

Optimisation robuste avec contraintes de fiabilité – Application au contrôle passif du flottement aéroélastique

N. Razaaly¹, B. Chouvion²

¹ ISAE-ENSMA, Chasseneuil-du-Poitou, France

² Centre de Recherche de l'École de l'Air (CREA), Ecole de l'air et de l'espace, F-13661 Salon-de-Provence

Résumé — Ce travail présente une méthodologie d'optimisation robuste sous incertitudes formulée sur la minimisation de quantiles, reposant sur une métamodélisation de type Krigeage effectuée dans l'espace d'entrée *couplé* et un échantillonnage adaptatif parcimonieux. L'application principale concerne la conception robuste d'un absorbeur non linéaire destiné à réduire l'instabilité de flottement d'un profil d'aile bidimensionnel. Les résultats démontrent l'efficacité de la méthode avec un nombre d'évaluations du solveur numérique très réduit.

Mots clés — Optimisation sous incertitudes, Processus gaussiens, Absorbeur non linéaire, Flottement

1 Introduction

La conception de systèmes structuraux peut être sensiblement améliorée avec la prise en compte des sources d'incertitudes, inhérentes par exemple aux paramètres de conception, aux conditions de chargement ou aux propriétés des matériaux. Dans ce contexte, l'optimisation sous incertitudes vise à obtenir des solutions performantes et sûres même en présence de variabilité ou d'imprécision. Il existe différentes méthodes pour formuler un problème d'optimisation sous incertitudes d'un système mécanique, dans lequel certaines sorties scalaires correspondent aux composantes de la fonction objective à minimiser.

Une approche classique consistera à minimiser la valeur moyenne (μ) d'une grandeur d'intérêt, mais celle-ci offre un contrôle limité sur la variabilité des performances. Pour dépasser cette limitation, plusieurs stratégies majeures ont émergé. On peut notamment citer les méthodes *moyenne-variance*, consistant à optimiser une combinaison linéaire de la moyenne et de l'écart-type (σ), ou à minimiser simultanément ces deux quantités dans un cadre multi-objectif [7], également connu sous le nom de méthode de Taguchi. Cependant, dans ce type d'approches, l'estimation des statistiques d'ordre deux induit un coût de calcul supplémentaire, d'autant plus si une évaluation du solveur numérique sous-jacent est coûteuse en ressources computationnelles. Une autre classe de méthodes est basée sur la minimisation d'un quantile [6, 8] (e.g. 95%), mettant l'accent sur les performances sous la plupart des conditions, au détriment des pires cas.

Enfin, d'autres approches cherchent à combiner coût et fiabilité du système, donnant naissance à l'optimisation fiabiliste (*Reliability-Based Design Optimization*, RBDO). La formulation la plus courante consiste à minimiser un coût déterministe sous contraintes *de fiabilité* [5] :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}} f(\mathbf{d}), \quad \text{sous les contraintes :} \\ \mathbb{P}(g_k(\mathbf{X}(\mathbf{d}), \mathbf{Z}) \leq 0) \leq \alpha_{g_k}, \quad k = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (1)$$

où f est la fonction coût dépendant du vecteur de conception $\mathbf{d} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{d_x}$, et où g_k désigne les fonctions de contrainte, également appelées *fonctions d'état-limite* (ou *Limit State Function*, LSF). En étude de fiabilité, une valeur négative de ces dernières correspond à une défaillance. Celles-ci dépendent d'un vecteur aléatoire composé :

- des *variables de conception aléatoires* $\mathbf{X} \sim \mathcal{P}_{\mathbf{X}(\cdot; \mathbf{d})}$, notées $\mathbf{X}(\mathbf{d})$ dans la suite, où $\mathcal{P}_{\mathbf{X}(\cdot; \mathbf{d})}$ désigne la loi de probabilité de \mathbf{X} paramétrée par le vecteur de conception \mathbf{d} ;
- des variables aléatoires *environnementales* $\mathbf{Z} \sim \mathcal{P}_{\mathbf{Z}}$, non contrôlées mais influençant les états-limites.

Dans l'Eq. (1), l'opérateur \mathbb{P} désigne la probabilité induite par le couple $(\mathbf{X}(\mathbf{d}), \mathbf{Z})$. La particularité de la RBDO réside dans le fait que les contraintes s'expriment en termes de probabilités de défaillance, lesquelles doivent rester inférieures à un seuil prescrit $\alpha_{g_k} \in]0, 1[$.

Dans le travail présenté ici, ces contraintes probabilistes (Eq. (1)) sont remplacées par des contraintes basées sur des quantiles [5], tandis que la fonction coût est reformulée via un objectif basé également sur un quantile [6, 8] :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}} \quad & Q_{\alpha_f}[f(\mathbf{X}(\mathbf{d}), \mathbf{Z})], \quad \text{sous les contraintes :} \\ & Q_{\alpha_{g_k}}[g_k(\mathbf{X}(\mathbf{d}), \mathbf{Z})] \leq 0, \quad k = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (2)$$

où $Q_{\alpha_{g_k}}[\cdot]$ désigne le quantile d'ordre α_{g_k} , et α_f le quantile associé à l'objectif.

Cette formulation est motivée par deux arguments principaux :

- L'estimation de quantiles est étroitement liée à l'analyse de fiabilité, où l'échantillonnage adaptatif se concentre sur la frontière de classification définie par l'état-limite. Le modèle de substitution n'a donc besoin d'être précis qu'à proximité du quantile visé [5], réduisant significativement le nombre d'évaluations, par rapport à une formulation moyenne-variance exigeant une précision globale.
- Les contraintes et objectifs exprimés sous forme de quantiles s'alignent naturellement avec les spécifications industrielles habituelles.

L'approche d'optimisation robuste sous contraintes de fiabilité développée dans cette étude sera appliquée au dimensionnement optimal d'un absorbeur non linéaire destiné au contrôle passif du flottement aéroélastique. Des travaux antérieurs [4] ont en effet démontré la forte sensibilité de la performance de tels dispositifs à certains paramètres clés, ce qui a motivé le développement de cette méthodologie originale prenant explicitement en compte des variables de conception potentiellement aléatoires et intégrant simultanément des contraintes de fiabilité sous forme de quantile. À la connaissance des auteurs, une telle approche n'a pas encore été proposée dans la littérature. Pour en garantir l'efficacité numérique, la méthode repose sur la construction d'un métamodèle global défini dans l'espace couplé (variables de conception et variables aléatoires), au prix toutefois d'une limitation raisonnable de la dimensionnalité des espaces de conception et stochastique.

2 Méthodologie numérique pour l'optimisation basée sur les quantiles

Cette section décrit la méthodologie développée pour résoudre le problème d'optimisation proposé (Eq. (2)). Tout d'abord les notations et les hypothèses adoptées concernant les vecteurs d'entrée des simulateurs numériques sont introduites. Nous présentons ensuite les principes de l'optimisation déterministe assistée par métamodélisation, ainsi que les outils d'analyse de fiabilité reposant sur des modèles de type processus gaussien, qui constituent les briques fondamentales de l'approche proposée.

2.1 Espace d'entrée et modélisation probabiliste

Les deux sources d'incertitudes sont regroupées dans un vecteur aléatoire de dimension d_θ , $\theta(\mathbf{d}) = (\mathbf{X}(\mathbf{d}), \mathbf{Z})$, dont une réalisation est notée (\mathbf{x}, \mathbf{z}) . Pour alléger la notation, ce vecteur aléatoire (ou l'une de ses réalisations) sera simplement désigné par $\theta(\mathbf{d})$ dans la suite. Les fonctions objectif f et contraintes g_k sont définies sur l'espace d'entrée Ω et proviennent de solveurs numériques supposés coûteux, traités comme des modèles déterministes en boîte noire. On note $\theta = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \Omega = \Omega_x \times \Omega_z \subset \mathbb{R}^{d_\theta}$, où $\mathcal{D} \subset \Omega_x \subset \mathbb{R}^{d_x}$ est l'espace des variables de conception et $\Omega_z \subset \mathbb{R}^{d_z}$ celui des variables environnementales.

La méthode proposée nécessite un échantillonneur cohérent avec l'espace physique d'entrée. Pour faciliter la présentation de l'algorithme utilisé, nous faisons toutefois les hypothèses supplémentaires suivantes :

- Les espaces d'entrée et de conception sont supposés tensorisés : $\Omega = \prod_{i=1}^{d_\theta} [\theta_{min}^{(i)}, \theta_{max}^{(i)}]$, $\mathcal{D} = \prod_{i=1}^{d_x} [d_{min}^{(i)}, d_{max}^{(i)}]$, où \prod désigne le produit cartésien des intervalles.
- Les composantes du vecteur aléatoire sont supposées indépendantes, suivant des lois univariées (uniformes, gaussiennes ou gaussiennes tronquées). Par exemple : $X^{(i)}(d^{(i)}) \sim \mathcal{N}(d^{(i)}, \sigma_x^{2(i)})$.

- Pour garantir que chaque échantillon $\theta(\mathbf{d})$ prend ses valeurs dans l'espace admissible Ω , une opération de *projection* est appliquée : ceci signifie que toute composante sortant des bornes est ramenée à son intervalle admissible : $\theta^{(i)} \in [\theta_{\min}^{(i)}, \theta_{\max}^{(i)}], \forall i$.

2.2 Rappels sur l'optimisation bayésienne et l'analyse de fiabilité par processus gaussiens

Cette section fournit un rappel concis des concepts clés en optimisation assistée par métamodèle et en analyse de fiabilité, tels qu'employés dans ce travail. Pour plus de clarté, un modèle générique scalaire $y = F(\mathbf{x})$ est considéré, où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ désigne un vecteur d'entrée de dimension d .

Métamodélisation par processus gaussiens La métamodélisation (ou apprentissage supervisé) vise à construire un *émulateur rapide* \hat{F} d'une fonction déterministe F , à partir d'un plan d'expériences (Design of Experiment, DoE), ici un ensemble de N couples entrée–sortie $\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_i$, avec $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ et $y_i = F(\mathbf{x}_i)$ désignant respectivement le vecteur d'entrée et la sortie scalaire.

L'approche de Krigeage repose sur l'hypothèse que la fonction F est une réalisation d'un processus gaussien sous-jacent [9]. Ce cadre probabiliste permet de construire, en tout nouveau point \mathbf{x} , un prédicteur $\hat{F}(\mathbf{x})$ dont la distribution a posteriori s'écrit :

$$\hat{F}(\mathbf{x}) \sim \mathcal{N}(\mu_{\hat{F}}(\mathbf{x}), \sigma_{\hat{F}}^2(\mathbf{x})). \quad (3)$$

Les détails du calcul des moyennes et variances prédictives $\mu_{\hat{F}}(\mathbf{x}), \sigma_{\hat{F}}^2(\mathbf{x})$ sont omis mais peuvent être retrouvés dans [9]. Dans ce travail, l'implémentation SMT [10] est utilisée avec un noyau exponentiel-puissance de paramètre $\kappa = 1.9$, en cohérence avec les informations données dans [1].

Analyse de fiabilité basée sur processus gaussiens L'objectif de ce paragraphe est de rappeler comment effectuer l'estimation de la *fiabilité* à l'aide d'un prédicteur de type processus gaussien (Gaussian Process, GP) préalablement construit, en utilisant le *Monte Carlo Sampling* (MCS), et de présenter une stratégie d'apprentissage actif permettant de proposer de nouveaux points d'entrée pour enrichir le DoE, améliorant ainsi la précision de ces estimations. Cette approche suit le cadre présenté dans [11], en supposant la disponibilité d'un prédicteur GP $\hat{F}(\mathbf{x}) \sim \mathcal{N}(\mu_{\hat{F}}(\mathbf{x}), \sigma_{\hat{F}}^2(\mathbf{x}))$ construit à partir d'un DoE \mathcal{D} .

Étant donné un vecteur aléatoire d -dimensionnel \mathbf{X} , le problème consiste à estimer un quantile *modéré* de niveau $\alpha \in]0, 1[$ de $F(\mathbf{X})$, défini comme la valeur réelle q telle que : $\alpha = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}(F(\mathbf{X}) < q)$, où $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ désigne la mesure de probabilité associée à \mathbf{X} . L'évaluation du quantile $q = Q_{\alpha}(F(\mathbf{X}))$ est étroitement liée à l'estimation de la probabilité de défaillance $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(F(\mathbf{X}) < q)$, les deux relevant de l'analyse de fiabilité. Le quantile peut être estimé par la méthode Monte Carlo (MC), en utilisant un grand ensemble de n échantillons indépendants $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ tirés de \mathbf{X} , pour lesquels le modèle F est *directement* évalué. Après tri des sorties par ordre croissant $\{F(\mathbf{x}_1), \dots, F(\mathbf{x}_n)\}$, le quantile est estimé par interpolation linéaire :

$$\hat{q}_{direct} = F(\mathbf{x}_{\hat{l}}) + (\alpha(n-1) + 1 - \hat{l})(F(\mathbf{x}_{\hat{l}+1}) - F(\mathbf{x}_{\hat{l}})), \text{ avec } \hat{l} = \lfloor \alpha(n-1) + 1 \rfloor, \quad (4)$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la partie entière inférieure. Pour réduire le nombre d'évaluations de la fonction F , potentiellement coûteuse, celle-ci est remplacée par le métamodèle GP \hat{F} . La nature stochastique de \hat{F} permet d'estimer à la fois le quantile et ses bornes associées. En utilisant la moyenne prédictive $\mu_{\hat{F}}$ et en triant l'ensemble des réalisations $\{\mu_{\hat{F}}(\mathbf{x}_1), \dots, \mu_{\hat{F}}(\mathbf{x}_n)\}$ par ordre croissant, on obtient une estimation du quantile \hat{q} . Les bornes conservatrices inférieure et supérieure \hat{q}^- et \hat{q}^+ peuvent être calculées en substituant F par $\mu_{\hat{F}} - k_q \sigma_{\hat{F}}$ et $\mu_{\hat{F}} + k_q \sigma_{\hat{F}}$, respectivement (avec $k_q = 2$ ici).

Afin d'améliorer la précision de \hat{F} dans la zone où $\mu_{\hat{F}} = \hat{q}$, diverses fonctions d'apprentissage ont été proposées, dont la *U-function* [2] définie par :

$$U(\mathbf{x}) = \left| \frac{\mu_{\hat{F}}(\mathbf{x}) - \hat{q}}{\sigma_{\hat{F}}(\mathbf{x})} \right|. \quad (5)$$

Cette fonction est définie de sorte que $\Phi(U(\mathbf{x}))$ représente la probabilité que le point \mathbf{x} soit *correctement classé* selon le signe de la LSF $\mu_{\hat{F}}(\mathbf{x}) - \hat{q}$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard. Les minima de U correspondent donc aux points les plus susceptibles d'être mal classés, et constituent des bons candidats à ajouter au DoE :

$$\mathbf{x}^* = \underset{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}{\operatorname{arg\,min}} U(\mathbf{x}).$$

Optimisation bayésienne Ce paragraphe rappelle les principes fondamentaux de l’optimisation bayésienne (Bayesian Optimization, BO) pour résoudre des problèmes mono-objectifs sous contraintes, avec des fonctions déterministes, écrits sous la forme :

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d} F(\mathbf{x}), \quad \text{sous les contraintes } G_k(\mathbf{x}) < 0, \quad k = 1, \dots, p, \quad (6)$$

où \mathcal{X} est l’espace de conception, F la fonction objectif et G_k les fonctions de contrainte.

Cette approche utilise des métamodèles de type GP \hat{F}, \hat{G}_k construits à partir d’un DoE initial, et résout (6) par un processus itératif mettant à jour le DoE. Les vecteurs sont proposés par optimisation de *fonctions d’acquisition*, qui ne requièrent que des évaluations de métamodèle. Différents critères sans contrainte sont considérés : MSP, LCB, EI, PI, sEI et WB2 [3]. Cela conduit à résoudre :

$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \hat{A}(\mathbf{x})$, où \hat{A} désigne l’une des fonctions d’acquisition associées à ces critères (voir plus de détails dans [1, 3]).

Ce problème d’optimisation globale est résolu ici à l’aide de l’algorithme local Sequential Least Squares Programming (SLSQP), mis en œuvre via la fonction `scipy.optimize.minimize`, avec des redémarrages multiples à partir de designs initiaux choisis aléatoirement afin d’éviter les bassins d’attraction des minima locaux.

Pour la prise en compte des contraintes, une approche classique consiste à utiliser la moyenne prédictive des métamodèles de contraintes :

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \hat{A}(\mathbf{x}), \quad \text{sous les contraintes } \mu_{\hat{G}_k(\mathbf{x})} < 0, \quad k = 1, \dots, p. \quad (7)$$

Une alternative est de prendre en compte l’incertitude via la *Probability of Feasibility* (PF) [3], incorporée par multiplication :

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \hat{A}(\mathbf{x}) \widehat{\text{PF}}(\mathbf{x}), \quad \text{avec } \widehat{\text{PF}}(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^p \Phi \left(-\frac{\mu_{\hat{G}_k(\mathbf{x})}}{\sigma_{\hat{G}_k(\mathbf{x})}} \right). \quad (8)$$

Dans ce travail, afin d’exploiter la diversité des stratégies et d’introduire de la stochasticité, une sélection aléatoire des méthodes d’acquisition et de gestion des contraintes est effectuée parmi les alternatives citées ci-dessus. Ces méthodes sont utilisées en pratique pour générer un échantillon de conception destiné à résoudre l’Eq. (6).

2.3 Algorithme proposé

Cette section présente la méthodologie proposée pour résoudre la formulation d’optimisation robuste définie en Eq. (2), à l’aide d’une approche de type *métamodèle en espace couplé*.

Un DoE initial est d’abord généré dans l’espace d’entrée complet en utilisant les simulateurs numériques f et g_k . Ces données servent ensuite à construire les métamodèles \hat{f} et \hat{g}_k . Ces prédicteurs GP, définis sur l’ensemble de l’espace couplé, sont utilisés pour proposer de nouveaux vecteurs d’entrée qui viendront enrichir le DoE, jusqu’à satisfaction d’un critère de convergence. La démarche repose sur la construction de métamodèles de quantile à partir de \hat{f} et \hat{g}_k . La formulation robuste est ainsi transformée en un problème d’optimisation déterministe (Eq. (6)), résolu à l’aide du cadre de l’optimisation bayésienne. Pour associer chaque vecteur de conception à des points dans l’espace complet, la fonction d’apprentissage issue de l’analyse de fiabilité, la U-fonction (Eq. (5)), est exploitée. Ces nouveaux points sont ajoutés au DoE et un test de convergence détermine si l’algorithme s’arrête ou relance une phase de reconstruction du métamodèle. La Figure 1 synthétise le déroulement de l’algorithme.

DoE initial et modèles GP en espace couplé La procédure débute par la génération d’un DoE dans l’espace d’entrée complet. Un ensemble de N_0 vecteurs est échantillonné pseudo-aléatoirement dans $[0, 1]^{d_\theta}$, ici via la méthode Latin-Hypercube-Sampling, puis projeté dans l’espace physique Ω par une transformation affine. Les simulateurs f et g_k sont évalués sur ces vecteurs pour former :

$$\mathcal{T} = \left\{ (\boldsymbol{\theta}_i, f(\boldsymbol{\theta}_i), g_1(\boldsymbol{\theta}_i), \dots, g_p(\boldsymbol{\theta}_i)) \right\}_{i=1}^{N_0}. \quad (9)$$

À partir de ces données, les métamodèles de Krigage \hat{f} et \hat{g}_k sont construits.

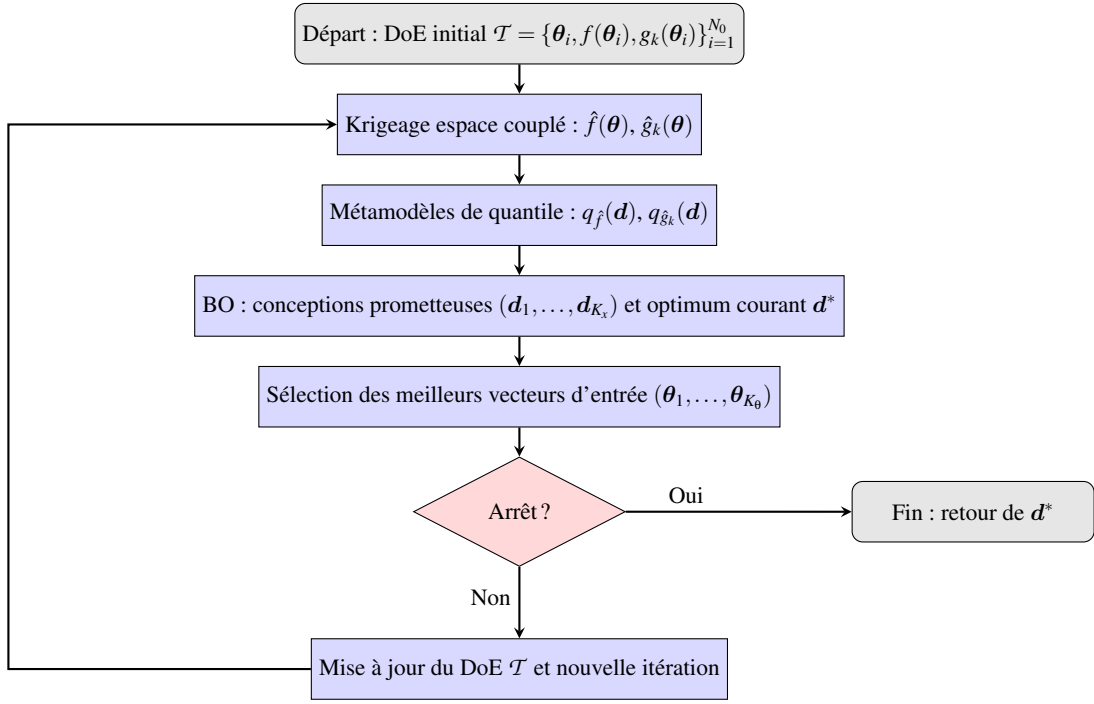


FIGURE 1 – Schéma de la méthodologie d’optimisation basée sur les quantiles.

Métamodèle de quantile À partir du prédicteur $\hat{f}(\theta)$, il s’agit d’estimer le quantile d’ordre α_f ainsi que ses bornes pour un vecteur de conception \mathbf{d} . Une population de Monte Carlo conditionnée par \mathbf{d} est utilisée conjointement aux estimateurs de fiabilité rappelés en section 2.2, pour évaluer ces grandeurs notées $\hat{q}_{\hat{f}}(\mathbf{d})$, $\hat{q}_{\hat{f}}^-(\mathbf{d})$ et $\hat{q}_{\hat{f}}^+(\mathbf{d})$.

Afin d’utiliser ces quantiles dans un cadre d’optimisation bayésienne, une interprétation gaussienne heuristique et non garantie théoriquement est adoptée :

$$q_{\hat{f}}(\mathbf{d}) \sim \mathcal{N}(\mu_{q_{\hat{f}}(\mathbf{d})}, \sigma_{q_{\hat{f}}(\mathbf{d})}^2), \text{ avec } \mu_{q_{\hat{f}}(\mathbf{d})} := \hat{q}_{\hat{f}}(\mathbf{d}) \text{ et } \sigma_{q_{\hat{f}}(\mathbf{d})} := \frac{\hat{q}_{\hat{f}}^+(\mathbf{d}) - \hat{q}_{\hat{f}}^-(\mathbf{d})}{\sqrt{12}}.$$

La même procédure s’applique à chaque fonction de contrainte : $q_{\hat{g}_k}(\mathbf{d}) \sim \mathcal{N}(\mu_{q_{\hat{g}_k}(\mathbf{d})}, \sigma_{q_{\hat{g}_k}(\mathbf{d})}^2)$.

Choix des vecteurs de conception La formulation robuste (2) est alors remplacée par un problème déterministe (Eq. (6)), où $q_{\hat{f}}$ et $q_{\hat{g}_k}$ jouent le rôle de prédicteurs GP. L’approche bayésienne décrite en section 2.2 permet d’identifier un ensemble de vecteurs prometteurs $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{K_x})$ et l’optimum courant \mathbf{d}^* .

Sélection des vecteurs d’entrée dans l’espace complet Pour actualiser les modèles GP, il est nécessaire d’évaluer les simulateurs dans l’espace complet Ω . Plutôt qu’un appariement aléatoire entre \mathbf{d}_q et un tirage de \mathbf{z} , une stratégie en trois étapes est adoptée :

1. Pour chaque \mathbf{d}_q , une population Monte Carlo de taille n_θ est tirée depuis la loi $\theta(\mathbf{d}_q)$.
2. Parmi ces candidats, ceux qui minimisent la U-fonction (Eq. (5)) – évaluée pour l’objectif et les contraintes – sont retenus. Une sélection multi-objectif basée sur le front de Pareto identifie les meilleurs n_{pareto}^q candidats.
3. Une méthode clustering de type K-means permet de sélectionner les K_θ vecteurs finaux, en choisissant le point le plus proche de chaque centroïde.

Cette approche garantit que les points retenus proviennent de conceptions prometteuses, améliorent l’estimation des quantiles et préservent une bonne couverture de l’espace d’entrée.

3 Application

Cette section présente deux applications pour valider et illustrer la méthodologie : tout d'abord sur un cas test analytique sans contraintes [8], puis sur un cas de dimensionnement d'un absorbeur non linéaire [4], afin d'en évaluer la pertinence pour une application pratique réaliste, considérée au travers d'un modèle physique simplifié.

3.1 Cas analytique

On s'intéresse à la fonction coût donnée par :

$$f(x, z_1, z_2) = 3 - 4 \exp(-4(x-4)^2) - 5.2 \exp(-4(x-6)^2) + \frac{x-a}{b-a} z_1 + \frac{b-x}{b-a} z_2, \quad (10)$$

où $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$ est un vecteur aléatoire de dimension 2 dont les composantes sont indépendantes et suivent respectivement une loi uniforme et une loi normale : $Z_1 \sim \mathcal{U}(0, 10)$, $Z_2 \sim \mathcal{N}(1.01, 0.71)$, et l'espace de conception unidimensionnel est $\mathcal{D} = [a, b]$, avec $a = 2$ et $b = 8$. L'objectif considéré est alors la minimisation du quantile de niveau $\alpha_f = 80\%$ défini par :

$$\min_{d \in \mathcal{D}} Q_{\alpha_f}[f(\mathbf{X}(d), \mathbf{Z})]. \quad (11)$$

Le cas test et la méthode d'échantillonnage adaptatif proposée sont présentés à la Figure 2, avec une initialisation LHS de taille $N_0 = 4$ et l'ajout de $K_x = 4$ échantillons $\{x^k, \theta_1^k, \theta_2^k\}_{k=1}^{K_x}$, en parallèle au DoE, sélectionnés de manière adaptative à chaque itération. Le quantile de niveau 80% est très bien approximé après seulement 24 évaluations (5 itérations) par l'approche proposée, comparé aux 150 évaluations requises dans [8], bien que dans cet article la paramétrisation de l'espace stochastique n'était pas prise en compte.

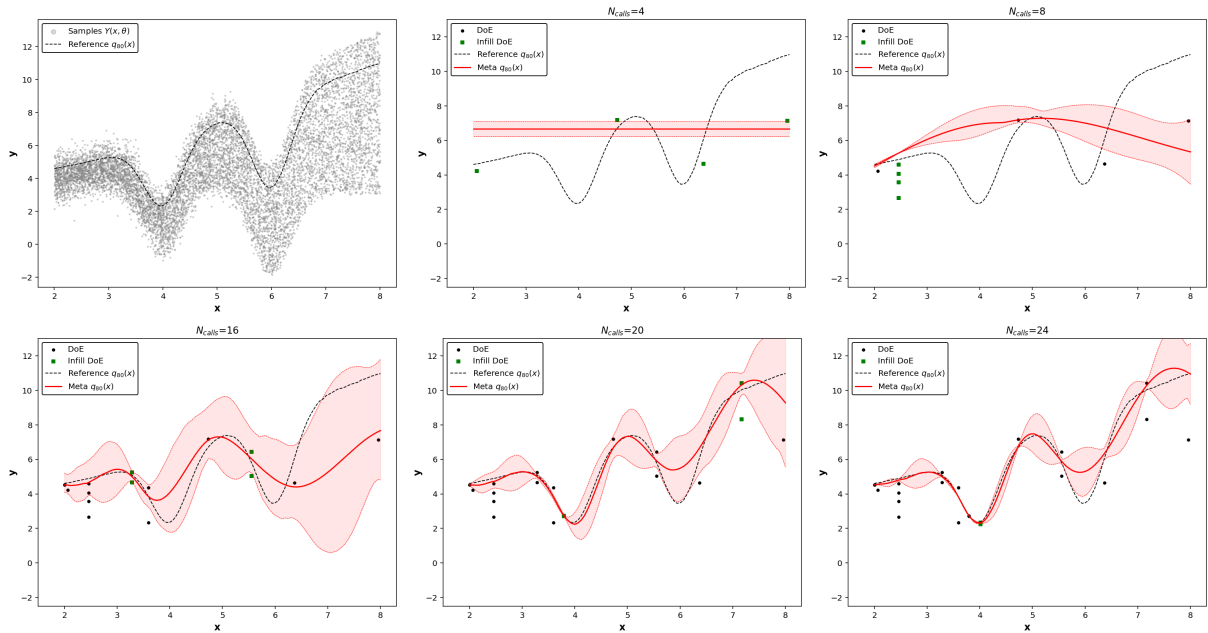


FIGURE 2 – Illustration du cas test analytique. Points gris : variabilité du modèle stochastique dans l'espace de conception; ligne noire en pointillés : quantile de référence à 80% obtenu par simulation Monte-Carlo; en rouge : métamodèle du quantile à 80%, accompagné de son *intervalle de confiance* à 95%; gros points noirs : DoE.

3.2 Optimisation robuste d'un absorbeur non linéaire

Dans cette seconde application, un absorbeur de vibration non linéaire accordé (NLTVA) est mis en œuvre pour contrôler l'instabilité de flottement d'un modèle d'aile à deux degrés de liberté soumis à un

écoulement aérodynamique quasi-stationnaire. Le modèle considère les mouvements de tangage α et de plongeon y d'un profil de l'aile. Des non-linéarités géométriques sont également prises en compte en flexion et torsion.

Le NLTVA (NonLinear Tuned Vibration Absorber) est un système secondaire masse–ressort–amortisseur de déplacement \tilde{x} , caractérisé par sa fréquence réduite γ , son rapport d'amortissement ζ , et connecté à l'aile à une distance λ du centre élastique du profil. Le rapport de masse ε définit le rapport entre la masse du NLTVA et celle de l'aile. La force de rappel comprend également un terme cubique de raideur adimensionnée ξ . Les expressions détaillées de tous ces paramètres ainsi que la mise en équation sous forme adimensionnelle sont fournies dans [4]. Les équations du mouvement se résument alors à :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (12)$$

où les variables cinématiques sont $\mathbf{q} = [y \ \alpha \ \tilde{x}]^T$. Les matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} prennent compte à la fois des propriétés structurelles et des efforts aérodynamiques (fonction de la vitesse de l'écoulement). Les effets non linéaires dus au grand déplacement et grandes rotations du profil, ainsi qu'à la raideur de rappel cubique du NLTVA sont contenus dans le vecteur $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q})$.

Problèmes d'optimisation Plusieurs problèmes d'optimisation robuste sont étudiés. L'objectif consiste à maximiser le quantile à 5 % de la vitesse critique de flottement V_f en agissant sur un sous-ensemble des paramètres du NLTVA : ζ , γ et ξ . Les paramètres ε et λ sont considérés comme des variables aléatoires externes. La vitesse critique est calculée à partir du problème aux valeurs propres complexes associé au système (12) linéarisé autour de l'équilibre $\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Les plages de conception et la modélisation des variables aléatoires est donnée dans la table 1.

TABLE 1 – Modélisation stochastique et espace de conception des paramètres du NLTVA. Tous suivent une loi gaussienne tronquée à $\pm 3\sigma$ centrée sur la valeur nominale, ou de design, notée ici μ : $\mathcal{U} \sim \mathcal{N}_{\text{tronqué}}[-3\sigma, +3\sigma](\mu, \sigma^2)$.

Symbole	Description	Valeur nominale, plage de conception	Écart-type σ
ε	Rapport de masse	0.05	5 % de [0.04, 0.05]
λ	Position normalisée	1	5 % de [-1, 1]
ζ	Taux d'amortissement	[0, 0.2]	5 % de la plage
γ	Rapport de fréquence	[0.2, 0.6]	5 % de la plage
ξ	Coefficient de raideur cubique	[0, 0.4]	5 % de la plage

Dans certaines configurations, il est envisagé d'introduire des contraintes probabilistes pour garantir :

- une bifurcation de Hopf supercritique, par négativité du premier coefficient de Lyapunov l_1 ;
- une limitation de l'amplitude des oscillations du cycle limite (Limit Cycle Oscillation, LCO) en flexion, notée y_{LCO} , à une vitesse d'écoulement donnée supérieure à la vitesse critique de flottement.

Les problèmes d'optimisation sont formulés comme suit :

$$\min_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}} Q_{0.95}[-V_f(\mathbf{X}(\mathbf{d}), \mathbf{Z})], \quad \mathbf{d} = (\zeta, \gamma, \xi), \quad \mathbf{Z} = (\varepsilon, \lambda), \quad (13)$$

avec ou sans la contrainte probabiliste $Q_{0.95}[l_1(\mathbf{X}(\mathbf{d}), \mathbf{Z})] < -0.5$, cette dernière cherchant à assurer la négativité du premier coefficient de Lyapunov sur l'ensemble des conditions.

Le métamodèle initial est construit à partir d'un DoE de taille $N_0 = 10$, puis enrichi itérativement par $K = 4$ nouveaux vecteurs à chaque étape. La méthode proposée converge après environ 45 évaluations des solveurs numériques complets.

Ces deux résultats sont comparés à une solution de référence pour le cas sans contrainte, obtenue à l'aide de l'algorithme global déterministe DIRECT (Dividing RECTangles), implémenté dans `scipy`, avec un budget de 40 000 évaluations de la fonction objectif, mais également au design issu de l'optimisation déterministe nominale de [4]. Afin d'illustrer la variabilité des performances pour ces quatre solutions, les distributions des quantités d'intérêt V_f , l_1 et y_{LCO} sont représentées sur la figure 3. Le quantile à 5%

de la vitesse de flottement est nettement augmenté pour les trois solutions robustes obtenues, comparativement au design déterministe. La solution issue de l'optimisation sous contrainte permet en outre de garantir, pour l'ensemble des cas incertains, une bifurcation de Hopf supercritique, au prix d'une légère diminution de la vitesse de flottement. Enfin, l'analyse de l'amplitude LCO en flexion met en évidence la nécessité d'inclure dans la formulation une contrainte de fiabilité dédiée.

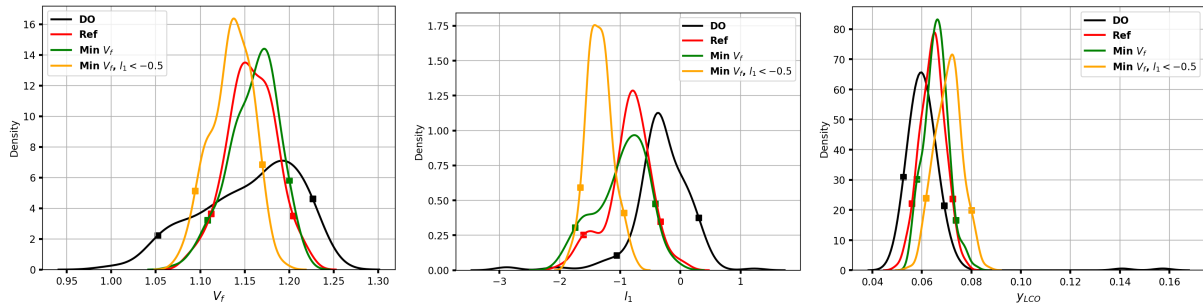


FIGURE 3 – Distributions (pdf) pour trois grandeurs d'intérêt : vitesse de flottement normalisée V_f (gauche), premier coefficient de Lyapunov l_1 (centre) et amplitude LCO en flexion y_{LCO} (droite). Les courbes correspondent aux designs suivants : optimisation déterministe (DO, noir) [4], référence DIRECT (Ref, rouge), minimisation du quantile de $-V_f$ sans contrainte (Min V_f , vert) et avec contrainte sur l_1 (Min $V_f, l_1 < -0.5$, jaune).

Conclusions préliminaires Les calculs d'optimisation robuste effectués sur ce cas pratique, sensible à des incertitudes dans les paramètres de conception, montrent que la méthode développée permet de prédire efficacement un design permettant à la fois de limiter la vitesse critique de flottement et de s'assurer d'une sur-criticité de la bifurcation associée. Une étude prochaine cherchera également à réduire l'amplitude des cycles post-vitesse critique.

Références

- [1] N. Bartoli, T. Lefebvre, S. Dubreuil, R. Olivanti, R. Priem, N. Bons, J. R. R. A. Martins, J. Morlier. *Adaptive modeling strategy for constrained global optimization with application to aerodynamic wing design*, Aerospace Science and Technology, vol. 90, 85–102, 2019.
- [2] B. Echard, N. Gayton, M. Lemaire. *AK-MCS : An active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation*, Structural Safety, vol. 33, 145–154, 2011.
- [3] Z.-H. Han. *SurroOpt : a generic surrogate-based optimization code for aerodynamic and multidisciplinary design*, Proceedings of ICAS, 2016, 2016–0281.
- [4] A. Malher, C. Touzé, O. Doaré, G. Habib, G. Kerschen. *Flutter Control of a Two-Degrees-of-Freedom Airfoil Using a Nonlinear Tuned Vibration Absorber*, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, vol. 12, 051016, 2017.
- [5] M. Moustapha, B. Sudret. *Surrogate-assisted reliability-based design optimization : a survey and a unified modular framework*, Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 60, 2157–2176, 2019.
- [6] N. Razaaly, G. Persico, G. Gori, P.-M. Congedo. *Quantile-based robust optimization of a supersonic nozzle for organic Rankine cycle turbines*, Applied Mathematical Modelling, vol. 82, 802–824, 2020.
- [7] M. Rivier, N. Razaaly, P.-M. Congedo. *Non-parametric measure approximations for constrained multi-objective optimisation under uncertainty*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 125, e7403, 2024.
- [8] C. Sabater, O. Le Maître, P.-M. Congedo, S. Görtz. *A Bayesian Approach for Quantile Optimization Problems with High-Dimensional Uncertainty Sources*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 376, 112623, 2020.
- [9] T. J. Santner, B. J. Williams, W. I. Notz. *The Design and Analysis of Computer Experiments*. Springer, 2003.
- [10] P. Saves, R. Lafage, N. Bartoli, Y. Diouane, J. Bussemaker, T. Lefebvre, J. T. Hwang, J. Morlier, J. R. R. A. Martins. *SMT 2.0 : A Surrogate Modeling Toolbox with a focus on Hierarchical and Mixed Variables Gaussian Processes*, Advances in Engineering Software, vol. 188, 103571, 2024.
- [11] R. Schöbi, B. Sudret, S. Marelli. *Rare event estimation using polynomial-chaos kriging*, ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A : Civil Engineering, vol. 3, D4016002, 2017.