

# Critères d'optimisation multiobjectif avec incertitudes: de la robustesse à la comparaison de scénarios

V. Trappler<sup>1</sup>, R. Le Riche<sup>2</sup>, K. Taurines<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Mines Saint-Étienne, LIMOS, Saint-Étienne, victor.trappler@emse.fr

<sup>2</sup> LIMOS, Aubière, leriche@emse.fr

<sup>3</sup> LIMOS, Aubière, kevin.taurines@uca.fr

**Résumé** — De nombreux problèmes de prise de décision impliquent la résolution d'un problème d'optimisation multiobjectif, dont les solutions forment l'ensemble de Pareto. En présence d'incertitudes épistémiques inconnues au moment de la fabrication du produit ou système, plutôt que d'utiliser directement des statistiques liées aux objectifs, nous proposons de comparer les designs à paramètres incertains fixés. Ceci permet de définir des quantités statistiques directement liées à la performance des variables de contrôle telle qu'elle adviendra quand les incertitudes seront réalisées.

**Mots clés** — Optimisation multiobjectif; Optimisation en présence d'incertitudes; Processus Gaussiens

## 1 Formulation du problème d'optimisation multiobjectif sous incertitudes

Dans de nombreux domaines des sciences de l'ingénieur, la modélisation et les simulations permettent de comparer quantitativement différents jeux de paramètres, et ainsi de laisser le preneur de décision choisir les valeurs des paramètres permettant d'atteindre des performances optimales. D'un point de vue mathématique, trouver un jeu de paramètres adéquats nécessite de résoudre un problème d'optimisation, où l'on va donc chercher le ou les designs permettant d'atteindre les performances optimales (formulées comme les minima d'une fonction coût).

Lorsque plusieurs objectifs sont considérés de manière simultanée, le décideur peut adopter différentes méthodes afin de prendre sa décision. L'approche générale est de chercher puis considérer l'ensemble des meilleurs compromis possibles, ce qui constitue le front de Pareto  $\mathcal{P}^*$ . Son image réciproque, l'ensemble des designs permettant d'atteindre ces meilleurs compromis, est appelé l'ensemble de Pareto  $\mathcal{P}_X^*$ . Ces deux quantités peuvent être vues comme les équivalents multiobjectif de l'optimum et de l'optimiseur. Ceci est illustré sur la Figure 1 pour un problème où l'on cherche à minimiser deux objectifs simultanément.

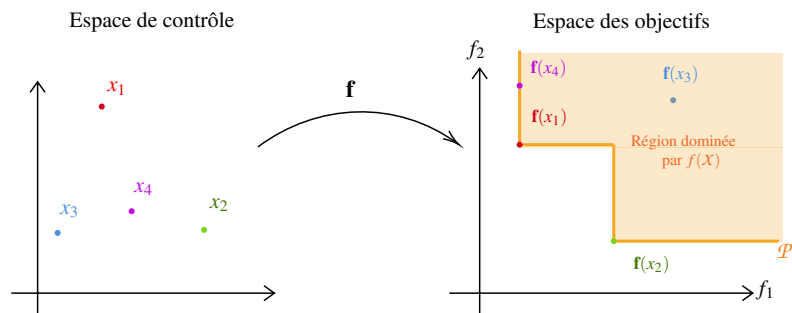


FIGURE 1 – Exemple de front de Pareto et d'ensemble de Pareto pour une fonction  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Cependant, dans de nombreux problèmes réalistes, les fonctions objectifs dépendent non seulement des paramètres de contrôle, que l'on notera  $x$ , mais aussi des variables dites environnementales, qui peuvent représenter des incertitudes dans la modélisation.

Dans ce cas, nous pouvons définir la fonction multiobjectif en présence d'incertitudes comme

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \mathcal{X} \times \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (x, u) &\longmapsto \mathbf{f}(x, u) = (f_1(x, u), \dots, f_d(x, u)) \end{aligned} \quad (1)$$

où chacune des composantes du vecteur  $\mathbf{f}(x, u)$  correspond à un objectif que l'on va chercher à minimiser,  $x \in \mathcal{X}$  est le vecteur des paramètres de contrôle ou design, et  $u \in \mathcal{U}$  représente les paramètres incertains, ou paramètres environnementaux. On va faire l'hypothèse que ces paramètres incertains sont modélisés à l'aide d'une variable aléatoire  $U$ , de distribution connue  $p_U$ , et dont le support est inclus dans  $\mathcal{U}$ . Séparer ainsi les variables de contrôle et les variables incertaines a été utilisé surtout lorsque la fonction sous-jacente est complètement déterministe, c'est-à-dire lorsque le choix des variables à évaluer est laissé à l'utilisateur, à l'inverse d'un simulateur stochastique qui ne laisse pas le contrôle des variables incertaines. Cette formulation générique permet de considérer à la fois des problèmes avec des objectifs bruités ( $\mathbf{f}(x, u) = \mathbf{f}_{\text{nominal}}(x) + u$ ), et des problèmes où les paramètres de contrôle sont perturbés ( $\mathbf{f}(x, u) = \mathbf{f}_{\text{nominal}}(x + u)$ ).

Un certain nombre d'approches se basent sur des moments spécifiques de la fonction définie en Eq. (1). Classiquement, afin d'enlever l'aspect aléatoire de la fonction  $\mathbf{f}$ , on peut considérer l'espérance de la fonction multiobjectif  $\mathbb{E}_U[\mathbf{f}(x, U)]$ . Cela donne en effet des fonctions déterministes, que l'on va pouvoir étudier et optimiser afin d'obtenir le front et l'ensemble de Pareto. Cependant, comme illustré sur la Figure 2, considérer l'espérance enlève toute information concernant la covariance entre les différents objectifs. Plus généralement, considérer uniquement des statistiques sur les marginales fait perdre l'information du comportement joint des objectifs : la fonction peut présenter différents comportements en présence d'incertitudes, alors que les marginales sont les mêmes.

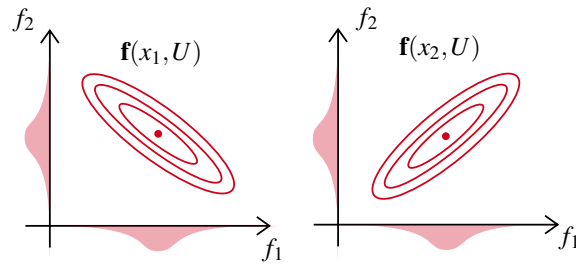


FIGURE 2 – Deux variables de contrôle  $x_1$  et  $x_2$  qui présentent les mêmes performances moyennes, et les mêmes marginales, mais dont le comportement en présence d'incertitudes n'est pas le même du fait de la covariance.

Pour éviter ce potentiel écueil, nous avons plutôt choisi de comparer différents designs, à variable environnementale fixée. Ce choix présente l'autre avantage de mieux correspondre à la réalité de nombreux problèmes de conception sous incertitudes : minimiser  $\mathbb{E}_U[\mathbf{f}(x, U)]$  a du sens lorsque  $U$  représente de nombreux aléas auxquels le système, contrôlé à travers un unique  $x^*$ , sera soumis lors de son utilisation. Mais lorsque qu'une seule ou peu de réalisations de  $U$  jalonneront la vie du système, il est plus pertinent de considérer la performance future de  $x^*$  relativement à d'autres designs. Dans le cas des bâtiments par exemple, le choix d'une rénovation optimale dépend, entre autres, du comportement des occupants. Or, un logement connaît un nombre limité d'occupants.

## 2 Comparaison de solutions en présence d'incertitudes

Dans [4], nous proposons d'utiliser les notions de fronts de Pareto conditionnels, et d'ensembles de Pareto conditionnels, c'est-à-dire que nous considérons les solutions du problème multiobjectif à  $u$  fixé :  $u \mapsto \mathcal{P}^*(u)$  et  $u \mapsto \mathcal{P}_{\mathcal{X}}^*(u)$ . Une illustration de ces notions est présentée sur la Figure 3. Comparer ainsi des solutions du problème multiobjectif à  $u$  donné permet d'extraire plusieurs quantités :

- Étant donné que  $u$  est modélisé comme une variable aléatoire, les fronts et ensembles de Pareto conditionnels peuvent à leur tour être considérés comme des quantités aléatoires. Ainsi, en discrétisant l'espace de contrôle, on peut définir la probabilité de couverture de  $x$  par  $p_{\text{cov}}(x) = \mathbb{P}_U[x \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}^*(U)]$ , comme dans [4].

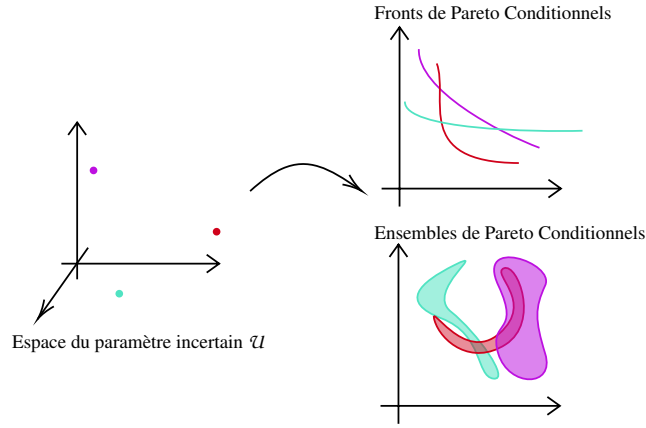


FIGURE 3 – Illustration de fronts de Pareto et d’ensembles de Pareto conditionnels, selon différentes réalisations de la variable incertaine  $u$ .

- Plutôt que de prendre uniquement en compte l’aspect optimal de la solution et de calculer cette probabilité, on peut aussi considérer une notion de distance au front de Pareto, ce qui peut s’écrire à l’aide du rang de Pareto par exemple, puis moyenné comme dans [2]. Le rang de Pareto, introduit dans un contexte d’algorithme génétique [1] est défini de manière récursive. À  $u \in \mathcal{U}$  fixé, on évalue la réponse  $\mathbf{f}(\mathcal{X}, u)$  pour un ensemble fini de candidats  $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$ . L’ensemble des points de rang 0, noté  $\mathcal{R}_0(u)$  est l’ensemble de Pareto. L’ensemble des points de rang 1, noté  $\mathcal{R}_1(u)$ , représente les points non-dominés une fois ceux du rang 0 enlevé, et ainsi de suite :

$$x \in \mathcal{R}_0(u) \iff x \in \{x' \text{ tel que } \mathbf{f}(x', u) \in \text{non-dom}(\mathbf{f}(\mathcal{X}, u))\} = \mathcal{P}_{\mathcal{X}}^*(u) \quad (2)$$

$$x \in \mathcal{R}_1(u) \iff x \in \{x' \text{ tel que } \mathbf{f}(x', u) \in \text{non-dom}(\mathbf{f}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{R}_0, u))\} \quad (3)$$

⋮

$$x \in \mathcal{R}_i(u) \iff x \in \{x' \text{ tel que } \mathbf{f}(x', u) \in \text{non-dom}(\mathbf{f}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{R}_{i-1}, u))\} \quad (4)$$

- Enfin, un autre aspect exploré est l’utilisation d’une mesure de qualité de la solution comme l’hypervolume de la région dominée. Cela permet de considérer directement un jeu de  $m$  points qui optimisent l’hypervolume moyen (voir Eq. 5), au prix d’une optimisation en dimension  $m \times \dim \mathcal{X}$  :

$$\max_{\mathcal{X} \in \mathcal{X}^m} \mathbb{E}_{\mathcal{U}} [\text{HV}(\mathbf{f}(\mathcal{X}, U))] \quad (5)$$

Les points dominés ne contribuant pas à l’hypervolume, les gradients calculés peuvent souvent être nuls. Nous utilisons donc la notion d’UHV (Uncrowded Hypervolume) [3] afin de réaliser cette optimisation, définit comme l’Hypervolume pénalisé par la distance entre les points dominés et l’approximation du front de Pareto actuelle :

$$\text{UHV}(\mathcal{X}, u) = \text{HV}(\mathbf{f}(\mathcal{X}, u)) - \lambda \sum_{x \in \mathcal{X}} \inf_{p_u \in \text{non-dom}(\mathbf{f}(\mathcal{X}, u))} \|\mathbf{f}(x, u) - p_u\|^2 \quad (6)$$

Ces quantités sont représentées sur la Figure 4.

En pratique, résoudre un problème d’optimisation multiobjectif de manière numérique peut être très coûteux, car cela nécessite un grand nombre d’appels à la fonction vectorielle  $\mathbf{f}$ . De plus, en présence d’incertitudes, on se base habituellement sur des échantillons du paramètre incertain, et donc de nombreux appels supplémentaires sont requis afin d’estimer les différentes quantités d’intérêt comme l’espérance ou la probabilité de couverture par exemple. Nous proposons ainsi d’utiliser des modèles de substitution, afin de pouvoir réaliser les procédures coûteuses sur ces modèles approchés. Cependant, cela nécessite à son tour une attention particulière à la construction de ces métamodèles, car ceux-ci doivent être assez précis dans les régions d’intérêt, qui ne sont donc pas connues a priori.

C’est pourquoi nous utilisons des Processus Gaussiens afin de métamodéliser la fonction potentiellement coûteuse  $\mathbf{f}$  à partir d’un plan d’expérience de taille réduite. Il faut alors réaliser une procédure d’Apprentissage Actif : à l’aide de méthodes issues de l’optimisation dite Bayésienne, nous pouvons ajouter

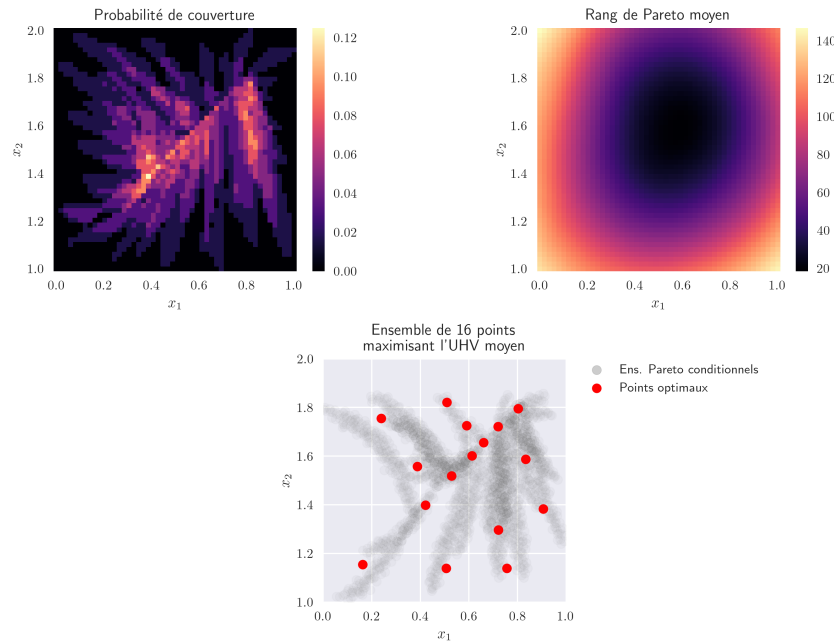


FIGURE 4 – Exemples de quantités d’intérêt liées au problème d’optimisation multiobjectif sous incertitudes pour une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

séquentiellement des points à ce plan d’expérience dans un objectif d’amélioration de l’estimation des quantités d’intérêt définies plus haut. Le métamodèle peut ensuite être utilisé de manière intensive pour calculer les quantités statistiques et ainsi aider à guider la prise de décision.

### 3 Application à la conception et à la rénovation de bâtiments

Prendre des décisions concernant la conception ou la rénovation de bâtiments est un problème complexe, qui fait intervenir différents objectifs. Le choix d’une action de rénovation ou de conception dépend de plusieurs critères économiques et/ou environnementaux : le coût économique de la rénovation et de l’utilisation du bâtiment, le confort thermique des habitants du bâtiment, et l’impact environnemental des solutions de rénovation retenues. Une difficulté supplémentaire tient dans la nature des variables à optimiser, certaines pouvant être discrètes, comme le choix d’un matériau au sein d’un catalogue que l’on va appliquer sur un ou plusieurs murs, tandis que d’autres sont continues, comme les différentes températures de consignes.

Les problématiques de rénovation de bâtiments dépendent de facteurs externes non contrôlés qui peuvent apparaître à différents horizons temporels. Par exemple, le comportement individuel de chaque occupant affecte les performances énergétiques du bâtiment en les faisant dévier des valeurs nominales. De plus, un des objectifs considérés est un coût financier qui dépend d’indicateurs économiques futurs comme le prix de l’énergie, l’inflation, ou encore le prix des matières premières. Enfin, les données climatiques utilisées pour réaliser des simulations sont bien souvent basées sur des relevés historiques, et la définition d’une année “typique”. Dans un contexte de changement climatique, ces données peuvent ne pas représenter les conditions d’utilisation du bâtiment dans le futur.

Nos expériences numériques, comme celles représentées sur la Figure 5, montrent que la prise en compte des incertitudes permet d’obtenir des solutions optimales différentes de celles obtenues dans un cadre déterministe.

### Références

- [1] Carlos M. Fonseca and Peter J. Fleming. Genetic algorithms for multiobjective optimization : Formulation discussion and generalization. In *Proceedings of the 5th International Conference on Genetic Algorithms*, page 416–423, San Francisco, CA, USA, 1993. Morgan Kaufmann Publishers Inc.

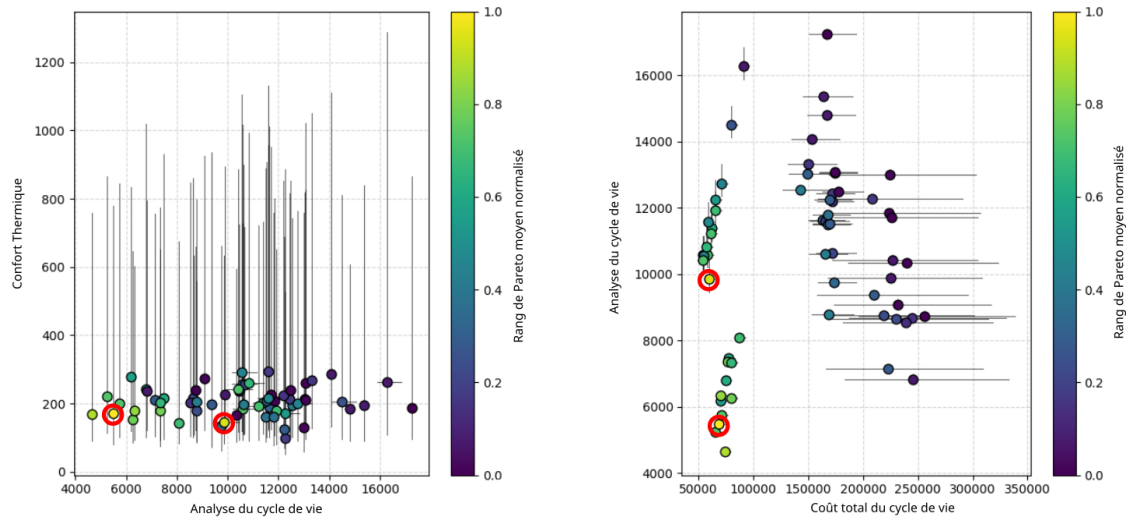


FIGURE 5 – Objectifs associés au confort thermique, à l’impact environnemental du cycle de vie, et au coût économique global, en présence d’incertitudes. Les solutions entourées de rouge sont celles présentant le meilleur rang de Pareto moyen.

- [2] Kevin Taurines, Rodolphe Le Riche, Boris Brangeon, and Maxime Doya. Multiobjective Optimization With Uncertainties and Discrete Meta-Variables : The Case Of Building Energy Refurbishment. In *Math to Product (M2P)*, Valence, Spain, June 2025.
- [3] Cheikh Touré, Nikolaus Hansen, Anne Auger, and Dimo Brockhoff. Uncrowded hypervolume improvement : COMO-CMA-ES and the sofomore framework. In *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference, GECCO '19*, pages 638–646, New York, NY, USA, July 2019. Association for Computing Machinery.
- [4] Victor Trappler, Céline Helbert, and Rodolphe Le Riche. Multiobjective Optimization under Uncertainties using Conditional Pareto Fronts, 2025.