

# Influence des schémas numériques sur la dynamique apparente du contact entre une poutre viscoélastique et deux butées rigides

A. Khaddari<sup>1,2</sup>, C. Pozzolini<sup>2</sup>, C. Grenat<sup>3</sup>, R. Alcorta<sup>1</sup>, V. Lleras<sup>4</sup>, Y. Renard<sup>1</sup>

<sup>1</sup> INSA Lyon, CNRS, LaMCoS, UMR5259, 69621 Villeurbanne, France. [ayman.khaddari@insa-lyon.fr](mailto:ayman.khaddari@insa-lyon.fr), [roberto.alcorta@insa-lyon.fr](mailto:roberto.alcorta@insa-lyon.fr), [yves.renard@insa-lyon.fr](mailto:yves.renard@insa-lyon.fr)

<sup>2</sup> Framatome, 2 rue Professeur Jean Bernard, 69007 Lyon, [cedric.pozzolini@framatome.com](mailto:cedric.pozzolini@framatome.com)

<sup>3</sup> Framatome, Tour d'Areva, 1 place Jean Millier, 92400 Courbevoie, [clement.grenat@framatome.com](mailto:clement.grenat@framatome.com)

<sup>4</sup> IMAG, Univ Montpellier, CNRS UMR 5149, 499-554 Rue du Truel, 34090 Montpellier, France, [vanessa.lleras@umontpellier.fr](mailto:vanessa.lleras@umontpellier.fr)

---

**Résumé** — L'identification et l'analyse des dynamiques non lisses issues de structures élancées en interaction avec des butées rigides constituent un enjeu important pour la mécanique numérique et l'ingénierie industrielle. Dans ce travail, nous considérons le cas d'une poutre viscoélastique d'Euler–Bernoulli soumise à un forçage externe et en contact unilatéral sans frottement avec deux obstacles rigides. Nous présentons une formulation continue rigoureuse fondée sur les conditions de Signorini, suivie de sa semi-discrétisation par éléments finis conduisant à une inclusion différentielle en temps. Nous utilisons ensuite la méthode de la masse singulière et un schéma de Newmark généralisé pour analyser la dynamique discrète du système. Nous étudions de manière détaillée l'influence des paramètres numériques sur les bifurcations, la sensibilité au pas de temps, la convergence des approches pénalisées et la conservation énergétique. Les résultats montrent que la dynamique résulte non seulement des propriétés physiques du système, mais également de la structure du schéma numérique. Cette compréhension est essentielle pour fiabiliser l'analyse de structures industrielles soumises à des impacts répétés.

**Mots clés** — Dynamique non lisse ; Contact unilatéral ; Poutre d'Euler–Bernoulli ; Méthode de la masse singulière ; Bifurcations ; Stabilité numérique.

---

## 1 Introduction

Dans de multiples applications du génie nucléaire et de la mécanique des structures, de nombreuses structures élancées — notamment les tubes de générateurs de vapeur, les crayons combustibles ou les mécanismes de commande de grappes — peuvent entrer en contact avec des parois ou des butées rigides sous l'effet de sollicitations dynamiques. La modélisation et l'analyse précise de ces phénomènes sont indispensables pour évaluer la fiabilité, la durée de vie ou encore la tenue vibratoire de ces composants en fonctionnement nominal ou accidentel (séismes).

Les systèmes vibrants soumis à des contraintes unilatérales présentent une dynamique intrinsèquement non lisse, marquée par l'apparition d'impacts et de phases libres. L'existence de régimes chaotiques a été clairement établie dans plusieurs configurations d'oscillateurs soumis à des butées. Cependant, pour les modèles continus de poutres, ces phénomènes sont beaucoup plus rarement décrits dans la littérature. Parmi les contributions pertinentes, citons les travaux de Liakou, Denoël et Detournay [1] sur la dynamique rapide de poutres avec contraintes unilatérales, ainsi que l'analyse mathématique de Mbengue [2], qui fournit des résultats d'existence et d'unicité pour un modèle de poutre non linéaire en contact avec une fondation.

Dans les applications industrielles, le contact est souvent modélisé par une méthode de pénalisation, autorisant une faible interpénétration et simplifiant le traitement numérique. Toutefois, il est également possible d'imposer strictement la non-interpénétration, conduisant à une force de contact définie implicitement par les conditions de complémentarité. Pour le cas d'obstacles ponctuels, les travaux de Kuttler et Shillor [3] ont fourni une analyse détaillée de la régularité et des solutions. Le présent travail se place dans un cadre étendu au cas d'obstacles continus et réguliers pour une poutre d'Euler–Bernoulli viscoélastique.

La semi-discrétisation par éléments finis conduit à une inclusion différentielle, pour laquelle nous exploitons la méthode de la masse singulière, initialement développée par Renard [5] et adaptée aux structures minces par Pozzolini, Renard et Salaün [6, 7]. La poutre est discrétisée en espace par éléments finis d'Hermite, nécessaire pour traiter un opérateur de dérivée spatiale d'ordre 4. Nous analysons ensuite l'influence du schéma temporel sur la dynamique, en particulier les effets liés aux paramètres du schéma, à la pénalité et aux matrices de masse. D'un point de vue numérique, plusieurs approches coexistent pour imposer la non-interpénétration : la méthode de pénalisation, les méthodes du lagrangien (pur ou augmenté) avec des conditions de complémentarité, ou des méthodes hybrides. Rappelons que la convergence vers la solution de référence est observée lorsque le coefficient

de pénalité reste dans une plage garantissant à la fois la cohérence mécanique et la stabilité numérique. Au-delà d'un certain seuil, la raideur de pénalité accrue du contact induit des problèmes de convergence, ainsi que des oscillations parasites dépendant du pas de temps et de la taille de maille. C'est pourquoi on a étudié l'apparition de non-répétabilité lors de calculs en vibro-impacts. On analyse alors ici un modèle simplifié d'une poutre soumise à des chocs répétés, induit par un déplacement sinusoïdal imposé. Des schémas de Newmark, dont la stabilité dans les contextes non lisses est encore peu documentée dans la littérature, servent de base à l'intégration temporelle [4].

On conjecture que la dynamique observée — notamment l'apparition ou la disparition de bifurcations — dépend de manière cruciale de certains choix numériques. L'objectif de cette étude est ainsi de fournir un cadre robuste pour l'analyse de la dynamique non lisse de poutres en contact rigide, et d'établir des critères permettant d'interpréter correctement les simulations.

## 2 Modèle de poutre

On considère une poutre viscoélastique d'Euler–Bernoulli de longueur  $L$ , caractérisée par le module de Young  $E$ , le moment d'inertie  $I$ , la section  $S$ , la densité  $\rho$  et un coefficient de viscosité  $\alpha$ . La poutre est excitée à l'encastrement par une force harmonique prescrite  $u(0, t) = \phi(t) = A_0 \sin(\omega t)$ .

Les obstacles rigides sont décrits par deux fonctions  $g_1(x)$  et  $g_2(x)$  satisfaisant  $g_1(x) \leq g_2(x)$  pour tout  $x$ . L'espace fonctionnel des déplacements admissibles est

$$\mathbb{W} = \{w \in H^2(0, L) \mid w(0) = \partial_x w(0) = 0\}.$$

La force de contact  $r \in \mathbb{W}'$  est définie implicitement par les conditions de Signorini.

Le problème s'écrit :

Trouver  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{W}$  et  $r \in \mathbb{W}'$  tels que :

$$\begin{cases} \rho S u_{tt} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha EI u_{xxt}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI u_{xx}) = f - r, \\ u(0, t) = \phi(t), \quad \partial_x u(0, t) = 0, \\ \partial_x^k u(L, t) = 0, \quad k = 2, 3, \\ r_-(u - g_1) = 0, \quad r_+(g_2 - u) = 0, \\ r_- \geq 0, \quad r_+ \geq 0, \quad g_1 \leq u \leq g_2. \end{cases} \quad (1)$$

On définit l'ensemble des déplacements admissibles

$$\mathbb{K}(t) = \{w \in \mathbb{W} \mid g_1 \leq w + \phi(t) \leq g_2\}.$$

### Discrétisation spatiale

Les déplacements sont approchés dans l'espace  $\mathbb{W}^h = \text{vect}\{\{\varphi_i^0, \varphi_i^1\}_{1 \leq i \leq N}\}$  formé de fonctions d'Hermite cubiques (P3), tandis que les vitesses sont approchées dans  $\mathbb{H}^h = \text{vect}\{\{\psi_i\}_{1 \leq i \leq N}\}$ , espace de polynômes de Lagrange (P1). Cette construction conduit à une matrice de masse singulière de la forme  $M = B^T C^{-1} B$  (avec  $B_{ij} = \int \rho S \psi_i \varphi_j$  et  $C_{ij} = \int \rho S \psi_i \psi_j$ ). Les matrices  $K$  (raideur) et  $A$  (amortissement viscoélastique) sont définies à partir des bases P3 de l'espace.

La semi-discrétisation conduit à l'inclusion :

$$(W - U(t))^T (M\ddot{U} + A\dot{U} + KU) \geq (W - U(t))^T \ell(t) \quad \forall W \in \mathbb{K}^h.$$

### Schéma numérique

On utilise un schéma de Newmark–Dumont–Paoli, caractérisé par  $\gamma = 1/2$  et  $\beta \in [0, 1/2]$ . La formulation est :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } U_{n+1} \in \mathbb{K}^h \text{ tel que } U_{n+1,e} = \frac{U_{n+1} + eU_{n-1}}{1+e} \in \mathbb{K}^h, \quad \forall W \in \mathbb{K}^h, \\ (W - U_{n+1,e})^T \left[ M \frac{U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}}{\Delta t^2} + A \frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2\Delta t} \right. \\ \left. + K(\beta U_{n+1} + (1-2\beta)U_n + \beta U_{n-1}) \right] \geq (W - U_{n+1,e})^T F_n^\beta, \end{aligned} \quad (2)$$

où

$$F_n^\beta = \beta F_{n+1} + (1-2\beta)F_n + \beta F_{n-1}.$$

### 3 Évolution de l'énergie

L'évolution énergétique permet de mieux comprendre comment choisir un schéma le plus conservatif possible pour limiter autant que possible les artefacts numériques. Nous considérons donc un cas sans forçage et analysons la capacité des schémas à conserver l'énergie mécanique, lorsque les conditions initiales sur le déplacement et la vitesses sont imposées. Nous avons pris 50 éléments, et imposé  $u_0(x) = 0.04x^2$  et  $v_0(x) = -2x$ . Nous présentons d'abord le cas non amorti, puis le cas amorti.

#### 3.1 Cas non amorti

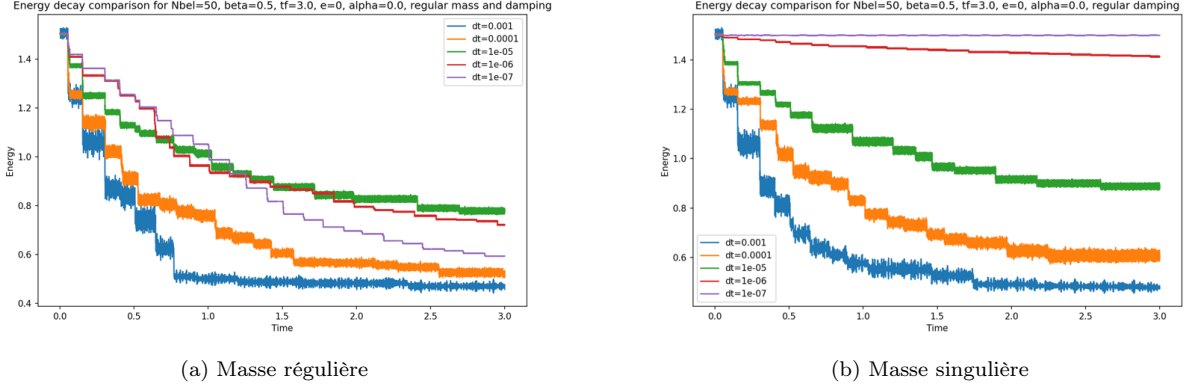


Figure 1: Énergie mécanique dans le cas non amorti.

On observe que les impacts entraînent une perte d'énergie apparente du système. Cependant, dans le cas de la masse singulière (Fig. 1 b), l'énergie tend à se conserver lorsque le pas de temps est raffiné vers  $10^{-6} \sim 10^{-7}$ , ce qui est cohérent avec le résultat de conservation d'énergie établi pour la version semi-discrétisée du problème [5]. À l'inverse, dans le cas de la masse régulière (Fig. 1 a), le schéma de différences finies type Newmark (2) semble moins compatible avec la faible régularité de la solution au moment des impacts, ce qui peut expliquer l'absence de convergence énergétique observée.

#### 3.2 Cas amorti

Un amortissement de Rayleigh  $A = \alpha K$ ,  $\alpha = 10^{-4}$  s, est ajouté :

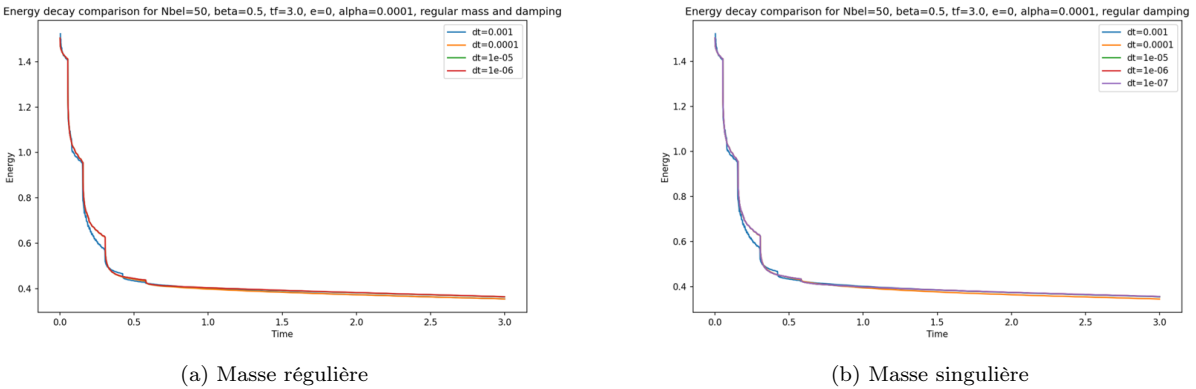


Figure 2: Énergie mécanique dans le cas amorti.

Dans le cas amorti (Fig. 2), les deux choix de matrices de masse (régulière et singulière) produisent une décroissance globale de l'énergie, conformément au rôle dissipatif attendu. Néanmoins, la présence de sauts d'énergie lors des impacts suggère que la convergence fine du schéma doit encore être investiguée afin de mieux distinguer ce qui relève de la dynamique physique de ce qui pourrait être un artefact numérique.

## 4 Diagrammes de bifurcation en fonction de l'amplitude

L'objectif est d'étudier numériquement la dynamique non linéaire du modèle discrétisé, soumis à un forçage harmonique, et d'analyser l'influence des paramètres numériques sur les bifurcations observées par rapport aux solutions obtenues avec la méthode de résolution de référence décrite dans les parties précédentes.

### 4.1 Influence du pas de temps et du nombre d'éléments sur la solution de référence

La pulsation est fixée à  $\omega = 10$  rad/s. La solution de référence est obtenue par la méthode de la masse singulière, associée à la formulation lagrangienne du contact et au schéma Newmark avec  $\beta = 1/2$ .

Nous étudions la convergence spatiale et temporelle du diagramme de bifurcation obtenu, en examinant la section de Poincaré et l'exposant de Lyapunov. Les résultats indiquent une succession de régimes périodiques, chaotiques, puis le retour à un régime périodique, avec éventuellement co-existence d'attracteurs.

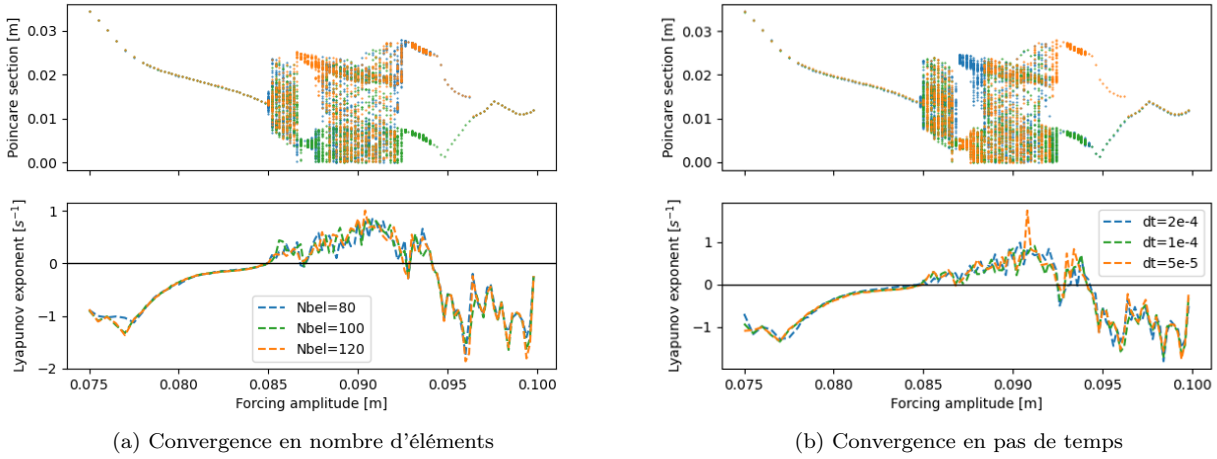


Figure 3: Diagramme de bifurcation de référence obtenu par la méthode lagrangienne (masse singulière,  $\beta = 1/2$ ).

### 4.2 Influence du paramètre $\beta$

Pour  $\beta = 1/4$ , la dynamique montre une sensibilité accrue au pas de temps, suggérant l'existence d'une condition de type CFL liée à la stabilité numérique de ce schéma centré (dit aussi à accélération moyenne).

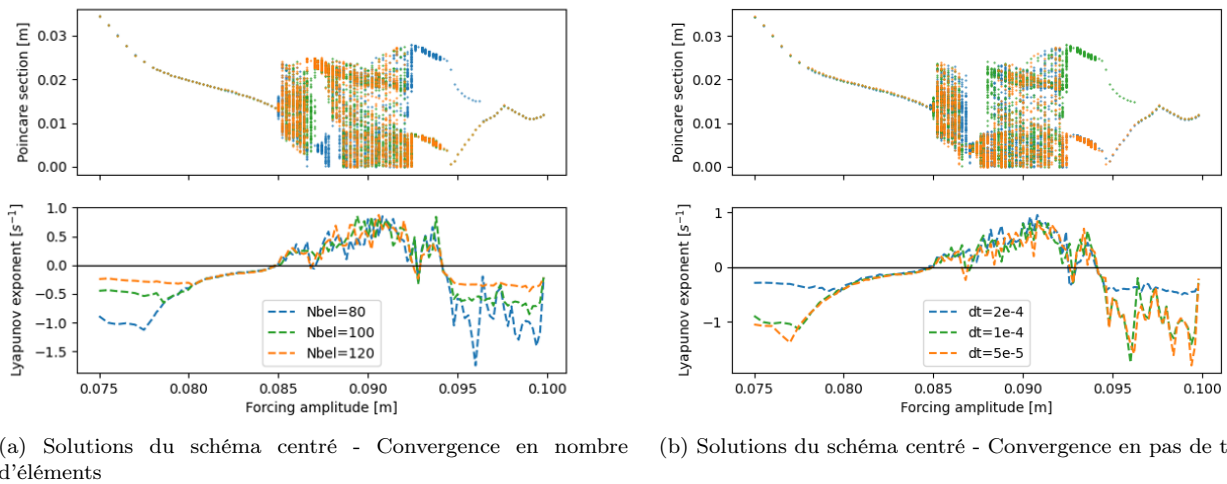


Figure 4: Apparition de la condition CFL dans la dynamique du schéma d'accélération moyenne

Cette observation indique que, contrairement au cas  $\beta = 1/2$ , le comportement dynamique obtenu pour  $\beta = 1/4$  dépend plus fortement du pas de temps, ce qui impose une vigilance accrue dans l'interprétation des bifurcations numériques.

### 4.3 Méthode pénalisée

On étudie la convergence de la méthode pénalisée vers la solution de référence lorsque le coefficient de pénalité  $\varepsilon$  varie.

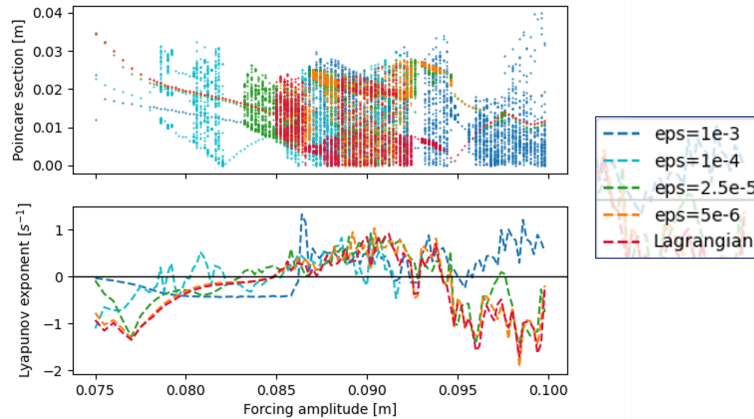


Figure 5: Convergence dynamique de la méthode pénalisée vers la méthode lagrangienne.

Un résultat notable est la convergence, en dynamique, des solutions obtenues avec la méthode de pénalité vers la solution de référence lorsque le coefficient de pénalité augmente. Cette convergence reste toutefois conditionnée par un compromis numérique : une pénalité trop élevée peut dégrader la robustesse du schéma et conduire à une divergence de la solution temporelle.

## 5 Conclusion

Ce travail propose une analyse de la dynamique non lisse d'une poutre viscoélastique en contact unilatéral, en s'appuyant sur une formulation rigoureuse du contact combinée à la méthode de la masse singulière et au schéma de Newmark–Dumont–Paoli, permettant d'examiner finement les effets du maillage, du choix du schéma temporel et de la pénalisation sur les bifurcations et les phénomènes chaotiques. L'étude montre que les phénomènes dynamiques observés — bifurcations, chaos, coexistence d'attracteurs — résultent à la fois de la structure physique du problème et des paramètres numériques associés au schéma de Newmark et à la formulation du contact.

L'influence de la pénalisation, de la matrice de masse et de la valeur du paramètre  $\beta$ -Newmark a été examinée en détail. Les résultats soulignent la nécessité d'un contrôle strict du pas de temps, particulièrement pour les schémas de type accélération moyenne, ainsi que l'intérêt de la formulation lagrangienne pour obtenir une dynamique fiable.

Ces observations sont essentielles pour l'interprétation des simulations industrielles de structures en contact, pour lesquelles la distinction entre phénomènes physiques et artefacts numériques reste un enjeu crucial.

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une thèse CIFRE portée par Framatome, qui vise à fournir des critères pour interpréter de manière fiable les simulations industrielles de structures en vibro-impact en étant capable de distinguer entre représentation des phénomènes physiques réels et imprécisions numériques.

Les résultats mettent en évidence le rôle déterminant des choix numériques, qui peuvent modifier qualitativement la dynamique et engendrer ou supprimer des bifurcations.

## References

- [1] A. Liakou, V. Denoël, and E. Detournay. Fast In-Plane Dynamics of a Beam with Unilateral Constraints. *Journal of Engineering Mechanics*, 143(2):04016116, 2017.
- [2] M. F. Mbengue. Analysis of a nonlinear beam in contact with a foundation. *ZAMM*, 65:783–796, 2014.
- [3] L. Kuttler and M. Shillor. Vibrations of a beam between two stops. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems B*, 8:93–110, 2001.
- [4] Y. Dumont and L. Paoli. Vibrations of a beam between obstacles: convergence of a fully discretized approximation. *ESAIM: M2AN*, 40(4):705–734, 2006.
- [5] Y. Renard. The singular dynamic method for constrained second-order hyperbolic equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 234(3):906–923, 2010.
- [6] C. Pozzolini, Y. Renard, and M. Salaün. The singular dynamic method for dynamic contact of thin elastic structures. *ESAIM: Proc.*, 42:20–33, 2013.
- [7] C. Pozzolini and M. Salaün. Some energy-conservative schemes for vibro-impacts of a beam on rigid obstacles. *ESAIM: M2AN*, 45, 1163–1192, 2011.