

Méthode d'éléments de frontière accélérée sur des structures fissurées 3D pour l'estimation de la durée de vie en fatigue

Adrien Vet^{1,2}, Luiz Faria¹, Raül De Moura Pinho², Marc Bonnet¹

¹ ENSTA Paris, UMA, POEMs, Palaiseau adrien.vet@ensta.fr luiz.maltez-faria@inria.fr, marc.bonnet@ensta.fr

² Safran Aircraft Engines, Villaroche, adrien.vet@safrangroup.com raul.de-moura-pinho@safrangroup.com

Résumé — Ce travail a pour but de répondre aux besoins industriels pour l'estimation des durées de vie des pièces mécaniques sous un chargement en fatigue à l'aide de la méthode d'éléments de frontière (BEM) accélérée par \mathcal{H} -matrices dans le cadre statique de la mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER) isotrope et homogène. Il s'agit de réaliser un compromis entre les méthodes rapides mais très imprécises (formules analytiques de facteurs d'intensité des contraintes), et entièrement numériques déjà existantes - précises mais coûteuses en ressources et en temps de calcul (méthode des éléments finis pour l'analyse thermomécanique de structures complètes), se voulant être à la fois précis et léger.

Mots clés — méthode d'éléments de frontière, h-matrice, fatigue, durée de vie, équations intégrales.

1 Introduction

Contexte industriel. Ce projet, effectué dans le cadre d'une thèse CIFRE (2024-27) entre Safran Aircraft Engines et ENSTA Paris, s'inscrit dans un contexte industriel assez précis : chez Safran, des outils numériques existent déjà pour estimer la durée de vie en fatigue des structures mécaniques. Certains sont précis mais longs (méthode des éléments finis), d'autres sont rapides mais très conservatifs (méthodes analytiques et semi-analytiques). Sous certaines hypothèses physiques, on peut espérer trouver un bon compromis entre vitesse de calcul et précision avec la BEM ; la réduction du nombre de ddl (puisque l'on maille notre structure uniquement sur sa frontière), couplée à la compression des matrices d'influence, permettent une accélération des calculs non négligeable tout en conservant une bonne précision numérique grâce à la méthode des équations intégrales qui évalue les champs d'intérêt de façon semi-analytique (pour bien comprendre la méthode des équations intégrales et des éléments de frontière pour les structures et les fluides, on se référera à l'ouvrage [1]).

De plus, le traitement des intégrales singulières se fait, dans cette présentation, via l'algorithme classique de Guiggiani (détaillé dans l'article [2]), mais enrichi pour pouvoir traiter des noyaux intégraux quelconques, y compris lorsque l'on incorpore, aux équations intégrales, la singularité du champ de déplacements au voisinage du front de fissure pour améliorer la précision sur le calcul du facteur d'intensité des contraintes (FIC), ce qui constitue un dernier apport majeur de ce travail.

Méthode des discontinuités de déplacements. Cette méthode, très classique (voir à ce sujet l'ouvrage [1] et l'article original [5]), mais pas unique (une approche dite duale a aussi été proposée [7]), établit une représentation intégrale de frontière des champs de déplacements dans un solide fissuré quelconque (voir figure 1), donnée par le système d'équations intégrales suivant :

Représentation intégrale de la traction sur la fissure et du déplacement sur la frontière extérieure :

$$\mathcal{H}_{\Gamma}\underline{\phi}_{\Gamma}(\underline{x}) + \mathcal{D}_{\Gamma S}^*t_S(\underline{x}) + \mathcal{H}_{\Gamma S}u_S(\underline{x}) = t_{\Gamma}(\underline{x}) \quad (1)$$

$$\mathcal{D}_{S\Gamma}\underline{\phi}_{\Gamma}(\underline{x}) + S_{SS}t_S(\underline{x}) - \mathcal{D}_{SS}u_S(\underline{x}) = \frac{1}{2}u_S(\underline{x}) \quad (2)$$

Représentation pour un point intérieur hors de la fissure :

$$u_{\Omega}(\underline{x}) = \mathcal{D}_{\Omega\Gamma}\underline{\phi}_{\Gamma}(\underline{x}) + S_{\Omega S}t_S(\underline{x}) + \mathcal{D}_{\Omega S}u_S(\underline{x})$$

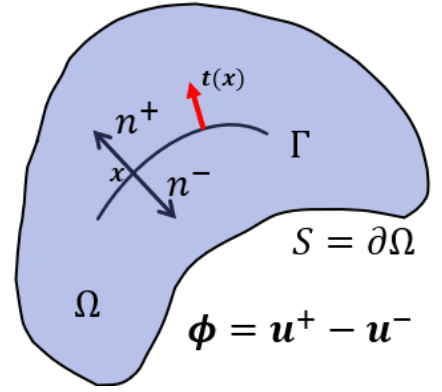


FIGURE 1 – Solide fissuré

où \underline{u} , \underline{t} et $\underline{\phi}$ désignent respectivement le déplacement, la traction et le saut de déplacement (au travers des lèvres de la fissure), et \underline{x} désigne un point source. Les opérateurs intégraux *de Caldéron* S , \mathcal{D} , \mathcal{D}^* et \mathcal{H} font référence, respectivement, aux opérateurs intégraux de simple couche, double couche, adjoint au double couche et hypersingulier. Ils sont donnés en annexes **A** et **B**, ainsi que l'expression de leurs noyaux, issus de la solution fondamentale de Green, respectifs associés. Une fois ces opérateurs discrétisés par éléments de frontière (les deux frontières discrétisées étant S et Γ), on obtient un système matriciel **dense** sous la forme

$$[K] \{ \underline{\phi}_{\Gamma} \quad \underline{u}_{S_n} \quad \underline{t}_{S_d} \}^T = \{ \underline{F} \}$$

où S_d et S_n désignent les surfaces de Dirichlet et de Neumann. Les inconnues portent uniquement sur des points source à la frontière : c'est le principe même de la méthode des éléments de frontière.

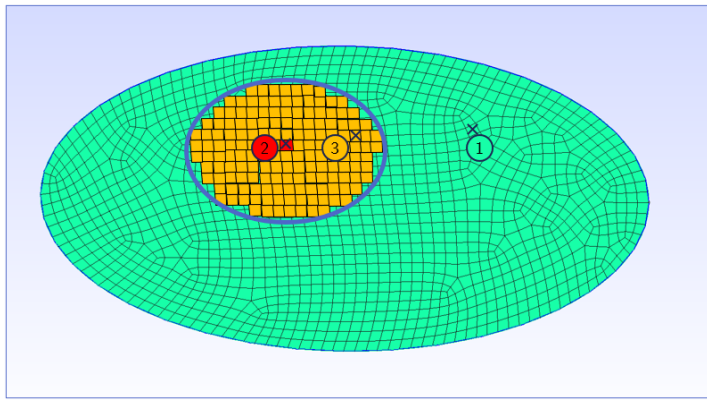
2 Calcul des intégrales singulières

Schéma global. Comme présentées en annexes **A** et **B**, les intégrales impliquées dans la formulation (1, 2) contiennent des noyaux plus ou moins singuliers en fonction de l'ordre de dérivation considéré. En 3D par exemple, le noyau de simple couche est singulier comme $O(r^{-1})$ avec $r = \|\underline{x} - \underline{y}\|$, celui de double couche et son adjoint sont singuliers comme $O(r^{-2})$ et l'hypersingulier l'est comme $O(r^{-3})$. Ceci nécessite de considérer ces intégrales au sens de leur valeur principale de Cauchy ou leur partie finie d'Hadamard, à partir d'un passage à la limite rigoureusement détaillé dans l'ouvrage [1]. Il existe plusieurs façons d'implémenter le calcul de ces intégrales numériquement (voir à ce sujet, entre autres, [1] ou encore [8] pour des surfaces fermées), mais celle qui a retenu notre attention est la méthode de Guiggiani (présentée dans l'article [2]), possédant l'avantage de fonctionner quelle que soit la surface considérée, reportant le calcul de la partie finie ou de la valeur principale au niveau de l'élément de référence paramétrique.

Par ailleurs, la discrétisation nous amène à considérer les trois cas suivants (illustrés figure 2) concernant le calcul des intégrales élémentaires, en notant \underline{x} le point source et τ_e l'élément d'intégration :

- \underline{x} est loin de τ_e : $d(\underline{x}, \tau_e) \gg |\tau_e|$: l'intégrande varie peu à cause du comportement en r^{-s} loin de 0 : l'intégrale élémentaire peut être approchée à l'aide d'une quadrature classique de Gauss-Legendre.
- $\underline{x} \in \tau_e$: une singularité apparaît. L'algorithme de Guiggiani doit être utilisé.
- Cas intermédiaire : $0 < d(\underline{x}, \tau_e)/|\tau_e| < \text{Tol}$: l'intégrande est mathématiquement régulière mais varie beaucoup à cause du comportement en r^{-s} proche de 0 : un procédé adaptatif a été utilisé, concentrant davantage de points et poids de quadrature le long du segment qui relie le point source à l'élément d'intégration pour tenir compte des fortes variations de la fonction de Green.

Algorithme de Guiggiani enrichi. Évoqué précédemment, l'algorithme de Guiggiani [2] permet de calculer numériquement une intégrale définie par sa partie finie ou sa valeur principale; ce procédé est



$$\mathcal{K}[\underline{\varphi}](\underline{x}) = \int_{\tau_e} \underline{\mathbf{K}}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\varphi}(\underline{y}) dS_y$$

(un)known function \uparrow singular kernel
 \downarrow source point τ_e \rightarrow integration element

- Integration element
- × Source point
- Singular case
- Nearly-singular case
- Regular case

FIGURE 2 – Illustration des différentes configurations possibles pour le calcul d’une intégrale élémentaire dont la forme générale est donnée en haut à droite

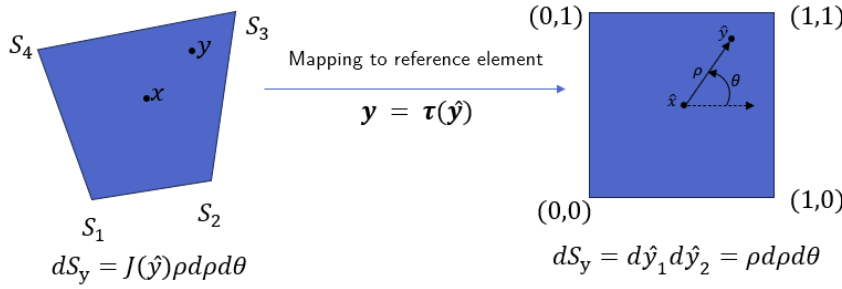


Figure 3 – Changement de variable en coordonnées polaires : le centre du repère est le point de singularité et la variable d’intégration, dans l’élément de référence, se repère par rapport à lui.

présenté très succinctement ci-dessous. Soit donc l’intégrale élémentaire associée à une densité (fonction connue ou inconnue) $\underline{\varphi}$ et un noyau singulier $\underline{\mathbf{K}}$ en un point source de l’élément d’intégration τ_e , noté \underline{x}

$$\mathcal{K}(\underline{x}) = \mathbf{f.p.} \int_{\tau_e} \underline{\mathbf{K}}(\underline{x}, \underline{y}) \underline{\varphi}(\underline{y}) dS_y = \sum_{p=1}^{n_e} \underbrace{\left\{ \mathbf{f.p.} \int_{\Delta_e} \underline{\mathbf{K}}(\underline{\hat{x}}, \underline{\hat{y}}) N^p(\underline{\hat{y}}) J(\underline{\hat{y}}) d\hat{y} \right\}}_{I_e^p(\underline{x})} \underline{\varphi}^p, \quad \underline{x} = \tau_e(\underline{\hat{x}})$$

En effectuant un passage en coordonnées polaires (où $d\hat{y} = \rho d\rho d\theta$, voir figure 3), on dispose du noyau polaire suivant :

$$\underline{\underline{F}}(\rho, \theta) := \rho J(\underline{\hat{y}}(\rho, \theta)) N^p(\underline{\hat{y}}(\rho, \theta)) \underline{\underline{\mathbf{K}}}(\underline{\hat{x}}, \underline{\hat{y}}(\rho, \theta)) = O(\rho^{-2})$$

Ce noyau polaire est développable en série de Laurent, comme l’exploite l’article de Guiggiani, c’est-à-dire qu’il existe deux fonctions angulaires F_{-1} et F_{-2} telles que

$$F(\rho, \theta) = \frac{F_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho} + O(1)$$

où l’on a enlevé les barres horizontales pour plus de lisibilité ; de sorte que l’intégrale $I_e^p(x)$ devienne, après soustraction de la singularité et traitement semi-analytique (détaillé dans l’article de Guiggiani),

$$I_e^p(x) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left\{ F(\rho, \theta) - \left[\frac{F_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho} \right] \right\} d\rho d\theta + \int_0^{2\pi} \left\{ F_{-1}(\theta) \log |\hat{\rho}(\theta)| - \frac{F_{-2}(\theta)}{\hat{\rho}(\theta)} \right\} d\theta$$

où $\hat{\rho}(\theta)$ est la distance, depuis \hat{x} , au bord dans la direction θ . Les deux intégrales ci-dessus sont ainsi régularisées et peuvent être approchées à l’aide de quadratures classiques comme celle de Gauss-Legendre. Les coefficients de Laurent $F_{-1}(\theta)$ et $F_{-2}(\theta)$ sont alors les deux quantités clés à calculer pour intégrer notre noyau singulier. Nous pouvons expliciter trois différentes façons de les calculer :

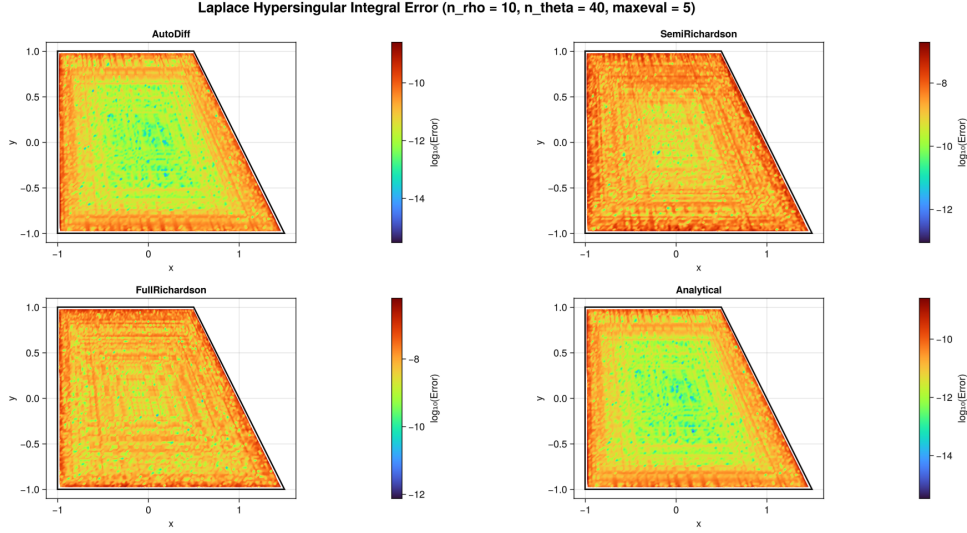


FIGURE 4 – Erreur portant sur l’intégrale élémentaire de l’opérateur hypersingulier pour l’équation de Laplace $\Delta u = f$ sur un élément de référence quadrangulaire, en fonction de la position du point source \underline{x} sur ce dernier. La valeur numérique a été comparée à une valeur de référence en forme close connue. La méthode en haut à gauche est la méthode semi-analytique, celle en bas à gauche est l’extrapolation de Richardson telle que décrite, celle en bas à droite est la méthode entièrement analytique du papier originel, et enfin la méthode en haut à droite est une approche hybride entre une factorisation semi-analytique pour F_{-2} et une extrapolation de Richardson pour F_{-1} .

- **Expansion analytique directe**; comme le fait initialement l’article, il s’agit d’exprimer ces deux coefficients de Laurent en fonction de l’expression du noyau intégral. Problème : trop spécifique au noyau, valable uniquement si l’on en connaît une expression analytique, et très lourd à obtenir analytiquement.
- **Extrapolation de Richardson**; c’est une approche générale qui possède l’avantage de fonctionner quel que soit le noyau, tant que l’on dispose d’un algorithme d’évaluation de celui-ci pour des valeurs de ρ suffisamment petites. Problème : c’est un procédé purement numérique, et des erreurs significatives peuvent apparaître si les valeurs de ρ évaluées sont trop proches de 0, à cause du caractère numériquement instable du noyau proche de 0. Cette extrapolation calcule les limites suivantes :

$$F_{-2}(\theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 F(\rho, \theta), \quad F_{-1}(\theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \rho F(\rho, \theta) - \frac{F_{-2}(\theta)}{\rho} \right\}$$

- **Méthode semi-analytique**; pour certains noyaux, et notamment ceux de l’élasticité qui sont utilisés dans ce travail, la propriété d’invariance par translation de la fonction de Green leur donne une forme si particulière que l’on peut factoriser à la main leur forme polaire :

$$\mathcal{F}(\rho, \theta) := \rho^2 F(\rho, \theta) = \frac{1}{\|\underline{A}(\rho, \theta)\|^3} \hat{K}(\hat{r}(\rho, \theta)) J(\hat{y}(\rho, \theta)) N^p(\hat{y}(\rho, \theta)),$$

où $\hat{r} = (\underline{y} - \underline{x})/r$, et le noyau auxiliaire \hat{K} , connu analytiquement pour ces noyaux, est la partie régulière du noyau K , de sorte que $K(x, y) = \frac{1}{r^s} \hat{K}(\hat{r})$. Aussi, $\underline{A}(\rho, \theta)$ est le développement paramétrique au premier ordre de $(\underline{y} - \underline{x})/\rho$: $\underline{A}(\rho, \theta) = \underline{D}\tau_e(\hat{x}) \cdot \underline{u}(\theta) + \frac{\rho}{2} \underline{u}(\theta)^T \underline{D}^2 \tau_e(\hat{x}) \underline{u}(\theta)$, $\underline{u}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, avec $\underline{D}\tau_e$ et $\underline{D}^2 \tau_e$ la jacobienne et la hessienne de l’élément τ_e . Cette fonction \mathcal{F} est régulière mathématiquement et stable numériquement, et le calcul des coefficients de Laurent ne pose plus de difficulté :

$$F_{-2}(\theta) = \mathcal{F}(0, \theta), \quad F_{-1}(\theta) = \left. \frac{d}{d\rho} \mathcal{F}(\rho, \theta) \right|_{\rho=0},$$

cette dérivée pouvant être calculée numériquement par différentiation automatique.

Une comparaison entre ces 3 méthodes est montrée en figure 4.

3 Fonction de pondération pour le calcul des FICs

On sait que (voir des éléments de mécanique de la rupture dans [12]) le développement asymptotique de Williams des champs mécaniques manifeste une singularité en loi racine du déplacement (et par conséquent du saut de déplacement) au voisinage du front de fissure :

$$\forall \underline{x} \in \Gamma, \quad \underline{\phi}(\underline{x}) = \sqrt{d} \underline{H} \cdot \underline{K} + O(d), \quad d = d(\underline{x}, \partial\Gamma)$$

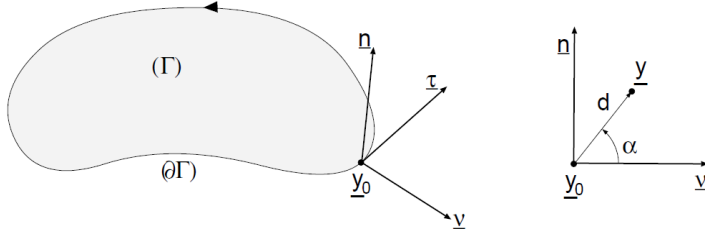


FIGURE 5 – Coordonnées polaires de référence pour le repérage cinématique le long du front de fissure

Où d est la distance au front, α est la seconde variable de repère d'un point dans l'espace en coordonnées polaires centrées au front de fissure (voir figure 5); \underline{K} contient les facteurs d'intensité des contraintes (FIC) des trois modes de rupture, dans la terminologie classique de la mécanique de la rupture : $\underline{K} = (K_I \quad K_{II} \quad K_{III})^T$. Par conséquent, on a :

$$\underline{K} = \underline{H}^{-1} \lim_{\underline{x} \rightarrow \partial\Gamma} \underline{\phi}(\underline{x}) / \sqrt{d(\underline{x}, \partial\Gamma)}$$

On voit donc que le FIC est d'autant plus précis que la solution $\underline{\phi}$ incorpore convenablement la singularité en \sqrt{d} au voisinage du front de fissure. Avec une discrétisation polynomiale de type Lagrange, les fonctions de formes nodales ne reproduisent pas correctement cette singularité naturellement; une fonction de pondération w est alors construite numériquement, et définie sur la fissure de sorte que :

$$w(\underline{x}) \underset{\underline{x} \rightarrow \partial\Gamma}{\sim} \sqrt{d(\underline{x})}, \quad \underline{\phi}(\underline{x}) = w(\underline{x}) \underline{\psi}(\underline{x}), \quad \text{avec} \quad \underline{\psi}(\underline{x}) = O(1)$$

L'algorithme proposé pour la construction d'une telle fonction de pondération procède comme suit :

Algorithm 1 Construction de la fonction de pondération numérique

Require: point \underline{x} , tolérance ε

Ensure: Distance approchée au front de fissure $d(\underline{x}, \partial\Gamma) = \min_{\underline{y} \in \Gamma} \|\underline{x} - \underline{y}\|$

- 1: On trouve l'élément τ^* le plus proche de \underline{x} (par un algorithme des k plus proches voisins).
 - 2: On minimise la fonction $f : \hat{y} \mapsto \|\tau^*(\hat{y}) - \underline{x}\|$: $d = \min f$ à la tolérance souhaitée ε .
 - 3: **return** \sqrt{d}
-

Ainsi, le FIC s'écrit, pour tout point \underline{x} du front de fissure $\partial\Gamma$, $\underline{K}(\underline{x}) = \underline{H}^{-1} \underline{\psi}(\underline{x})$, où $\underline{\psi}$ est devenue notre nouvelle inconnue du problème par changement de variable, développée dans une base de fonctions de forme sur des éléments de frontière : $\underline{\psi} = \sum_{p=1}^n N^p(\xi) \underline{\psi}^p$. Sur la figure 6, on voit l'impact que cette fonction de pondération a sur la précision de la solution (ici le FIC), pour un maillage fixé contenant 80 éléments rectilignes le long du front.

4 Compression par \mathcal{H} -matrices

Idée générale. Un autre aspect très important de ce travail est la compression des matrices d'influence résultant de la discrétisation par éléments de frontière. Pour cela, la méthode des matrices hiérarchiques est utilisée dans ce travail, aussi appelée \mathcal{H} -matrices (selon l'ouvrage originel [3]). La nécessité d'une telle compression provient du caractère dense et non-symétrique définie positive des matrices d'influence, contrairement à la méthode des éléments finis dans laquelle les matrices sont creuses, symétriques et semi-définies positives, bénéficiant ainsi de solveurs spécialisés et performants. Dans la matrice d'influence, chaque coefficient correspond à une interaction élastique entre deux degrés de liberté (ddl) du modèle. Par extension, chaque bloc correspond à l'ensemble des interactions entre deux clusters de

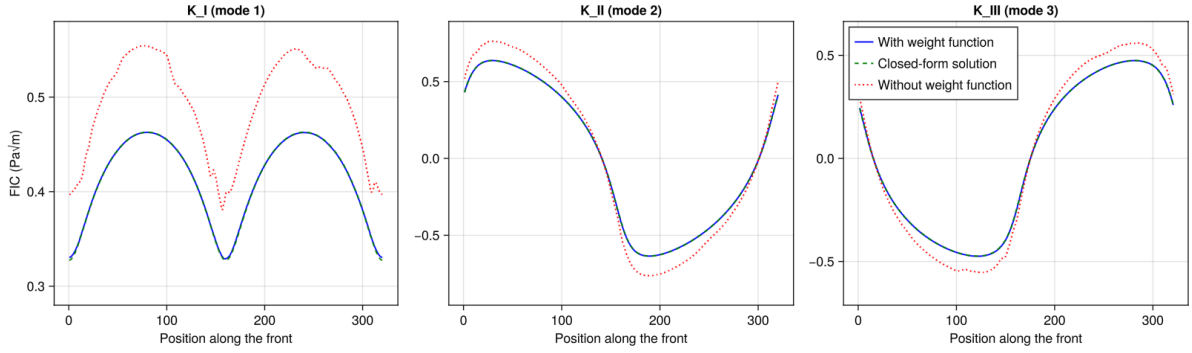


FIGURE 6 – FIC (trois modes de rupture) sur le front d’une fissure elliptique de demi-axes 0.2 et 0.1 dans le plan $x - y$ en milieu infini, soumise à un chargement uniforme tridirectionnel $\underline{F} = (1 \ 1 \ 1)^T$

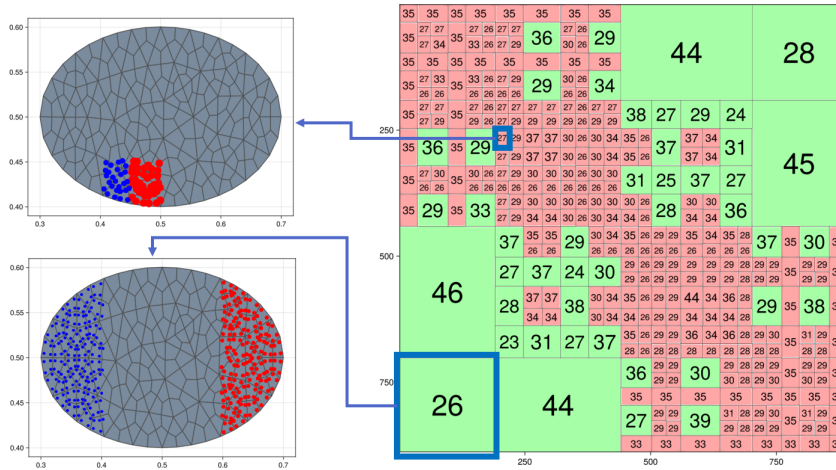


Figure 7 – Vue hiérarchique de la matrice par bloc : les blocs hautement compressibles (les plus gros) correspondent à des interactions très lointaines, et inversement pour les blocs plus petits. Plus un bloc représente des interactions lointaines, plus son rang (écrit centré dans chaque case) est petit devant sa taille. Un bloc vert est un bloc dit "compressible", tandis qu’un bloc rouge ne l’est pas, selon un critère établi de séparation spatiale.

ddls. La décroissance lisse à l’infini des noyaux intégraux (voir annexe A) permet d’approcher les interactions lointaines de façon polynomiale. Algébriquement, cela revient à trouver la correspondance de ces interactions lointaines comme des sous-blocs matriciels de la matrice d’influence, puis à assembler ces sous-blocs en minimisant leurs rangs, réduisant ainsi le nombre d’informations algébriques nécessaires à sa représentation. Une telle représentation d’une matrice hiérarchique est donnée figure 7. Pour cette compression, une bibliothèque \mathcal{H} -matrice développée en Julia par Luiz Faria est utilisée [9].

Approximation de rang faible : algorithme PACA. Comme expliqué dans le paragraphe précédent, chaque bloc compressible est approché par un bloc de rang plus faible. Il existe plusieurs façons de faire des approximations de faible rang, mais celle qui est adoptée ici est l’algorithme PACA (*Partially-pivoted Adaptive Cross Approximation*, détaillé dans l’article [4]), dont l’avantage majeur est de ne jamais assembler ni stocker la matrice d’influence complète. Cet algorithme construit à l’aveugle chaque bloc en s’assurant de réduire son rang : chaque bloc peut s’écrire sous la forme $B_{mn} = \sum_{k=1}^r a_k b_k^T$ dont le rang est $r < \min(m, n)$. Il faut ainsi assembler $2r$ flottants pour le stocker au lieu de $m \times n$ (assemblage et stockage complet).

Gains de performance. L’assemblage dense d’une matrice BEM coûte environ n^2 opérations, alors que l’utilisation des \mathcal{H} -matrices permet de descendre à $n \log n$, ce qui est non négligeable pour des modèles à grand nombre de degrés de liberté, comme le montre la figure 8. De même, l’algorithme de multiplication matrice-vecteur coûte seulement $\eta^{-(d-1)} kn \log n$, où η est un paramètre de l’algorithme PACA, d est la dimension (2 ou 3 en général), et k est le rang maximal visé par l’algorithme de réduction de rang.

Ci-contre une illustration préliminaire pour l'équation de Laplace, pour laquelle la compression par \mathcal{H} -Matrices est en l'état très efficace pour des problèmes scalaires du type équation de Laplace $\Delta u = f$, dès quelques milliers de ddls. L'extension de cette technique pour des problèmes vectoriels, tels que l'élasticité pour notre étude, est en cours d'optimisation et sera présentée au colloque. Sur la figure est tracé le rapport des temps de calcul entre un assemblage dense et un assemblage \mathcal{H} -Matrice.

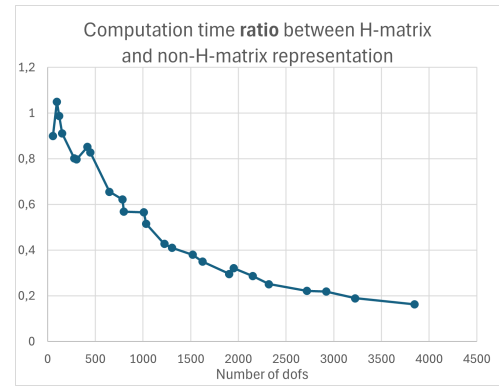


FIGURE 8 – Rapport des temps de calcul

5 Estimation de durée de vie en fatigue

Lien entre durée de vie, FIC et propagation en fatigue. Premièrement, le critère d'Irwin (très classique, voir [10]) donne un critère de rupture (quasi-instantanée) en fonction d'une valeur seuil de facteur d'intensité des contraintes :

$$\text{La fissure se propage (instantanément)} \iff K_I > K_{Ic}$$

Où K_I est le facteur d'intensité des contraintes en mode I , et K_{Ic} est une valeur seuil, appelée *tenacité* : c'est une constante matériau, déterminée expérimentalement ; elle caractérise la capacité d'un matériau à résister à la propagation d'une fissure.

Deuxièmement, la propagation peut se faire autrement qu'instantanément lors d'un chargement en fatigue : c'est la *propagation en fatigue*, plus lente, dont le taux d'avancement du front de fissure est calculé à partir d'une *loi de propagation*, comme celle, très utilisée, de la loi de Paris [11] :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m$$

où C et m sont deux paramètres matériau, et ΔK est l'amplitude des FIC calculés au cours du chargement en fatigue en un point du front de fissure. Ainsi, en démarrant à partir d'une géométrie initiale, la fissure propage selon la loi de propagation jusqu'à l'atteinte de dimensions conduisant au dépassement de la tenacité par le FIC : le nombre de cycles avant une telle rupture est la *durée de vie*. Cette propagation est supposée quasi-statique : on ne tient pas compte d'effets dynamiques.

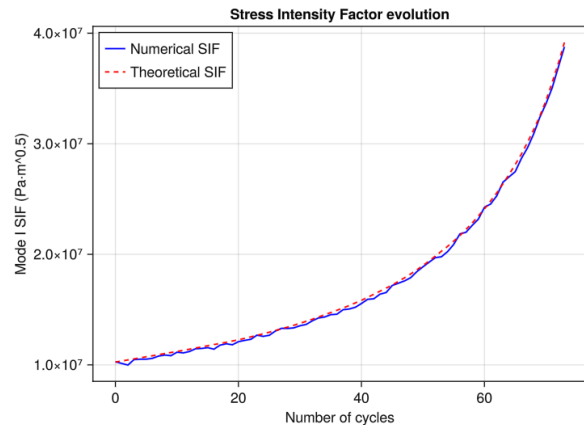


FIGURE 9 – Évolution du FIC au cours d'un chargement en fatigue. En abscisse le nombre de cycles, et en ordonnée la valeur du FIC en $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$. Le FIC a atteint la tenacité au bout d'environ 70 cycles, causant la rupture du milieu. Cette simulation a été faite via la BEM en utilisant une fonction de pondération numérique.

Exemple. Voici par exemple, en figure 9, l'évolution du FIC lors d'un chargement en fatigue d'amplitude $10^7 N$ sur une fissure initialement elliptique de demis axes de longueurs $2.00 \cdot 10^{-4}$ et $1.00 \cdot 10^{-4}$ m. La fissure, après plusieurs dizaines de cycles de fatigue, est un disque de rayon $3.64 \cdot 10^{-3}$ m.

6 Conclusion

Ce travail propose une méthode BEM accélérée pour l'estimation de durée de vie en fatigue de structures fissurées 3D, constituant un compromis entre rapidité et précision pour les applications industrielles. Les contributions principales sont : (i) un enrichissement de l'algorithme de Guiggiani par une approche semi-analytique pour le traitement stable des intégrales singulières, (ii) l'incorporation d'une fonction de pondération pour améliorer la précision des FICs, et (iii) la compression par \mathcal{H} -matrices du système d'équations. L'industrialisation de ce travail comprendra l'application du principe de superposition (dit de Bueckner) des champs mécaniques existant dans une pièce industrielle, ainsi qu'un couplage de notre approche avec les éléments finis (qui prendront en compte des régions non fissurées).

Annexe

A Noyaux intégraux de l'élasticité - solution fondamentale

$$\underline{\underline{G}}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left\{ (3-4\nu)\underline{\underline{I}} + \frac{1}{r^2}(\underline{y}-\underline{x}) \otimes (\underline{y}-\underline{x}) \right\}, \quad r = \|\underline{y}-\underline{x}\|$$

qui quantifie la réponse élastique du point \underline{y} suite à un effort ponctuel au point \underline{x} . Par ailleurs, $\mu = E/(2(1+\nu))$ où E et ν sont, respectivement, le module d'Young et le coefficient de Poisson. Enfin, \otimes désigne le produit tensoriel de deux vecteurs : $(\underline{u} \otimes \underline{v})_{ij} = u_i v_j$.

B Opérateurs intégraux de Calderón

Terminologie : T est la surface cible et S la surface source. $\underline{\varphi}$ est un potentiel de densité. γ_1 est la trace normale, correspondant à l'opérateur de traction élastique dans le cas linéaire isotrope :

$$\gamma_1 \underline{u}(\underline{x}) = \underline{t}(\underline{x}) = 2\mu \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{n}} + \lambda \underline{n} \operatorname{div} \underline{u} + \mu \underline{n} \times \operatorname{curl} \underline{u} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$$

Enfin, les notations $\mathbf{p.v}$ et $\mathbf{f.p}$ renvoient respectivement aux intégrales au sens de la valeur principale de Cauchy et de la partie finie d'Hadarnard. Si les surfaces source et cible sont disjointes, ces intégrales sont bien entendues à prendre au sens ordinaire, mais sinon, une singularité non intégrable apparaît, nécessitant ces définitions plus rigoureuses. Les potentiels de *simple couche*, *double couche*, *adjoint au double couche*, et *hypersingulier*, appliqués à une densité quelconque $\underline{\varphi}$ sur une surface cible T et évalués en un point \underline{x} d'une surface source S , sont alors donnés, respectivement, par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{ST} \underline{\varphi}_T(\underline{x} \in S) &= \int_T \underline{\underline{G}}(\underline{x}, \underline{y}) \underline{\varphi}(\underline{y}) dT_y, & \mathcal{D}_{ST} \underline{\varphi}_T(\underline{x}) &= \mathbf{p.v} \int_T \left(\gamma_{1,y} \underline{\underline{G}}(\underline{x}, \underline{y}) \right)^T \underline{\varphi}(\underline{y}) dT_y, & \underline{\varphi}_T &= \underline{\varphi}|_T \\ \mathcal{D}_{ST}^* \underline{\varphi}_T(\underline{x}) &= \mathbf{p.v} \int_T \gamma_{1,x} \underline{\underline{G}}(\underline{x}, \underline{y}) \underline{\varphi}(\underline{y}) dT_y, & \mathcal{H}_{ST} \underline{\varphi}_T(\underline{x}) &= \mathbf{f.p} \int_T \gamma_{1,x} \left(\gamma_{1,y} \underline{\underline{G}}(\underline{x}, \underline{y}) \right)^T \underline{\varphi}(\underline{y}) dT_y \end{aligned}$$

Références

- [1] M. Bonnet. *Équations intégrales et éléments de frontière - Applications en mécanique des solides et des fluides*, CNRS Editions / Eyrolles, 1995.
- [2] Guiggiani, M. and Gigante, A., *A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method*, ASMEemec, Vol. 57, 906-915, 1990
- [3] W. Hackbusch, B. N. Khoromskij, *A Sparse \mathcal{H} -Matrix Arithmetic : Part II : Application to Multi-Dimensional Problems*, Computing, Vol 64, pp 21 - 47, 2000
- [4] M. Benbendorf and S. Rjasanow, *Adaptive Low-Rank Approximation of Collocation Matrices*, Computing 70, 1-24, Springer-Verlag, 2003
- [5] Crouch, S.L., *Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method*, Int J Numer Methods Eng 10, 301 - 343, 1976
- [6] K. Kolk, W. Weber, G. Kuhn, *Investigation of 3D crack propagation problems via fast BEM formulations*, Comput Mech 37 : 320-040, 2005
- [7] MH. Aliabadi, *Boundary element formulations in fracture mechanics*, Appl Mech Rev, Vol 50, no 2, ASME, 1997
- [8] L. Faria, C. Pérez - Arancibia, M. Bonnet, *General-purpose kernel regularization of boundary integral equations via density interpolation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 378, 2021
- [9] \mathcal{H} -Matrix library in Julia, [A package for assembling and factoring hierarchical matrices](#)
- [10] S. Ya. Yarema, *On the contribution of G.R. Irwin to Fracture Mechanics*, Materials Science 31.5, 1996, pp. 617 - 623
- [11] P. Paris, F. Erdogan, *A Critical Analysis of Crack Propagation Laws*, Journal of Basic Engineering 85.4, 1963, pp. 528 - 533
- [12] H.D. Bui, *Mécanique de la Rupture Fragile*. Masson, 1978.