''(\sigma) \sigma^* \quad (12)$$

On choisit  $\sigma^*(t_f) = \sigma^R(t_f)$ . Après calcul, on obtient :

$$\delta J = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma(t_f) \delta \mathbb{S}(\rho) : \sigma(t_f) - \int_{\Omega} \sigma(0) \delta \mathbb{S}(\rho) : \sigma^*(0) - \int_t \int_{\Omega} \sigma^*(t) \delta \mathbb{S}(\rho) : \dot{\sigma}(t) \quad (13)$$

$\delta \mathbb{S}$  est facilement calculable à partir de l'Eq. (9).

Pour le calcul de  $\delta J$ , on calcule donc d'abord l'historique de  $\sigma(t)$  du temps initial  $t_0$  au temps final  $t_f$ . On calcule ensuite  $\sigma^*(t_f) = \sigma(t_f) - \sigma^E(t_f)$ . L'historique de  $\sigma^*(t)$  est ensuite obtenu par récurrence en partant du temps final  $t_f$  jusqu'au temps initial  $t_0$ . Ce calcul est résumé dans le diagramme bloc ci-dessous.



### 3.4 Algorithme

L'algorithme d'optimisation développé s'inspire de celui présenté dans [1] pour la méthode SIMP. L'opération de filtrage s'effectue sur la sensibilité à l'aide d'une équation de diffusion comme présenté dans [5]. Un tel filtrage est plus adapté au logiciel de résolution numérique d'équations différentielles par éléments finis qui sera utilisé dans la suite. Le calcul de la sensibilité de l'énergie élastique  $\delta J$  reprend le diagramme bloc ci-dessus.

## 4 Implémentation et résultats

L'algorithme présenté à la section précédente est implémenté dans le logiciel de résolution numérique d'équations aux dérivées partielles par éléments finis FreeFEM++. Cette implémentation est en partie basée sur [5], qui présente un cas d'optimisation topologique sur FreeFEM basé sur la méthode SIMP.

### 4.1 Cas d'étude

L'exemple présenté est un domaine rectangulaire (1x2 mètres), comme montré en Fig. 3. Il considère les conditions aux limites suivantes :

- sur la surface  $\partial\Omega_T$ , un chargement vertical  $\sigma_v$ , avec  $\sigma_v = 16.3$  MPa dans le cas purement élastique, et  $\sigma_v = 81.5$  MPa dans le cas élasto-viscoplastique
- sur la surface  $\partial\Omega_u$ , un encastrement horizontal :  $u(x) = 0$  si  $x \in \partial\Omega_u$
- sur la surface  $\partial\Omega_v$ , un encastrement vertical :  $v(x) = 0$  si  $v \in \partial\Omega_v$

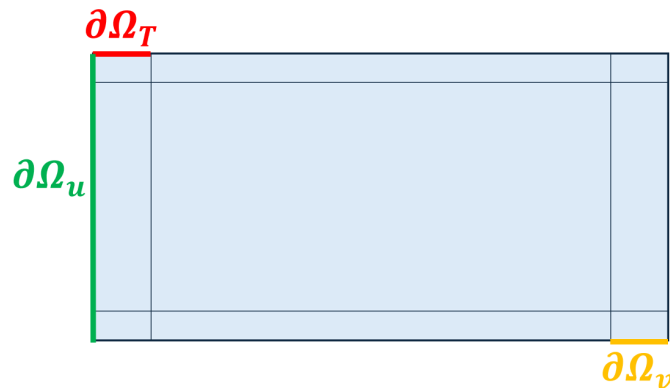


FIGURE 3 – Cas d'étude : domaines et conditions aux limites

Le matériau visco-élasto-plastique possède un module de Young  $E = 70$  GPa, un ratio de Poisson  $\nu = 0.33$ , une limite élastique  $\sigma_y = 100$  MPa, et des paramètres de viscoplasticité de Perić  $\mu = 25000$  et  $n = 1$  (modèle linéaire dit de Bingham). Le modèle itératif élasto-viscoplastique considère 5 pas de temps (la convergence a été vérifiée en comparant le résultat avec un modèle prenant en compte 60 pas de temps). Le pas de temps vaut  $t_f = 2.5$  ms.

L'optimisation utilise une quantité de matière  $V_{\text{ref}} = 40\%$ , un seuil de tolérance  $\text{tol} = 0.0005$ , une diffusivité  $\alpha = 0.001$  pour l'opération de filtrage, et limite d'itérations  $I_{\text{max}} = 200$ .

### 4.2 Résultats

On procède ensuite à l'optimisation, dans un cas purement élastique, et dans le cas élasto-viscoplastique. Les structures obtenues sont reportées en Fig. 4. On constate que les deux structures (a) et (b) sont différentes, d'où l'importance de prendre en compte le comportement élasto-viscoplastique des structures lors de l'optimisation. La Fig. 5 montre la convergence de l'énergie élastique vers sa valeur finale, et du changement de la topologie jusqu'au seuil de tolérance.

Les deux structures obtenues en Fig. 4 sont ensuite soumises au chargement  $\sigma_v = 81.5$  MPa (cas élasto-viscoplastique) afin de calculer l'énergie élastique de ces structures. La structure obtenue par optimisa-

tion purement élastique donne une énergie élastique  $J_{el} = 58.15$  mJ, et la structure obtenue par optimisation élasto-viscoplastique donne une énergie élastique  $J_{vp} = 53.50$  mJ. L'algorithme développé offre donc dans ce cas une amélioration de 8.0% de l'énergie élastique de la structure.

Le temps de calcul est de 19 minutes pour la structure visco-élastoplastique (Intel Core i5, 3.20GHz, 16Go RAM). Le temps de calcul pourrait être amélioré en augmentant les performances machine, ou en changeant de logiciel de calcul.

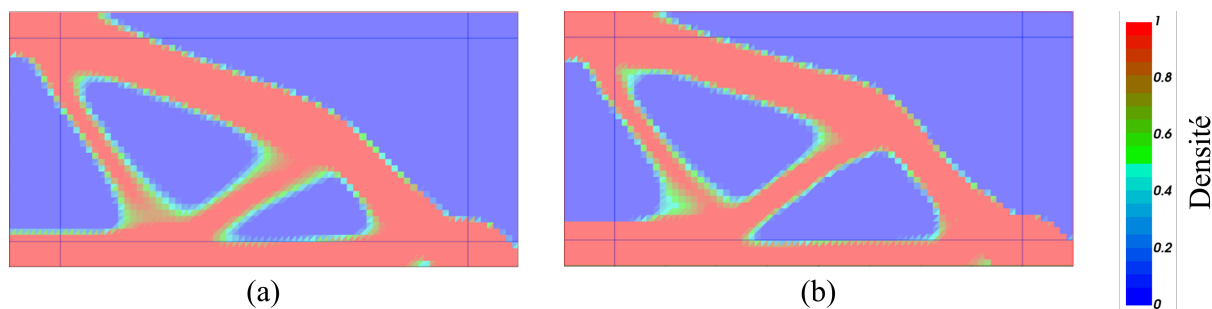


FIGURE 4 – Structure optimisée : (a) cas élastique, (b) cas élasto-viscoplastique

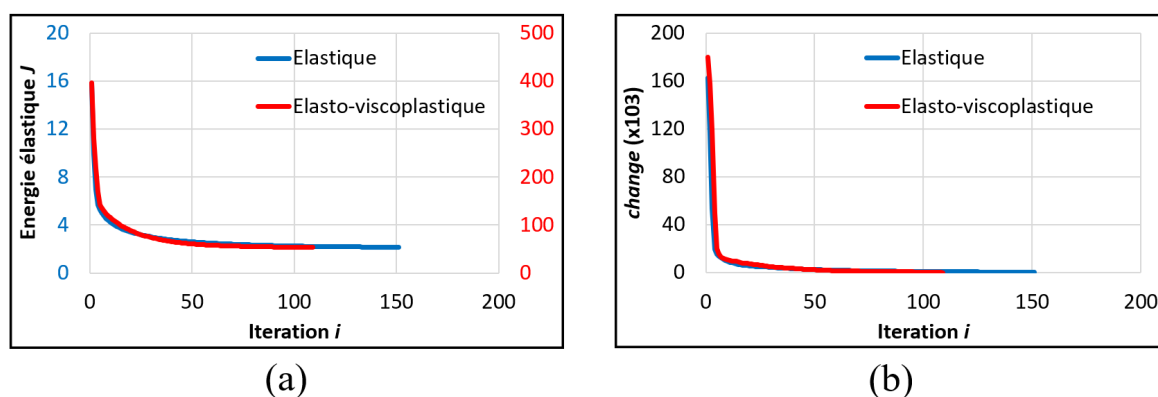


FIGURE 5 – Convergence de l'algorithme : (a) énergie élastique, (b) changement de topologie

## 5 Conclusion et perspectives

Cette étude présente un algorithme d'optimisation topologique pour la minimisation de l'énergie élastique des matériaux élasto-viscoplastiques. Le calcul de la sensibilité, point-clé de l'optimisation, est réalisé analytiquement par une méthode d'état adjoint, limitant ainsi les approximations par différences finies de cette valeur. Un exemple montre une structure élasto-viscoplastique optimisée selon cette méthode, implémentée dans un logiciel de calculs aux éléments finis.

Une prochaine étude basée sur cette même méthode considérera l'optimisation topologique des alliages à mémoire de forme, des matériaux intelligents ayant la capacité de reprendre leur forme initiale après avoir subi des déformations thermo-mécaniques de grande ampleur.

## 6 Mention spécifique

Ce projet est cofinancé par l'Union européenne dans le cadre du programme Horizon Europe, Actions Marie Skłodowska-Curie, appel COFUND-2022, et au titre de la convention de subvention numéro 101126720.

## Références

- [1] M.P. Bendsøe, O. Sigmund. *Topology Optimization : Theory, Methods and Applications*, Springer, 2004.

- [2] X. Li, X. Zhang, T. Zhang. *Three-dimensional plasticity-based topology optimization with smoothed finite element analysis*, Computational Mechanics, Springer 73 :533-548, 2023.
- [3] E.A. de Souza Neto, D. Perić, D.R.J. Owen. *Computational Methods for Plasticity : Theory and Applications*, Wiley, 2008.
- [4] D. Perić. *On a class of constitutive equations in viscoplasticity : Formulation and computational issues*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 36 :1365-1393, 1993.
- [5] B. Zhu, X. Zhang, H. Li, J. Liang, R. Wang, H. Li, S. Nishiwaki. *An 89-line code for geometrically nonlinear topology optimization written in FreeFEM*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer, 63 :1015-1027, 2021.